Sujet 9 : Applications de la PLNE

MHT 423: Modélisation et optimisation

Andrew J. Miller

Dernière mise à jour: May 7, 2010

Dans ce sujet...

1. Planification de multi-période
2. Problèmes d'ordonnancement/affectation
3. Selection des sites et conceptualisation des réseaux
4. Planification ouvriers
5. Problème du voyageur commerçant

1. Planification de multi-période
2. Problèmes d'ordonnancement/affectation
3. Selection des sites et conceptualisation des réseaux
4. Planification ouvriers
5. Problème du voyageur commerçant

Planification de production multi-période

On a déjà vu une formulation pour planifier la production pendant plusieurs mois.

Si maintenant on suppose qu'il y a un coût fixe f_t pour commencer la production pendant chaque mois t, comment est-ce qu'on peut incorporer ces coûts dans la formulation?

Cette application se ressemble à application avec coûts fixes présentées

Pour pratiquer...

1 Planification de multi-période

2 Problèmes d'ordonnancement/affectation

3 Selection des sites et conceptualisation des réseaux

4 Planification ouvriers

5 Problème du voyageur commerçant

Minimisation du makespan

Il y un a ensemble de tâches $1, ..., J$ et un ensemble de machines $1, ..., K$.

Les machines ne sont pas forcément identiques, et une tâche pourrait prendre plus de temps á faire sur une machine que sur une autre.

Le temps nécessaire pour faire la tâche j sur la machine k, c'est t_{jk}.

Le but est de trouver une affectation de tâches aux machines telle que le temps maximum d'exécution sur toutes les machines (le **makespan**) soit *minimisé*.

Minimisation du makespan (suite)

Indices...

Données...

Variables...

Objectif...

Contraintes...

1. Planification de multi-période
2. Problèmes d'ordonnancement/affectation
3. Selection des sites et conceptualisation des réseaux
4. Planification ouvriers
5. Problème du voyageur commerçant

Nouvelles usines à construire

Quatre sites

Trois conceptions possibles pour chaque site

Pour chaque site, il faut en choisir un au maximum

Données

- investissement nécesaire pour chaque option
- revenus nets pour chaque
- Budget d'investissement

Modèles

Variables...

Objectif...

Contraintes...

Contraintes logiques

- Conception A peut être utilisée à 1, 2, ou 3 *seulement si* elle est aussi utilisée à 4.
- *Au maximum* deux des trois conceptions peuvent être utilisées.

Comment incorporer ces contraintes logiques?

A noter : la modelisation des contraintes logiques est une grande motivation pour l'utlisation des variables binaires.

[Planification des ouvriers]

1. Planification de multi-période
2. Problèmes d'ordonnancement/affectation
3. Selection des sites et conceptualisation des réseaux
4. Planification ouvriers
5. Problème du voyageur commerçant

Problème hebdomadaire “statique”

On considère un lieu de travail (e.g., La Poste, FedEx, DHL) où il existe des besoins quotidiens de travail.

On a des prévisions de ces besoins données en des quantités d'ouvriers nécessités pendant chaque jour de la semaine.

On veut assurer qu'il y a assez d'ouvriers pendant chaque jour.

Problème hebdomadaire "statique"

Quelques restrictions compliquantes (venantes des contractes syndicales, du règlement légal, etc.) :

- Il faut que tous les ouvriers soient engagés à plein temps
- Il faut que chaque ouvrier travaille cinq jours consécutives, et qu'il aie deux jours de repos après.
- Le travail pendant les samedis et les dimanches doit être payé deux fois plus que le travail pendant les autres jours.

Exemple numérique

Les besoins d'ouvriers sont donnés par la table suivante :

lundi	mardi	mercredi	jeudi	vendredi	samedi	dimanche
17	13	15	19	14	16	11

Formulation

Indices...

Données...

Formulation : variables

Soit y_j la quantité d'ouvriers qui commencent leur semaines de travail au jour j.

C'est à dire que y_1 soit le nombre d'ouvriers qui commencent à travailler lundi qui travaillent aussi les prochaines quatre jours (jusqu'à vendredi), que y_2 soit le nombre qui commencent mardi et qui travaillent jusqu'à samedi, etc.

Cette définition des variables facilitera la formulation de contraintes plus tard.

Formulation : objectif

Si le salaire pour une journée de travail s'élève à 200 euros, alors le salaire hebdomadaire d'un ouvrier qui commence à travailler le lundi est 1000 euros.

Par contre, un ouvrier qui commence à travailler le mardi continuera à travailler jusqu'au samedi, et il faudra lui payer 400 euros pour son travail chaque samedi. Donc son salaire hebdomadaire sera 1200 euros.

Un ouvrier qui commence à travailler le vendredi continuera à travailler pendant samedi, dimanche, lundi, et mardi. Il faudra lui payer 400 euros pour son travail samedi et dimanche; donc son salaire hebdomadaire sera 1400 euros.
De cette logique, la fonction objective deviendra

$$\min \; 1000y_1 + 1200y_2 + 1400y_3 + 1400y_4 + 1400y_5 + 1400y_6 + 1200y_7$$

En effet, quoique soit le salaire quotidien normal, on pourrait toujours normaliser l'objectif à

$$\min \; 5y_1 + 6y_2 + 7y_3 + 7y_4 + 7y_5 + 7y_6 + 6y_7.$$

Formulation : contraintes

Pour chaque jour, il faut assurer qu'il y a une quantité d'ouvriers suffisante pour achever tout le travail.
Par exemple, il faut assurer qu'il y a 17 ouvriers qui travaillent le lundi.

