Sujet 5: Dualité — faible et forte

MHT 423 :
Modèles et méthodes d'optimisation

Andrew J. Miller

Dernière mise à jour: March 24, 2010

Dans ce sujet...

1. Dualité faible

2. Dualité forte : Ecarts complémentaires
   - Théorème des écarts complémentaires
   - L'utilisation du théorème dans la méthode du simplexe

Rappel : un exemple

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 1.9x_1 + 2.6x_2 \\
\text{s.à.} \quad & 2x_1 + x_2 \leq 4000 \\
& x_1 + 2x_2 \leq 5000 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

La solution optimale est (1000, 2000).
Une solution réalisable pour le dual est $y = (0, 1.9)$ ... mais cela n'est pas optimale.
Une solution optimale pour le dual est $y = (0.4, 1.1)$. Cette solution a la même valeur objective que la solution optimale primale.

Definition

Théorème

Soit $\bar{x}$ une solution réalisable d'un programme linéaire de maximisation, et $\bar{y}$ une solution réalisable de son dual.

Alors $c^T\bar{x} \leq b^T\bar{y}$ est toujours vrai.

Preuve :

$$\begin{aligned} c^T\bar{x} &\leq (A^T\bar{y})^T\bar{x} \\ &= (\bar{y}^TA)\bar{x} \\ &= \bar{y}^T(A\bar{x}) \\ &\leq \bar{y}^Tb \\ &\leq b^T\bar{y}. \end{aligned}$$

Alors, n'importe quelle solution réalisable pour le problème primal définit une borne sur la valeur la fonction objective duale, et vice versa.

A noter : $c^T\bar{x} \leq b^T\bar{y}$ est toujours vrai si les solutions $\bar{x}$ et $\bar{y}$ sont **optimales**.

Une conséquence : problèmes non-bornés et irréalisables

Si le primal est non-borné, alors le dual est irréalisable.

Exemple :

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ \text{s.à} \quad & x_1 - 2x_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Une conséquence : problèmes non-bornés et irréalisables

Evidemment, on peut aussi dire le suivant : Si le dual est non-borné, alors le primal est irréalisable.

Exemple :

$$
\begin{array}{rl}
\max & x_1 + x_2 \\
\text{s.à} & -x_1 \leq -2 \\
 & -x_2 \leq -1 \\
 & x_1 + 2x_2 \leq 3 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

Une autre conséquence : problèmes réalisables

Si tous les deux problèmes ont une solution réalisable, alors chaque problème a (au moins) une solution optimale.

Pourquoi?

Une autre possibilité

Il est possible que tous les deux problèmes (primal et dual) soient irréalisables.

Exemple :

$$
\begin{array}{rl}
\max & x_1 + x_2 \\
\text{s.à} & x_1 - 2x_2 \leq 1 \\
 & x_1 \leq -1 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

Les quatre possibilités pour un pair primal-dual

1. Le primal a une solution optimale est le dual a aussi une solution optimale.
2. Le primal est non-borné est le dual est irréalisable.
3. Le dual est irréalisable est le primal est non-borné.
4. Tous les deux problèmes sont irréalisables.

Dans le cas 1, une solution optimale primale aura la même valeur objective qu'une solution optimale duale.

Pour prouver qu'il existe seulement ces quatre possibilités, ainsi que la déclaration précédente concernante le premier cas est vraie, il faut considérer la dualité forte et le théorème des écarts complémentaires.

1. Dualité faible

2. Dualité forte : Ecarts complémentaires
   - Théorème des écarts complémentaires
   - L'utilisation du théorème dans la méthode du simplexe

Théorème des écarts complémentaires

Théorème

Soit $\bar{x}$ une solution réalisable pour le problème primal. La solution $\bar{x}$ est optimale si et seulement si il existe une solution réalisable $\bar{y}$ pour le problème dual telle que

- $(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{x}_j)\bar{y}_i = 0, i = 1, ..., m$
- $(c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\bar{y}_i)\bar{x}_j = 0, j = 1, ..., n$

Corollaire

C'est évident que si une telle solution duale $\bar{y}$ existe, $\bar{y}$ est forcément une solution optimale.

Corollaire

Soit $\bar{x}$ une solution optimale pour le problème primal, et $\bar{y}$ une solution optimale pour le problème dual. Alors

- $(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{x}_j)\bar{y}_i = 0, i = 1, ..., m$
- $(c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\bar{y}_i)\bar{x}_j = 0, j = 1, ..., n$

Corollaire : dualité forte

En considérant la preuve de la dualité faible, on voit l'inégalité

$$c^T\bar{x} \leq (A^T\bar{y})^T\bar{x} \Longrightarrow (c - A^T\bar{y})^T\bar{x} \leq 0.$$

Mais si $\bar{x}$ et $\bar{y}$ sont optimales, la théorème des écarts complémentaires nous dit qu'il faut que

$$(c - A^T\bar{y})^T\bar{x} = 0 \Longrightarrow c^T\bar{x} = (A^T\bar{y})^T\bar{x}$$

Alors, on a montré le suivant.

Corollaire : dualité forte

Soit $\bar{x}$ une solution optimale pour le problème primal, et $\bar{y}$ une solution optimale pour le problème dual. Alors $c^Tx = b^Ty$.

Corollaire : les quatre possibilités...

Corollaire

Etant donné un programme linéaire primal et son dual, une des quatre déclarations suivantes et vraie pour ce pair de problèmes :

1. Le primal a une solution optimale est le dual a aussi une solution optimale.
2. Le primal est non-borné est le dual est irréalisable.
3. Le dual est irréalisable est le primal est non-borné.
4. Tous les deux problèmes sont irréalisables.

Conséquences

- La dualité forte
- Critères d'optimalité

1. Dualité faible

2. Dualité forte : Ecarts complémentaires
   - Théorème des écarts complémentaires
   - L'utilisation du théorème dans la méthode du simplexe

Exemples

Si on considère un point extrème qui n'est pas pas optimale, on peut définir une solution duale qui vérifient les conditions d'écarts complémentaires.

Mais cette solution ne sera pas réalisable pour le problème dual.

Par contre, pour une solution optimale, la solution duale ainsi générée sera réalisable et optimale.

Exemple 1 : Monet dans deux dimensions

Solution optimale: (1000, 2000)

Solution non-optimale: (0, 2500)

Exemple 2 : Diététique

Solution optimale:

$$(6\frac{2}{3}, 9\frac{49}{99}, 6\frac{2}{3}, 5\frac{5}{99})$$

Solution non-optimale:

$$(10, 9\frac{39}{99}, 0, 6\frac{6}{99})$$

A souvenir

- **Théorem D'écarts Complémentaires**
- A quoi sert le problème dual :
  - Son importance pour définir les **critères d'optimalité** ; cette importance dépend sur le Théorem D'écarts Complémentaires
  - son utilisation dans l'algorithme de simplexe