Sujet 1: L'algorithme du simplexe révisé et l'algorithme simplexe avec bornes

MSE3111C: Programmation linéaire II

Andrew J. Miller
(d'après Linear programming. Chvatal, Vasek - McGraw-Hill, 1983,
et d'après les notes des cours de Programmation Linéaire rédigées par L.A. Wolsey et F. Vanderbeck)
Last update: November 4, 2011

Dans ce sujet...

1. Rappel
2. Méthode du simplexe révisé
3. Méthode du simplexe avec bornes supérieures
   - Conditions d'optimalité
   - L'algorithme
4. Extension

Exemple

$$\begin{array}{rcl} \max 19\ x_1 + 13\ x_2 + 12\ x_3 + 17\ x_4 & & \\ 3\ x_1 + \ 2\ x_2 + \ 1\ x_3 + \ 2\ x_4 & \leq & 225 \\ 1\ x_1 + 1\ x_2 + 1\ x_3 + 1\ x_4 & \leq & 117 \\ 4\ x_1 + 3\ x_2 + 3\ x_3 + 4\ x_4 & \leq & 420 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Formulation équivalent: $\max\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$, avec

$$c = \begin{bmatrix} 19 \\ 13 \\ 12 \\ 17 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ b = \begin{bmatrix} 225 \\ 117 \\ 420 \end{bmatrix}$$

Théorèmes des écarts complémentaires

Théorème

Une solution primale réalisable $x^* = (x_1^*, \dots x_n^*)$ *est optimale* ssi *il existe une solution duale réalisable* $(y_1^*, \dots, y_m^*)$ *tel que*

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* = c_j, \forall j : x_j^* > 0 \qquad (1)$$

$$y_i^* = 0, \forall i : \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j^* < b_i \qquad (2)$$

Théorème

Une solution primale basique réalisable $x^* = (x_1^*, \dots x_n^*)$, *avec une base associée* $\mathcal{B}$, *est optimale* ssi

$$\bar{c}_j \leq 0, \ \forall j \notin \mathcal{B}, \qquad (3)$$

où $\bar{c} = c - c_B^T B^{-1} A$.

Dictionaires

Points à remarquer:

1. Le méthode du simplexe garde toujours **et une solution primale** (définie par $B^{-1}b$) **et une solution duale** (définie par $B^{-1}c_{\mathcal{B}}$).
2. Les coûts réduits dans le problème primal sont les écarts dans les contraintes duales … et vice versa.
3. Si on a ajouté des variables d'écart, B^{-1} se trouve dans les colonnes de la dictionnaire leur correspondante.
4. Si on a ajouté des variables d'écart, leurs coûts réduits sont toujours les négatifs des variables duales des contraintes associées.

Bases

Tous les calculs nécéssaires pour définir les démarches de l'algorithme nécésitent principalement la matrice basique B et la resolution des systèmes définis par cela; par exemple $Bx_{\mathcal{B}} = b$, $B^T y = c_{\mathcal{B}}$, etc.

On s'intéresse alors à se limiter à la manipulation de B d'une itération à l'autre.

1. Rappel
2. Méthode du simplexe révisé
3. Méthode du simplexe avec bornes supérieures
   - Conditions d'optimalité
   - L'algorithme
4. Extension

L'algorithme du simplex révisé (I)

Algorithme

Pas 0: *Commencer avec une solution de base réalisable:*

$$\mathcal{B},\ x^*_{\mathcal{B}} = B^{-1}b, B$$

Pas 1: *Resoudre* $B^T y = c_{\mathcal{B}}$.

Pas 2: *Choisir une colonne* a_k *de* N *d'indice* $k \in \mathcal{N}$:

$$\bar{c}_k = (c_k - a_k^T y) > 0$$

S'il *n'en existe pas, la solution est* **optimum**, *STOP.*

Pas 3: *Resoudre* $Bd = a_k$.

L'algorithme du simplex révisé (II)

Algorithme

Pas 3: *Resoudre* $Bd = a_k$.

Pas 4: *Trouver* $t_{\max} = \max\{t \geq 0 : x^*_{\mathcal{B}} - td \geq 0\}$.
S'il *n'en existe pas, le problème est* **non-borné**, *STOP.*
Sinon *au moins une composant de tombe à zéro, appelons la* s.

Pas 5: *Poser* $x_{\mathcal{B}} = x^*_{\mathcal{B}} - t_{\max}\ d$; *remplacer* x_s *par* $x_k = t_{\max}$ *dans* $x_{\mathcal{B}}$; *poser* $\mathcal{B} = \mathcal{B} \setminus \{s\} \cup \{k\}$; *et remplacer la colonne* s *de* B *par* a_k.
Retourner au **Pas 1**.

