Sujet 5 : Modèles de la planification tactique: production et distribution

MSE3312: Planification de production et gestion des opérations

Andrew J. Miller

Dernière mise au jour: November 14, 2011

Dans ce sujet...

1. Problèmes de distribution
   - Application 1 : distribution à mi-terme
   - Application 2 : routages à court-terms
2. Goodstone: capacités et temps de mise en charge
   - Situation
   - Le modèle
   - Résolution
3. Planification de la production avec multiples niveaux
   - Fabrication des meubles rangements
   - Modélisation
   - Résolution
4. Extensions
   - BOM plus général
   - Autres extensions
5. Utilisation des inégalités (ℓ, S)

Routages des transports quotidiens

Ces problèmes sont très proches aux problèms opérationelles.

Ces problèmes ont également beaucoup en commun avec les problèmes ordonnancement, qui eux sont des problèmes opérationelles.

Pour ces raisons, on abordera ces problèmes plus tard.

Fabrication des pneus

- horizon de planification de 8 semaines ($NT = 8$)
- demande des clients pour 6 catégories de pneus ($NI = 6$; $d_t^i, i = 1, \ldots, NI, t = 1, \ldots, NT$)
- une machine
  - capacité limitée (96 heures par semaine = 12 périodes de 8 heures pendant chacune; $K = 96$)
  - possibilité d'heures supplémentaires (à un tarif de OC par heure)
- coûts fixes de mise en charge (f^i) *et* temps fixe de mise en charge (ST^i)
- temps unitaire de production pour chaque bien (a^i)
- coûts de stockage (h^i) et inventaire actuelle (s_0^i)
- préférences du gestion
  - production limitée à la moitié de la somme de la demande pour les 8 semaines
  - buts de stock terminal de securité ("safety stock"; $SS_{NT}^i, \forall i$)

Exemple de *Modeling the Supply Chain*, Shapiro, chapter 5.3

Variables et notations

- x_t^i: quantité de production de produit i dans semaine t;
- y_t^i: 1 s'il y a une mise en charge de produit i dans semaine t, 0 sinon;
- s_t^i: quantité de stock de i au fin de t;
- o_t: quantité d'heures supplémentaires pendant t;

Soit $d_{k\ell}^i = \sum_{t=k}^{\ell} d_t^i$, la somme de la demande pour i de k jusqu'à ℓ.
Par exemple, $d_{1,NT}^i = \sum_{t=1}^{NT} d_t^i$, la quantité de i demané pendant toute l'horizon

Formulation algébraique

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i,t} (f^i y_t^i + h^i s_{i,t}) + \sum_t OC * o_t & (1)\\
\text{s.t.} \quad & x_t^i + s_{t-1}^i = d_t^i + s_t^i, \forall i, \forall t & (2)\\
& s_{NT}^i \geq SS_{NT}^i, \forall i & (3)\\
& \sum_i a^i x_t^i + \sum_i ST^i y_t^i \leq K + o_t, \forall t & (4)\\
& x_t^i \leq \frac{d_{1,NT}^i}{2} y_t^i, \forall i, t & (5)\\
& x_t^i, s_t^i \geq 0, \forall i, t; o_t \geq 0, \forall t; y_t^i \in \{0,1\}, \forall i, t & (6)
\end{aligned}
$$

N'oublions pas que s_0^i (parait dans la constrainte (2) pour $t = 1$) est un élément *donné* (le stock actuel) pour chaque i.

L'utilisation du modèle

Un tel modèle s'utilise souvent avec un horizon roulant.

- Le plus dans l'avenir qu'on prend des estimations des données (et surtout de la demande) le plus qu'on manque de certitude.
- Il faut quand même considére le prochain avenir pendant les activités de planification.
- Après chaque résolution, on implément que les décisions déterminées par le modèle pour la semaine actuelle.
    - Les décisions pour la semaine prochaine seront ré-déterminées par la résolution du modèle au début de la semaine prochaine, etc.
- Dans cette façon, les données les plus certaines (celles de la plus grande proximité au présent) ont les plus grandes influences sur les décisions définitivement prises (parce que ces décisions sont aussi celles de la plus grande proximité au présent).

