

## Sujet 6: Dualité — interpretations intuitives

### MHT 423: Modélisation et optimisation

Andrew J. Miller

Dernière mise à jour: [March 31, 2010](#)

## Dans ce sujet...

- 1 L'analyse de sensibilité
- 2 Intepretations plus générales

- 1 L'analyse de sensibilité
- 2 Intepretations plus générales

# Rappel: formulation général d'un programme linéaire et son dual

Primal :

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.à.} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \forall i \\ & x_j \geq 0, j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Dual:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^m b_i y_i \\ \text{s.à.} \quad & \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j, \forall j \\ & y_i \geq 0, i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

# Solutions optimales

Etant donné une solution optimale à un programme linéaire, les valeurs des variables duales, et les écarts des contraintes duales, donnent des informations importants sur les effets des changements sur cette solution.

## Valeurs marginales et variables duales

La valeur  $\bar{y}_i$  s'appelle souvent **le prix ombre** ou **la valeur marginale** du côté droit de la contrainte  $i$ .

Elle représente le montant par lequel on pourrait augmenter/diminuer la valeur objective de la solution optimale, si on pouvait augmenter  $b_i$  par un. Il s'agit bien d'une *prédiction*.

Cette prédiction est toujours *optimiste*. Elle est *exacte* si la solution optimale duale **ne change pas**.

Donc  $\delta_i \bar{y}_i$  est une *prédiction* de la changement de la fonction objective si on augmente  $b_i$  par  $\delta_i$ .

# Coûts réduits

Définition :  $\bar{c} = c_j - \sum_{i=m} a_{ij} \bar{y}_i$  (où  $\bar{y}$  est la solution duale optimale).

Deux interprétations:  $\bar{c}_j$  est

- l'écart dans la contrainte duale correspondante à  $x_j$ ;
- le montant par lequel on peut changer  $c_j$  en restant assuré que la solution ne changera pas.

- 1 L'analyse de sensibilité
- 2 Intepretations plus générales



## Basé sur les unités de mesure

L'interpretation des variables et contraintes duales dépend toujours de l'interpretation du problème primal.

Principes à appliquer :

- L'objectif dual doit s'exprimer en la même unité de mesure que l'objectif primal.
- Chaque donné (côté droit, coefficient objective, ou coefficient d'une contrainte) s'exprime toujours en la même unité de mesure, et dans le primal et dans le dual.

Ces principes permettent à déterminer les unités de mesures pour les variables duales et les contraintes duales.

Ça nous donne une interpretation intuitive du problème dual.

# Problème Monet

## Unités de mesure

- variables duales : euros par quantité de ressource (cela implique que les variables duales sont des **prix** ou, autrement dit, des **valorisation**)
- objectif : euros
- contraintes : euros par cadre photo

Dans le dual, l'objectif alors est de trouver des prix qui minimisent la valorisation total de toutes les ressources disponibles.

Les contraintes nous obligent de trouver ces prix d'une manière qu'ils satisfont des conditions de raisonabilité : la valorisation de toutes les ressources nécessaires de fabriquer un cadre-photo doit être au minimum le prix de ce cadre photo.

## A souvenir

- A quoi sert le problème dual : **L'analyse de sensibilité**
  - valeurs marginales (“prix ombres”) : les effets sur l'optimum par des modifications de la coté droite d'une contrainte
  - coûts réduits : les effets sur l'optimum si on forait l'augmentation ou la diminution d'une variable
- Comment trouver une interpretation intuitive du problème dual: il faut bien analyser les unités de mesure.