Remarquons que les seuls calculs faits concernent la matrice de base B.
Plus précisément, il faut résoudre la système $B^T y = c_{\mathcal{B}}$ en Pas 1 et la système $Bd = a_k$ en Pas 3.

Remarques sur l'algorithme

1. Pour simplifier même plus les calculs, les meilleurs codes gardent une factorisation de la base $B = LU$, où L et U sont *triangulaires*. Par exemple,

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ L_{m1} & L_{m2} & L_{m3} & \dots & L_{m-1,m-1} & 0 \\ L_{m1} & L_{m2} & L_{m3} & \dots & L_{m,m-1} & L_{mm} \end{bmatrix}$$

Remarques sur l'algorithme

2. Les mises à jour de B (et de L et U) peuvent s'effectuer très vite et très stablement à cause de ces factorisations. Par exemple, en passant de la $q^{\text{ème}}$ itération à la $q+1^{\text{ème}}$, la mise à jour de B peut s'exprimer
$$B_{q+1} = B_q M_q,$$
où M est la matrice d'identité avec la colonne correpondent à la variable sortante **remplacée** par la colonne d calculée en Pas 3 (alors très creuse).

Supposons qu'on a déja une factorisation
$$B_q = L_q U_q;$$
on peut utiliser cette factorisation actuelle de trouver une mise à jour $B_{q+1} = L_{q+1} U_{q+1}$ sans être obligé de refaire toute la factorisation en commençant à nouveau.

Remarques sur l'algorithme

2. (continue)

   Supposons qu'on a déja une factorisation

   $$B_q = L_q U_q;$$

   on peut utiliser cette factorisation actuelle de trouver une mise à jour $B_{q+1} = L_{q+1} U_{q+1}$ sans être obligé de refaire toute la factorisation en commençant à nouveau.

   Souvenons que $B_{q+1} = L_q U_q M_q$; la matrice $U_q M_q$ est souvent déja *triangulaire* (et dans ce cas on prends $L_{q+1} = L_q$ et $U_{q+1} = U_q M_q$).

   Même sinon, c'est facile á trouver les matrices L_q^* et U_{q+1} satisfaisant $L_q^* U_{q+1} = U_q M_q$. Dans ce cas aussi, $L_{q+1} = L_q L_q^*$ n'est pas seulement triangulaire, mais se calculent relativement vite et stablement (parce que L_q^* est creuse).

Bornes et dualité

$$
\begin{aligned}
\max \quad & c^T x \\
\text{s.à.} \quad & Ax = b && (4) \\
& x \leq u && (5) \\
& 0 \leq x
\end{aligned}
$$

Pour définir le problème dual, on associe variables y avec contraintes (4) et z avec (5).

$$
\begin{aligned}
\min \quad & b^T y - u^T z \\
\text{s.à.} \quad & A^T y + I z \geq c && (6) \\
& y \text{ libre; } z \geq 0
\end{aligned}
$$

Motivation

Les bornes supérieures semblent aussi simples que les bornes inférieures.
On aimerait bien les traiter dans une manière analogue, c'est à dire implicite.
Cela pourrait réduire la taille de chaque base considérée, ainsi que le nombre des pivotages nécéssaires.

1. Rappel
2. Méthode du simplexe révisé
3. Méthode du simplexe avec bornes supérieures
   - Conditions d'optimalité
   - L'algorithme
4. Extension

Théorèmes des écarts complémentaires (I)

Théorème

Une solution primale réalisable $x^* = (x_1^*, \ldots x_n^*)$ *est optimale* ssi *il existe une solution duale réalisable* $(y_1^*, \ldots, y_m^*, z_1^*, \ldots z_n^*)$ *telle que*

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i\,j} y_i^* + z_j^* = c_j, \forall j : \ x_j^* > 0 \tag{7}$$

$$z_j^* = 0, \forall j : \ x_j^* < u_j \tag{8}$$

Remarquons bien la prèsence de la dernière nouvelle condition.

Théorèmes des écarts complémentaires (II)

Théorème

Une solution primale basique réalisable $x^* = (x_1^*, \dots x_n^*)$, *avec une base associée* $(\mathcal{B}, \mathcal{L}, \mathcal{U})$, *est optimale* ssi

$$\bar{c}_j \leq 0, \ \forall j \in \mathcal{L}, \tag{9}$$
$$\bar{c}_j \geq 0, \ \forall j \in \mathcal{U}, \tag{10}$$

où $\bar{c} = c - c_B^T B^{-1} A$.

