Sujet 3: Programmation Stochastique – Mésures d'efficacité

MSE3313: Optimisation Stochastiqe

Andrew J. Miller

Dernière mise au jour: October 12, 2011

Dans ce sujet...

1. Mésures d'efficacité
   - Valeur du modèle stochastique
   - L'espérance de la valeur d'information parfaite
2. Exemple illustrative
   - VSM
   - EVPI

1. Mésures d'efficacité
   - Valeur du modèle stochastique
   - L'espérance de la valeur d'information parfaite
2. Exemple illustrative
   - VSM
   - EVPI

Mésures d'efficacité

Il s'agit des mésures quantitatives qui nous aide à savoir l'utilité de bien traiter les éléments stochastiques de notre modèle.
Parmi les plus utilisées sont les deux suivantes :

- la valeur du modèle stochastique : l'espérance de la valeur d'utiliser un modèle stochastique au lieu de la approximation déterministe évidente
- l'espèrance de la valeur d'information parfaite : la différence dans l'objectif qu'on pourrait espérer si on connaissait parfaitement l'avenir; donc, le prix qu'on serait normalement volontiers à payer pour cette connaissance parfaite

1. Mésures d'efficacité
   - Valeur du modèle stochastique
   - L'espérance de la valeur d'information parfaite
2. Exemple illustrative
   - VSM
   - EVPI

Approximation par espèrance

Supposons que, dans la formulation de **SP**, on remplace tous les éléments aléatoires par leurs espérances pour définir une approximation. On appelle cette approximation **MVA**, pour "mean value approximation" (= approximation par valeurs moyennes).
La formulation génerale de **MVA** est

$$
\begin{aligned}
\min_{x,y} \quad & c^T x + \bar{q}^T y \\
\text{s.à.} \quad & Ax = b \\
& \bar{T}x + \bar{W} = \bar{h} \\
& x \in X, y \in Y.
\end{aligned}
$$

où $\bar{q} = \sum_j p^j q(\xi^j)$, $\bar{T} = \sum_j p^j T(\xi^j)$, $\bar{W} = \sum_j p^j W(\xi^j)$, et $\bar{h} = \sum_j p^j h(\xi^j)$.

La valeur du modèle stochastique

Soit $(\bar{x}, \bar{y})$ la solution optimale de **MVA**, et soit $\hat{x}$ la solution optimale de première étape de **SP**.

Alors on définit la quantité *VSM* (pour "value of the stochastic model"), qui est la valeur du modèle stochastique:

$$VSM := c^T \bar{x} + \mathcal{Q}(\bar{x}) - \left(c^T \hat{x} + \mathcal{Q}(\hat{x})\right)$$

Remarquez que $VSM \geq 0$ est toujours vrai. (Pourquoi?)

1. Mésures d'efficacité
   - Valeur du modèle stochastique
   - L'espérance de la valeur d'information parfaite
2. Exemple illustrative
   - VSM
   - EVPI

La valeur d'information parfaite

Pour calculer la valeur d'information parfaite (*EVPI* : "expected value of perfect information"), il faut considerer tous les scenarios possible ... mais chacun séparément.

Si on sait que le scenario ξ^j va certainement arriver, alors on peut considerer le problème

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x,y} & c^T x + q(\xi^j)^T y \\ \text{s.à.} & Ax = b \\ & T(\xi^j)x + W(\xi^j)y = h(\xi^j) \\ & x \in X, y \in Y. \end{array}$$

On appelle ce problème $\mathbf{WS}^j$ (le problème "wait and see" $=$ "attendre et voir" pour scenario ξ^j). Remarquez bien que c'est un problème déterministe.

L'espérance de la valeur d'information parfaite

Problème $\mathbf{WS}^j$:

$$\begin{aligned} \min_{x,y} \quad & c^T x + q(\xi^j)^T y \\ \text{s.à.} \quad & Ax = b \\ & T(\xi^j)x + W(\xi^j)y = h(\xi^j) \\ & x \in X, y \in Y. \end{aligned}$$

Soit $(\tilde{x}^j, \tilde{y}^j)$ la solution optimale de $\mathbf{WS}^j, j = 1, ..., J$.

Soit aussi $\hat{x}$ la solution optimale de première étape de **SP**, et soit $\hat{y}^j$ la solution optimale du problème de recours $Q(\hat{x}, \xi^j), j = 1, ..., J$.