Cette explication justifie l'utilisation d'un tel modèle dans beaucoup de cas où la demande dans l'avenir n'est pas connue avec certitude.

La résolution du modèle

L'utilisation d'un tel modèle est souvent justifié...mais les tels problèmes sont souvent trés dificile à resoudre.

Qu'est-ce qui cause cette difficulté?

Qu'est-ce qu'on peut faire pour améliorer notre capacité de resoudre ces modèles?

Capacité, optimisation, MRP II/ERP, et

Les relations entre les contraintes (2) et les spécifications des variables entières est la cause principale de la difficulté.

- Pendant cette semaine, on a une choix combinatoire de l'ensemble de produits pour lesquels on fera des mises en charge.
- Ces choix sont limitée par les exigeances de demande. Ici, ils sont aussi limités par les capacités.

C'est alors difficil pour les logiciels d'optimisation à trouver une solution optimale.

Mais c'est même plus difficil pour les heuristiques simples (tel qu'elles implementés par les logiciels de MRP II et ERP — par exemple, SAP, Oracle, JP Edwards) à trouver une solution réalisable. En effet, ces heuristiques sont incapables de prendre les capacités en compte dans une manière rigoreuse.

Amélioration de la formulation (I)

Pour les raisons données sur le transparent précédent, entre autres, il vaut mieux utiliser les outils de la programmation mathématique.

En plus (comme toujours avec MIP), on peut essayer d'*améliorer la formulation*.
Commençons par les contraintes (5):

$$x_t^i \leq \frac{d_{1,NT}^i}{2} y_t^i, \forall i, t.$$

On sait une autre *borne variable* (c'est à dire, une borne qui *dépendent sur les variables y*) pour les variables x:

$$x_t^i \leq (d_{t,NT}^i + SS_{NT}^i) y_t^i, \forall i, t.$$

Amélioration de la formulation (II)

En combinaisant les deux bornes variables, on obtient

$$x_t^i \leq \min\{\frac{d_{1,NT}^i}{2}, d_{t,NT}^i + SS_{NT}^i\} y_t^i, \forall i, t,$$

qui peuvent remplacer (5).
On peut aussi définir et ajouter les inégalités valides

$$x_t^i \leq \frac{K - ST^i}{a^i} y_t^i + \frac{1}{a^i} o_t, \forall i, t, \tag{7}$$

et les ajouter à la formulation.

Pour trouver des autres améliorations, il faut bien considérer les sous-modèles de la structure d' "ULS", la probème sans capacités.

Reconaissance de la structure ULS

Pour rappel:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_t h_t s_t + \sum_t f_t y_t \\
\text{s.t.} \quad & x_t + s_{t-1} - s_t = d_t, \forall t \\
& x_t - d_{t,NT} y_t \leq 0, \forall t \\
& x_t, s_t \geq 0, \forall t; \;\; y_t \in \{0,1\}, \forall t
\end{aligned}$$

Remarquons qu'il y a un sous-modèle de cette forme pour chaque produit:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_i \sum_t (f^i y_t^i + h^i s_{i,t}) + \sum_t OC * o_t \\
\text{s.t.} \quad & x_t^i + s_{t-1}^i = d_t^i + s_t^i, \forall t, \forall t \\
& x_t^i \leq M_t^i y_t^i, \forall t, \forall i \\
& x_t^i \geq 0, s_t^i \geq 0, y_t^i \in \{0,1\}, \forall t, \forall i o_t \geq 0, \forall t \\
& \sum_i a^i x_t^i + \sum_i ST^i y_t^i \leq K + o_t, \forall t \\
& s_{NT}^i \geq SS_{NT}^i, \forall i
\end{aligned}$$

Utilisation de la structure ULS (I)

On s'intéresse à avoir une formulation aussi forte que possible pour chacun de ces sous-modèles.
Cela menera à une formulation plus forte pour le probème originale.

Pour trouver cela, il faut analyser le modèle ULS.
Il faut surtout considerer la *relaxation linéaire* du probème obtenu par la remplacement des specifications $y_t \in \{0, 1\}, \forall t$ avec les contraintes linéaires $0 \leq y_t \leq 1, \forall t$).