On peut trouver cette théorème par l'application directe de la théorème précedente.

L'algorithme du simplex révisé (I) pour les problèmes avec des bornes supérieures

Algorithme

Pas 0: *Commencer avec une solution de base réalisable:*

$$\{\mathcal{B}, \mathcal{L}, \mathcal{U}\}, \; x^*_{\mathcal{B}} = B^{-1}b, B$$

Pas 1: *Resoudre $B^T y = c_{\mathcal{B}}$.*

Pas 2: *Choisir une colonne a_k de N d'indice $k \in \mathcal{N}$:*

$$k \in \mathcal{L} : \bar{c}_k = (c_k - a_k^T y) > 0 \text{ ou } k \in \mathcal{U} : \bar{c}_k = (c_k - a_k^T y) < 0$$

S'il *n'en existe pas, la solution est* **optimum**, *STOP.*

Pas 3: *Resoudre $Bd = a_k$.*

L'algorithme du simplex révisé (II)

Algorithme

Pas 4: *Trouver* $t_{\max} = \max\{u_k, \max\{t \geq 0 : 0 \leq x^*_{\mathcal{B}} - td \leq u_{\mathcal{B}}\}\}$.
Si $t_{max} = \infty$, *le problème est* **non-borné**, *STOP.*
Sinon *on se trouve dans un de quatre cas:*

1. $t_{max} = u_k$ *et* $k \in \mathcal{L}$; *alors poser* $k = s$.
2. $t_{max} = u_k$ *et* $k \in \mathcal{U}$; *alors poser* $k = s$.
3. *Au moins une composant de* $(x^*_{\mathcal{B}} - t_{\max} d)$ *tombe à 0; appelons la* s *à la borne supérieure; appelons la* s.

Pas 5: *Poser* $x_{\mathcal{B}} = x^*_{\mathcal{B}} - t_{\max}\, d$.
Si *on est tombé dans cas 1 dans* **Pas 4**, *poser* $x_k = u_k$, $\mathcal{L} = \mathcal{L} \setminus \{k\}$, *et* $\mathcal{U} = \mathcal{U} \cup \{k\}$.
Si *on est tombé dans cas 2 dans* **Pas 4**, *poser* $x_k = 0$, $\mathcal{U} = \mathcal{U} \setminus \{k\}$, *et* $\mathcal{L} = \mathcal{L} \cup \{k\}$.
Si *on est tombé dans cas 3 dans* **Pas 4**, *remplacer* x_s *par* $x_k = t_{\max}$ *dans* $x_{\mathcal{B}}$; *poser* $\mathcal{B} = \mathcal{B} \setminus \{s\} \cup \{k\}$; *remplacer la colonne* s *de* B *par* a_k; *enlever* k *de* $\mathcal{L}$ *ou* $\mathcal{U}$ *(selon le cas applicable) et poser* s *dans* $\mathcal{L}$ *ou* $\mathcal{U}$ *(selon le cas applicable).*
Retourner au **Pas 1**.

Remarques sur l'algorithme du simplex révisé avec bornes inférieures

Remarquons bien la possibilité qu'une variable puisse entrer *et* sortir de la base dans la même itération, si elle va d'une borne à l'autre (cas 1 et 2 de **Pas 4**).

Bornes inférieures non 0

Comment traiter les cas avec les bornes inférieures non-triviales:
$\ell \leq x \leq u$?
Comment résoudre ces problèmes par la méthode simplexe?
Trois possibilités:

- Traiter les bornes comme des contraintes explicites.
- Modifier les théorèmes des écarts complémentaires afin de les appliquer à cette situation.
  - Cela se fait exactement dans la même manière: par l'application de la dualité.
- Modifier le problème automatiquement par la substitution $w = x - \ell$ et appliquer les résultats de ce sujet au problème

$$\begin{array}{ll} \max & c^T w \\ \text{s.à.} & Aw = b' \\ & 0 \leq w \leq u - \ell, \end{array}$$

  où $b' = b - A\ell$. Ce problème est équivalent au problème original, est tombe dans la categorie de problèmes qu'on vient d'analyser.

A souvenir

- L'algorithme du simplexe révisé
  - surtout l'importance de la base dans la réduction de calcul par rapport au méthode avec dictionnaires
- Les conditions d'optimalité pour les problèmes avec bornes supérieures
  - comment les dériver par la dualité
  - comment les appliquer dans l'algorithme du simplexe révisé pour les problèmes bornés