MHT 423: Modélisation et optimisation
Examen Final
Lundi 18 mai 2009

L'énoncé comporte cinq (5) pages. Les documents sont autorisés.

Notes de cours et TD autorisés. Planifiez bien votre temps; il y a ***quatre (4) parties***, et le barème est indiqué entre parenthèses. Pour chaque partie, nous vous conseillons de tout lire avant de commencer.

1. (24 points) Branch-and-bound : vrai/faux

   Dans les questions suivantes, supposez qu'on veut *maximiser* la fonction objective pour un programme linéaire en nombres entiers. Répondez VRAI si la declaration est toujours vrai. Sinon, répondez FAUX. Expliquez brièvement vos réponses.

   (a) A chaque noeud dans l'arbre de branch-and-bound, si la valeur optimale de la relaxation linéaire associée à ce noeud est inférieure à la valeur de la fonction objective pour la meilleure solution entière déjà trouvé, on peut couper le noeud en question.

   (b) A un noeud donné, si la solution optimale de la relaxation linéaire est déjà entière, on est certain d'avoir trouvé la solution optimale du problème original.

   (c) La solution optimale de la relaxation linéaire du problème original définit une borne supérieure sur la valeur optimale du problème original.

   (d) S'il n'existe pas de solution réalisable pour la relaxation linéaire du problème original, alors il n'existe pas de solution réalisable pour le problème original non plus.

   (e) S'il n'existe pas de solution réalisable pour le problème original, alors il n'existe pas non plus de solution réalisable pour la relaxation linéaire du problème.

   (f) Si la solution optimale de la relaxation linéaire du problème original n'est pas entière, on peut trouver une solution entière réalisable par des opérations simples d'arrondi.

2. (22 points)

   Considérez le programme linéaire suivante.

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\min & 3x_1 & + & 7x_2 & - & 6x_3 & & \\
\text{s.à} & x_1 & + & x_2 & & & \geq & 2 \\
 & x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 10 \\
 & 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & \geq & -1 \\
 & \multicolumn{7}{l}{x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;\ x_3 \text{ libre}}
\end{array}
$$

   (a) Définissez le dual de ce problème.

   (b) Considérez la solution $x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 4$. Est-ce que cette solution est la solution optimale? Pourquoi ou pourquoi pas? (Votre réponse doit utiliser le théorem d'écarts complémentaires.)

3. (32 points) Une usine d'acier veut planifier sa production pendant la prochaine semaine. La fabrication d'acier nécessite des ressources suivantes: du *fer*, du *graphite*, et de la *manganèse*.

   Il y a deux types d'acier qui peuvent se fabriquer. Un kg de type 1 nécessite 1 kg de fer, 50 grammes de graphite, et 50 grammes de manganèse. Un kg de type 2 nécessite 1 kg de fer et 200 grammes de graphite (type 2 se fabrique sans manganèse).

   Les quantités des ressources disponibles sont les suivants : 1000 kg de fer, 100 kg (100 000 grammes) de graphite, et 40 kg (40 000 grammes) de manganèse.

   Chaque kg d'acier du type 1 fabriqué peut être vendue pour en profit de 20 euros. Chaque kg d'acier du type 2 fabriqué peut être vendue pour en profit de 10 euros.

   (a) Modélisez le problème de planifier la production d'acier pendant la semaine prochaine ainsi que le profit soit maximisé. Votre modéle doit être un programme linéaire. Définissez clairement 1) les variables ; 2) les contraintes ; 3) la fonction objective. Définissez aussi d'une manière claire les unités de mésure pour les variables, les contraintes, et la fonction objective.

   (b) Définissez le problème dual de votre modèle dans (a). Pour le dual, indiquez les unités de mésure pour les variables, les contraintes, et la fonction objective.

   (c) Trouvez la solution optimale de votre modèle dans (a). (Vous pouvez utiliser n'importe quelle méthode que vous désirez, mais je crois que la méthode la plus facile sera la méthode graphique qu'on a discuté en cours.)

   (d) Trouvez la solution optimale du problème dual que vous avez défini dans (b). (Vous pouvez utiliser n'importe quelle méthode que vous désirez, mais je crois que la méthode la plus facile sera de partir de la solution optimale trouvée dans (c) et d'appliquer le théorem d'écarts complémentaires.)

4. (22 points)

   Un fabriquant de pneus veut planifier sa production pour le prochain mois. Ce fabriquant a accès à deux espèces de caoutchouc, qu'on peut appeler caoutchouc de *haute* qualité et caoutchouc de *basse* qualité.

   Le caoutchouc de haute qualité à une indice de qualité de 12. Le caoutchouc de basse qualité à une indice de qualité de 6. Il y a 10 000 kg de caoutchouc de haute qualité disponible, et 12 000 kg de caoutchouc de basse qualité disponible.

   Le fabriquant vend trois espèces de pneus aux clients : type 1, type 2, et type 3. Pour tous les trois types de pneus, exactement 1 kg de caoutchouc est nécessaire pour la fabrication d'un pneu. Cette obligation ne dépend pas sur la qualité du caoutchouc utilisé.

   Par contre, *la qualité* du pneu dépend sur la qualité du caoutchouc utilisé d'une manière directement proportionnelle. Par exemple, si un pneu est fabriqué avec un demi kg de caoutchouc de haute qualité et un demi kg de caoutchouc de basse qualité, la qualité du pneu sera 9. La qualité minimum de type 1 est 7, la qualité minimum de type 2 est 9, et la qualité minimum de type 3 est 11.

   Chaque pneu de type 1 peut être vendu pour un prix de 25 euros, chaque pneu de type 2 peut être vendu pour un prix de 50 euros, et chaque pneu de type 3 peut être vendu pour un prix de 90 euros. ***Mais***, avant de produire un pneu d'un certain type, il ***faut*** payer un coût fixe pour commencer la production de ce type. Le coût fixe pour type 1 est 300 000 euros, le coût fixe pour type 2 est 500 000 euros, et le coût fixe pour type 3 est 700 000 euros.

   (a) Modélisez le problème de trouver un plan de production qui maximise le profit net (revenue de ventes moins les coûts fixes payés), et qui respecte la disponibilité des ressources et les minimums de qualités exigés. Votre formulation doit être un programm linéaire en nombres entiers mixtes. Définissez clairement les variables, les contraintes, et l'objectif, ainsi que les unités de mésure pour tous.

   (b) Maintenant, considérez la situation suivante : on ne peut pas commencer la fabrication des pneus de type 1 *sauf si* on a déjà commencé la fabrication de *tous les deux types* 2 et 3. Ajoutez à votre modèle dans (a) une contrainte linéaire / des contraintes linéaires qui exige(nt) cette restriction.

(c) Maintenant, considérez la situation suivante : on ne peut pas commencer la fabrication des pneus de type 1 *sauf si* on a déjà commencé la fabrication *ou* de type 2, *ou* de type 3, *ou* de tous les deux. Ajoutez à votre modèle dans (a) une contrainte linéaire / des contraintes linéaires qui exige(nt) cette restriction.

(d) Maintenant, considérez la situation suivante : on *ne* peut fabriquer que *deux types des pneus* pendant le mois prochain. Ajoutez à votre modèle dans (a) une contrainte linéaire qui exige cette restriction.