Appelons le relaxation linéaire du modèle ci-dessus Formulation 1.

Utilisation de la structure ULS (II)

Imaginons que $h_t > 0$, $f_t > 0$, et

$$h_{t-1} > \frac{f_t}{d_{t,NT}} \tag{8}$$

pour $t = 2, ..., NT$. Dans ce cas, la solution optimale de Formulation 1 sera

$$\bar{x}_t = d_t,\ \bar{s}_t = 0,\ \bar{y}_t = \frac{d_t}{d_{t,NT}}; \forall t.$$

Pour rendre cette solution irréalisable dans la relaxation linéaire (sans couper aucune solution entière réalisable), on peut ajouter les contraintes

$$x_t \leq d_t y_t + s_t,\ \ t = 1, ..., NT - 1,$$

ou, équivalemment,

$$s_{t-1} + d_t y_t \geq d_t,\ \ t = 1, ..., NT - 1.$$

La familles des inégalités (ℓ, S) (I)

Théorem (1)

Dans un problème ULS, soit ℓ une période de temps, et soit S un sous-ensemble des périodes $1, ..., \ell$; alors

$$S \subset \{1, ..., \ell\}.$$

L'inégalité suivante est **valide** *pour ULS:*

$$\sum_{t \in S} x_t \leq \sum_{t \in S} d_{t\ell} y_t + s_\ell.$$

La *validité* de cette inégalité veut dire qu'elle est vérifiée par chaque solution entière réalisable.

La familles des inégalités (ℓ, S) (II)

On peut définit une partie de cette famille qui est un peu plus facile à manipuler, mais qui est en soi importante et intéressante:

Corollaire (2)

Dans un problème ULS, soit ℓ_2 une période de temps, et soit ℓ_1 une période ainsi que $\ell_1 \leq k \leq \ell_2$; alors l'inégalité suivante est **valide** *pour ULS:*

$$s_{\ell_1 - 1} + \sum_{t=\ell_1}^{\ell_2} d_{t\ell_2} y_t \geq d_{\ell_1 \ell_2}.$$

La preuve vient du fait qu'on peut montrer que si on choisit $\ell = \ell_2$ et $S = \{\ell_1, ..., \ell_2\}$, l'inégalité ci-dessus est la même que celle-ci donnée par Théorem 1.

1. Problèmes de distribution
   - Application 1 : distribution à mi-terme
   - Application 2 : routages à court-terms
2. Goodstone: capacités et temps de mise en charge
   - Situation
   - Le modèle
   - Résolution
3. **Planification de la production avec multiples niveaux**
   - Fabrication des meubles rangements
   - Modélisation
   - Résolution
4. Extensions
   - BOM plus général
   - Autres extensions
5. Utilisation des inégalités (ℓ, S)

Le problème

- On assemble et vend des meubles rangements (bilbiothèques, caissons, tiroirs, etc.)
- 78 produits, dont 6 sont à vente ("finals") et les autres sont utilisées dans l'assemblé des autres produits (produits "intermédiaires")
- BOM ("bill-of-materials" = bulletin de matériaux)
- Trois types de familles de produits
  - familles d'une ressource
  - familles d'un temps de mise en charge
  - familles d'un coût de mise en charge
- coûts de stockage

BOM (Bill of Materials = bulletin de matériaux)

Il y a une quantité énorme des applications où un BOM est utilisé.

Le BOM précise, pour chaque produit,

- les produits intermédiaires qui sont nécessaires pour faire sa fabrication;
- la quantité de chacun de ces produits nécessités.

Dans notre exemple, le BOM est d'un genre dit "assemblé" : Chaque produit intermédiare est nécessité par exactement un autre produit.

Trois familles de produits

Des telles aggrégations sont utilisées dans beaucoup d'application pratiques.
Ici, il y a trois famillies de produits :

- Familles d'une ressource : Chaque ressource définit une **capacité limitée** pour les produits impliqués. Ici, une ressource est une machine utilisée dans la production.
- Familles d'un temps de mise en charge : Une telle famille est toujours une sous-famille d'une ressource.
- Familles d'un coût de mise en charge : Elles peuvent avoir *n'importe quelle relation* avec les deux autres types de familles.