Alors

$$\begin{aligned} EVPI \quad := \quad & \left(c^T \hat{x} + \sum_j p^j Q(\hat{x}, \xi^j) \right) - \sum_j p^j \left(c^T \tilde{x}^j + q(\xi^j)^T \tilde{y}^j \right) \\ = \quad & \sum_j p^j \left[\left(c^T \hat{x} + q(\xi^j)^T \hat{y}^j \right) - \left(c^T \tilde{x}^j + q(\xi^j)^T \tilde{y}^j \right) \right] \end{aligned}$$

L'espérance de la valeur d'information parfaite

$$\begin{aligned} EVPI &:= \left(c^T\hat{x} + \sum_j p^j Q(\hat{x}, \xi^j)\right) - \sum_j p^j \left(c^T\tilde{x}^j + q(\xi^j)^T\tilde{y}^j\right) \\ &= \sum_j p^j \left[\left(c^T\hat{x} + q(\xi^j)^T\hat{y}^j\right) - \left(c^T\tilde{x}^j + q(\xi^j)^T\tilde{y}^j\right)\right] \end{aligned}$$

Remarquez bien que $EVPI \geq 0$ est toujours vrai. (Pourquoi?)

Dérivation analogue : Soit

$$VPI^j := \left(c^T\hat{x} + q(\xi^j)^T\hat{y}^j\right) - \left(c^T\tilde{x}^j + q(\xi^j)^T\tilde{y}^j\right),$$

la valeur d'information parfaite *si on certain que c'est scenario* ξ^j *qui va arriver*.
Remarquez que $VPI^j \geq 0$ est toujours vrai.
Alors on peut exprimer

$$EVPI = \sum_j p^j VPI^j.$$

Utilisation

- Si *VSM* est très petit par rapport à la valeur optimale de **MVA**, il semblerait que le modèle **MVA** serait suffisant pour apporter de l'aide à la décision.

  Par contre, si la différence s'élève à une pourcentage importante de la valeur optimale de **MVA**, il faut conclure que **MVA** n'est pas une approximation suffisament bonne.

- L'interpretation de *EVPI* est un peu plus compliqué. Néanmoins, si *EVPI* est petite relative à la valeur objective de la solution optimale de **SP**, on peut conclure qu'il vaut le coût d'éliminer autant d'incertitude que possible.

  Le "que possible" est important : parfois la possibilité n'existe pas.

- Important : Souvent, *ces deux mésures ne suffisent pas!* Parfois il y a des autres aspects à consider aussi pour déterminer s'il vaut la peine d'utiliser un modèle stochastique.

1. Mésures d'efficacité
   - Valeur du modèle stochastique
   - L'espérance de la valeur d'information parfaite

2. Exemple illustrative
   - VSM
   - EVPI

Installation de capacité : version stochastique:

Rappelons le modèle de l'installation de capacité où on définit 8 scenarios.
Données aléatoires : demande

- $T = 3$; $h_t = 1, \forall t$; $a = 5$; $g_t = 10, \forall t$.
- On suppose que $Pr(d_1 = 4) = \frac{1}{2}$, $Pr(d_1 = 8) = \frac{1}{2}$, $Pr(d_2 = 2) = \frac{1}{2}$, $Pr(d_2 = 6) = \frac{1}{2}$, $Pr(d_3 = 6) = \frac{1}{2}$, $Pr(d_3 = 12) = \frac{1}{2}$.
- On suppose aussi que les demandes des différentes périodes sont indépendantes l'un de l'autre.
- Ça nous donne pour résultat 8 scenarios, chacun avec probabilité $\frac{1}{8}$.

Première étape : niveau de capacité

Deuxième étape : production/stock/urgence

Installation de capacité : fonction de recours

Soit un vecteur d^j de demande et un niveau de capacité x^* choisi dans la première étape.

$$Q(x^*, d^j) = \begin{array}{ll} \min & \sum_t g_t u_t + \sum_t h_t s_t \\ \text{s.à} & z_t + s_{t-1} - s_t + u_t = d_t^j, \forall t \\ & z_t \leq x^*, \forall t \\ & z_t, s_t, u_t \geq 0, \forall t \end{array}$$

La fonction de recours devient

$$\mathcal{Q}(x) = \sum_j p^j Q(x, d^j)$$

Installation de capacité : formulation

Avec cette notation, le problème stochastique devient

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & ax + \mathcal{Q}(x) \\ \text{s.à} & x \geq 0 \end{array}$$

Il vaut la peine de comparer bien la notation de cet exemple avec la formulation générale, repetée ici :

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & c^T x + \mathcal{Q}(x) \\ \text{s.a.} & Ax = b, x \in X. \end{array}$$

Questions à poser

- Qu'est-ce que c'est que la valeur d'utiliser un modèle stochastique?
- Qu'est-ce que c'est que la valeur d'avoir de l'information parfaite?
- Quelles autres propriétés du modèle faut-il considérer?

  (*Est-ce que les propriétés des approximations déterminisites sont bonnes?*)

1. Mésures d'efficacité
   - Valeur du modèle stochastique
   - L'espérance de la valeur d'information parfaite

2. Exemple illustrative
   - VSM
   - EVPI

Approximation déterministe

Remarquez bien que, si on remplace d^j par son *espérance*, dans tous les scenarios, on aura *la version déterministe* du problème qu'on a considéré au début. C'est à dire, l'approximation **MVA** pour ce problème.