Quels ouvriers seront en train de travailler le lundi?
Ceux qui commencent à travailler les jours suivants : jeudi, vendredi, samedi, dimanche, et lundi même.

De cette logique vient la contrainte
$y_1 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 \geq 17.$

Formulation : contraintes

Il faut une telle contrainte pour chaque jour :

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
y_1 & & & & & + & y_4 & + & y_5 & + & y_6 & + & y_7 & \geq & 17 \\
y_1 & + & y_2 & & & & & + & y_5 & + & y_6 & + & y_7 & \geq & 13 \\
y_1 & + & y_2 & + & y_3 & & & & & + & y_6 & + & y_7 & \geq & 15 \\
y_1 & + & y_2 & + & y_3 & + & y_4 & & & & & + & y_7 & \geq & 19 \\
y_1 & + & y_2 & + & y_3 & + & y_4 & + & y_5 & & & & & \geq & 14 \\
 & & y_2 & + & y_3 & + & y_4 & + & y_5 & + & y_6 & & & \geq & 16 \\
 & & & & y_3 & + & y_4 & + & y_5 & + & y_6 & + & y_7 & \geq & 11
\end{array}
$$

Formulation complète

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcrcl}
\min & 5y_1 & + & 6y_2 & + & 7y_3 & + & 7y_4 & + & 7y_5 & + & 7y_6 & + & 6y_7 & & \\
 & y_1 & & & & & + & y_4 & + & y_5 & + & y_6 & + & y_7 & \geq & 17 \\
 & y_1 & + & y_2 & & & & & + & y_5 & + & y_6 & + & y_7 & \geq & 13 \\
 & y_1 & + & y_2 & + & y_3 & & & & & + & y_6 & + & y_7 & \geq & 15 \\
\text{s. à} & y_1 & + & y_2 & + & y_3 & + & y_4 & & & & & + & y_7 & \geq & 19 \\
 & y_1 & + & y_2 & + & y_3 & + & y_4 & + & y_5 & & & & & \geq & 14 \\
 & & & y_2 & + & y_3 & + & y_4 & + & y_5 & + & y_6 & & & \geq & 16 \\
 & & & & & y_3 & + & y_4 & + & y_5 & + & y_6 & + & y_7 & \geq & 11 \\
 & \multicolumn{15}{l}{y_i \geq 0, y_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, 7}
\end{array}
$$

1. Planification de multi-période
2. Problèmes d'ordonnancement/affectation
3. Selection des sites et conceptualisation des réseaux
4. Planification ouvriers
5. Problème du voyageur commerçant

Problème

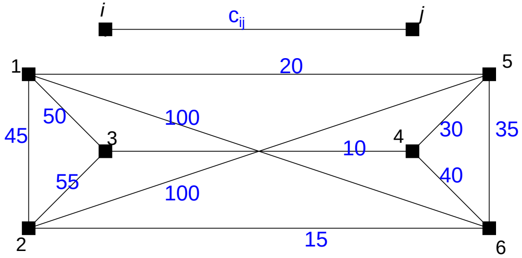
Etant donné un graphe $G = (N, A)$, où N soit l'ensemble de nœuds et A soit l'ensemble d'arêtes.

Chaque arête relie deux nœuds, et chaque pair de nœuds est relié par au maximum une arête (en effet, chaque pair de nœuds est relié par 1 arête ou 0 arêtes). Donc on peut indiquer une arête (i, j) par les deux nœuds qu'elle relie.

Pour chaque arête $(i, j) \in A$, il y a un coût $c_{ij} \in \mathbb{Z}, c_{ij} \geq 0$.

Pour faciliter la formulation, poser $n = |N|$ (le nombre de nœuds) et $m = |A|$ (le nombre d'arêtes).

Exemple



Ici, $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

$A = \{(1,2),(1,3),(1,5),(1,6),(2,3),(2,5),(2,6),(3,4),(4,5),(4,6),(5,6)\}$,

$n = 6$, et $m = 11$.

On peut voir que $c_{12} = 45$, $c_{25} = 100$, $c_{46} = 40$, etc.

Problème

Le probème, c'est de trouver un *tour* de coût minimum.

Un tour, c'est un cycle qui contient tous les nœuds.

Autrement dit, il faut visiter tous les nœuds dans une séquence telle que chaque nœud n'est visité qu'une seule fois. Il faut trouver la telle séquence qui minimiset la somme des coûts dans le cycle défini.

Variables

Pour chaque nœud $i \in N$ et chaque position $k = 1, \dots, n$,

$$x_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{sinon} \\ 1 & \text{si le nœud } i \text{ est mis dans la place } k \\ & \text{de la séquence qui définit le tour} \end{cases}$$

Pour chaque arête $(i, j) \in A$,

$$y_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{sinon} \\ 1 & \text{si l'arête } (i, j) \text{ est dans le tour optimal} \end{cases}$$

Objectif et contraintes

Fonction objective :

$$\min \ \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} y_{ij}$$

Contraintes :

$$\begin{aligned}
\text{s.à} \quad & \sum_{i\in N} x_{ik} = 1, k = 1, ..., n \\
& \sum_{k=1}^{n} x_{ik} = 1, \forall i \in N \\
& ? \ ? \ ? \\
& x_{ik} \in \{0,1\}, \forall i \in N, k = 1, ..., n; \ \ y_{ij} \in \{0,1\}, \forall (i,j) \in A
\end{aligned}$$

Pensez aux contraintes linéaires nécessaires pour assurer qu'une solution donnée par x et ys soit un tour réalisable.

A souvenir

- Modélisation des problèmes en nombres entiers