Objectif et décisions

L'objectif général : Il s'agit de trouver un plan de production qui minimise les coûts totaux (coûts de stockage plus coûts de mise en charge), tout en répondant à la demande et en respectant les capacités.

Décisions

- quantité de production : x_t^i
- quantité de stock s_t^i

- mise en charges (familles coûts)
- mise en charges (familles temps)

Données

- BOM
- demandes
- coûts
- capacités

Contraintes

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i,t} h^i s_t^i + \sum_{f \in CF} \sum_t c^f z_t^f \\
\text{s.t.} \quad & x_t^i + s_{i,t-1} = d_t^i + s_t^i, \text{ pour chaque bien finale } i, \forall t \\
& x_t^i + s_{i,t-1} = x_t^{\delta(i)} + s_t^i, \text{ pour chaque bien intermédiaire } i, \forall t \\
& \text{(satisfaction de demande, gestion de stock)} \\
& \sum_{i \in Rf} a^{Rf} x_t^i + \sum_{Tf \in TF : Tf \cap Rf \neq \emptyset} ST^{Tf} z_t^{Tf} \leq CAP_{Rf}, \forall Rf \in RF, \forall t \\
& \text{(capacité des ressources)} \\
& x_t^i \leq M_t^i y_t^i, \forall i, t \\
& y_t^i \leq z_t^f, \forall f \in CF \cup TF, \forall i \in f; \forall t \\
& x_t^i, s_t^i \geq 0, \forall i, t; y_t^i \in \{0,1\}, \forall i, t; \\
& \quad z_t^f \in \{0,1\}, \forall f \in CF \cup TF, \forall t
\end{aligned}
$$

Quel valeur faut-il choisir pour M_t^i?

Formulation (cont.)

Pour les produits finals, on peut choisir $M_t^i = d_{t,NT}^i$, pour les raisons qu'on a déjâ consideré.

On peut améliorer cette choix à $M_t^i = \min\{d_{t,NT}^i, \frac{CAP_{R(i)} - ST^{T(i)}}{a^{R(i)}}\}$.

Qu'est-ce qui complique cette décision pour les autres produits?

Pour les autres produits, on est limité à choisir $M_t^i = \frac{CAP_{R(i)} - ST^{T(i)}}{a^{R(i)}}$.

Comment utiliser la structure ULS ici?

On voudrait appliquer les inégalités (ℓ, S):

$$\sum_{t \in S} x_t \leq \sum_{t \in S} d_{t\ell} y_t + s_\ell, \ell = 1, ..., NT; S \subset \{1, ..., \ell\},$$

ou le sous-ensemble de ces inégalités exprimés

$$s_{\ell_1 - 1} + \sum_{t=\ell_1}^{\ell_2} d_{t\ell_2} y_t \geq d_{\ell_1 \ell_2}.$$

Pour les produits finals, pas de problème.
Pour les produits intermédiaires?
On a le **même problème** qu'on avait en **définissant** M_t^i**:** les demandes pour les produits intermédiaires sont 0.

Stock echelon

On définit la demande echelon ainsi:

$$D_t^i = \begin{cases} d_t^i, & \text{pour chaque produit final } i, \forall t \\ D_t^{\delta(i)}, & \text{pour chaque produit intermédiaire } i, \forall t \end{cases}$$

On définit le stock echelon pareillement:

$$E_t^i = \begin{cases} s_t^i, & \text{pour chaque produit final } i, \forall t \\ E_t^{\delta(i)} + s_t^i, & \text{pour chaque produit intermédiaire } i, \forall t \end{cases}$$

Formulation echelon

Si on substitue les nouvelles variables pour les variables originales de stock s_t^i, on obtient ...

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i,t} \tilde{h}^i E_t^i + \sum_{Cf \in CF} \sum_t c^f z_t^f \\
\text{s.t.} \quad & x_t^i + E_{i,t-1} = D_t^i + E_t^i, \forall t, \forall i \\
& x_t^i \leq M_t^i y_t^i, \forall t, \forall i \\
& x_t^i \geq 0, E_t^i \geq 0, y_t^i \in \{0,1\}, \forall t, \forall i \\
& E_t^i - E_t^{\delta(i)} \geq 0, \forall t, \forall i : \delta(i) \neq \emptyset \\
& \sum_{i \in Rf} a^{Rf} x_t^i + \sum_{Tf \in TF : Tf \cap Rf \neq \emptyset} ST^{Tf} z^T f_t \leq CAP_{Rf}, \forall Rf \in RF, \forall t \\
& y_t^i \leq z_t^f, \forall f \in CF \cup TF, \forall i \in f; \forall t \\
& z_t^f \in \{0,1\}, \forall f \in CF \cup TF, \forall t
\end{aligned}
$$

Formulation echelon

Si on substitue les nouvelles variables pour les variables originales de stock s_t^i, on obtient ...

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i,t} \tilde{h}^i E_t^i + \sum_{Cf \in CF} \sum_t c^f z_t^f \\
\text{s.t.} \quad & x_t^i + E_{i,t-1} = D_t^i + E_t^i, \forall t, \forall i \\
& x_t^i \leq M_t^i y_t^i, \forall t, \forall i \\
& x_t^i \geq 0, E_t^i \geq 0, y_t^i \in \{0,1\}, \forall t, \forall i \\
& E_t^i - E_t^{\delta(i)} \geq 0, \forall t, \forall i : \delta(i) \neq \emptyset \\
& \sum_{i \in Rf} a^{Rf} x_t^i + \sum_{Tf \in TF : Tf \cap Rf \neq \emptyset} ST^{Tf} z^T f_t \leq CAP_{Rf}, \forall Rf \in RF, \forall t \\
& y_t^i \leq z_t^f, \forall f \in CF \cup TF, \forall i \in f; \forall t \\
& z_t^f \in \{0,1\}, \forall f \in CF \cup TF, \forall t
\end{aligned}$$

Maintenant on peut trouver bien des sous-modèles du type **ULS**

Si le BOM est plus compliqué

Ensemble de biens qui nécessitent i : $\delta(i)$

Quantité de i nécessité par chaque j dans $\delta(i)$: r^{ij}

Modélisation

On peut modifier légèrement les formules qui définissent les stocks et les demandes echelons:

$$D_t^i = \sum_{j \in \delta(i)} r^{ij} D_t^j, \text{ pour chaque produit intermédiaire } i, \forall t$$

$$E_t^i = \sum_{j \in \delta(i)} r^{ij} E_t^j + s_t^i, \text{ pour chaque produit intermédiaire } i, \forall t$$

Exercises

Les extensions dans les transparents suivants sont conceptualisées comme exercisées.

La capacité de modéliser ces extensions ne serait pas seulement une avantage pour modéliser des situations pratiques, mais aussi une avantage pour l'examen final (par exemple).

Multiples machines, multiples sites

On peut ajouter des indices pour indiquer le lieu de production, de stock, etc.

Par exemple, si on a plusieurs machines dans une usine auxquelles on peut affecter des tâches de production, on peut indiquer ce choix par les variables x^i_{kt} et y^i_{kt} pour chaque machine possible k.

Les contraintes de balance de stock et de capacité deviennent ....

Délai de production/livraison ("lead times")

Considerer une situation où, pour chaque produit i, si on commence à produire une unité de type i pendant un pas de temps, cette unité ne sera disponible (pour satisfaire à la demande, pour) qu'au pas de temps $t + \ell(i)$.

On peut dire que $\ell(i)$ est un délai d'exécution, délai de production, ou un délai de livraison, selon le contexte. On dit simplement "lead time" en anglais (et souvent en français) pour tous ces possibilités...

Modification des contraintes de balance de stock...

Modification des définitions des stocks echelons et demandes echelons:

1. Problèmes de distribution
   - Application 1 : distribution à mi-terme
   - Application 2 : routages à court-terms
2. Goodstone: capacités et temps de mise en charge
   - Situation
   - Le modèle
   - Résolution
3. Planification de la production avec multiples niveaux
   - Fabrication des meubles rangements
   - Modélisation
   - Résolution
4. Extensions
   - BOM plus général
   - Autres extensions
5. Utilisation des inégalités (ℓ, S)

Rappel d'un théorem, présentation d'un autre

Théorem (1)

Dans un problème ULS, soit ℓ une période de temps, et soit S un sous-ensemble des périodes $1, ..., \ell$; alors

$$S \subset \{1, ..., \ell\}.$$

L'inégalité suivante est **valide** *pour ULS:*

$$\sum_{t \in S} x_t \leq \sum_{t \in S} d_{t\ell} y_t + s_\ell.$$

On peut montrer aussi le théorem suivant.

Théorem (2)

Etant donné un problème ULS avec **toutes** *les inégalités (ℓ, S), la solution optimale de la* **relaxation linéaire** *est entière.*

Ça veut dire qu'une fois on a ajouté toutes les inégalités (ℓ, S) à une instance du problème ULS, on peut resoudre la programme entière *sans* "branch-and-bound".

Importance

Pour les problèmes plus compliqués (multiples produits, multiples niveaux, capacités, etc.), il n'y a plus de garantie que l'addition de toutes les inégalités va nous donner une relaxation qui a une solution déjà entiére.

Néanmoins, les résultats de la page precedente garantit que l'utilisation de toutes les inégalités (ℓ, S) donnera la maximum benefice possible de la considération de la structure du modèle ULS.

Alors pourquoi ne pas les ajouter toutes?

Quantité d'inégalités

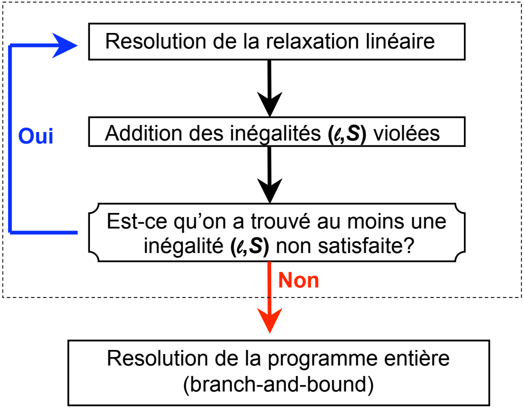
Pour chaque ℓ, il existe une inégalité possible pour chaque $S \subseteq \{1, ..., \ell\}$...

$$\Longrightarrow$$

...il y a environ 2^{NT-1} inégalités possibles.
Les ajouter toutes, ça prendrait en soi autant de temps que resoudre le problème original par "branch-and-bound".

Generation dynamique des inégalités

On ajoutera *dynamiquement* les inégalités (ℓ, S) violées dans un boucle:



Identification des inégalités (ℓ, S) violées

Algorithme ((ℓ, S) séparation)

Etant donnée une solution optimale (x^*, y^*, s^*) *de la* **relaxation linéaire**.
Pour chaque $\ell = 1, ..., NT$ {
  $S := \emptyset$
  Pour chaque $t = 1, ..., \ell$ {
    Si $x_t^* > d_{t\ell} y_t^*$ {
      $t \rightarrow S$
    }
  }
  Si $\sum_{t \in S} x_t^* > \sum_t d_{t\ell} y_t^* + s_\ell^*$ {
    ajouter l'inégalité défini par ℓ *et* S *à la relaxation linéaire.*
  }
}

Pour chaque ℓ, cet algorithme trouve l'inégalité la plus violée du type (ℓ, S).
Après **avoir executé cet algorithme**, on **resoud la relaxation linéaire**.
On **repète ces deux étapes** jusqu'à ce que on ne trouve plus des telles inégalités violées.

Reste à discuter

Qu'est-ce que font les logiciels MRPII/ERP?
Pour quoi sont-ils utiles?
Pour quoi sont-ils non-utiles?

A souvenir

- Modélisation
  - BOM
  - capacités
  - extensions
- Résolution: comment trouver et utiliser la structure des sous-modèles ULS
  - Formulation echelon
  - Inégalités (ℓ, S)
    - Définition: Pourquoi elles sont valides
    - Efficacité: Pourquoi elles aident à la resolution des problèmes de planification de production
    - Utilisation: Comment trouver “bonnes” inégalités à ajouter à la formulation