Est-ce qu'on aura la même choix optimale de capacité pour le problème stochastique que son approximation déterministe? Notez bien que ce problème est lié à la calculation de *VMS*.

On pourrait poser aussi la question suivante : Est-ce qu'on éviterait à tout prix à utiliser des commandes à urgence, comme dans la version déterministe?
Notez bien que VSM ne nous donnera pas cette information, bien que cela pourrait être important.

Installation de capacité : *VSM*

Pour cette application, la valeur optimale de x pour **MVA** est 7 (et la valeur optimale 37).
La valeur de $\mathcal{Q}(7)$ est 12.5, et donc

$$a7 + \mathcal{Q}(7) = 35 + 13.5 = 48.5$$

Par contre, la valeur optimale de **SP** est 8, et $\mathcal{Q}(8) = 4.5$. Donc la valeur optimale de **SP** est

$$a8 + \mathcal{Q}(8) = 40 + 4.5 = 44.5.$$

Donc $VSM = 4$ pour cette application.

1. Mésures d'efficacité
   - Valeur du modèle stochastique
   - L'espérance de la valeur d'information parfaite

2. Exemple illustrative
   - VSM
   - EVPI

Installation de capacité : VPI^j

Supposons qu'on sait avec certitude que $d = d^8 = [8, 5, 12]$.
Pour ce scenario, $\tilde{x}^8 = 9$ et

$$a\tilde{x}^8 + h\tilde{s}^8 + g\tilde{u}^8 = 48,$$

où $(\tilde{x}^8, \tilde{z}^8, \tilde{s}^8, \tilde{u}^8)$ est la solution optimale de $\mathbf{WS}^8$.
Comme a déja vu, $\hat{x} = 8$ (la solution optimale de **SP**). On voit aussi que $Q(8, d^8) = 22$, et alors

$$a\hat{x} + Q(\hat{x}, d^8) = 62.$$

Alors $VPI^8 = 62 - 48 = 14$.

Installation de capacité : *EVPI*

Attention! Si un scenario différent arrivera, VPI^j changera aussi.

Par example, si on avait l'information parfaite indiquante que le scenario 5 aura lieu ($d = [8, 2, 6]$) la mésure VPI^5 sera 40 - 40 = 0.

Quant à la mésure $EVPI$, c'est

$$\begin{aligned} EVPI &= a\hat{x} + \sum_j p^j Q(\hat{x}, d^j) - \sum_j p^j \left(a\tilde{x}^j + h\tilde{s}^j + g\tilde{u}^j \right) \\ &= \sum_j \frac{1}{8} VPI^j \\ &= 6. \end{aligned}$$

Vous pouvez vérifier que $VPI^1 = 40 - 22 = 18$, $VPI^2 = 44 - 38 = 6$, $VPI^3 = 40 - 30 = 10$, et que $VPI^8 = 0$ pour tous les autres scenarios d^j sauf $j = 8$.

Installation de capacité : une autre considération

Rémarquez bien que, dans n'importe quelle version déterministe, on va éviter à tout prix à faire une commande aux urgences.

Ceci n'est pas vrai pour les modèles stochastiques. Donc c'est possible que, pour cette raison-ci, des approximations déterministes ne sont pas des approximations habiles à utiliser.

Installation de capacité : une version stochastique plus détaillée

Considerez ce qui arrivera si on supposait que la demande arrivait en toujours en quantités pairs, et qu'on travaillait avec tous les scenarios possibles.
Il y aura 36 scenarios totales.
Vous pouvez vérifier les valeurs de *VSM* et *EPVI* avec les fichiers qui se trouvent en ligne.

Exemple 2

Dans nôtre exemple, supposons que l'incertitude se montre dans la quantité de demande.
Les décisions initiales sont les décisions de construction:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_i f_i x_i + \mathcal{Q}(x) \\ & x_i \in \{0,1\}, \forall i \end{aligned}$$

Si on peut définir un ensemble de J scénarios de demandes intéressants, on peut définir $\Omega = \{d^1, ..., d^J\}$, on peut approximer la fonction de recours

$$\mathcal{Q}(x) = \sum_j p^j Q(x, d^j)$$

où

$$Q(x, d^j) = \begin{array}{ll} \min & \sum_{i,k} c_{ik} z_{ik} + \sum_k t_k u_k \\ \text{s.à.} & \sum_i z_{ik} + u_k \geq d_k^j, \forall k \\ & \sum_k z_{ik} \leq Cap_i x_i, \forall i \\ & z_{ik}, \forall i, k; u_k \geq 0, \forall k \end{array}$$

Exemple 2

Pensez bien à comment calculer *VSM* et *EVPI* pour cette application. Quelles formules utiliser, etc.

A souvenir

- *VSM*; y compris
  - **SH**
  - **MVA**
  - Les importances des précédents dans la calculation de *VSM*
- *EVPI*
  - La différence entres les probèmes $\mathbf{WS}^j$ et $Q(\hat{x}, \xi^j)$
  - L'importance de cette différence dans la calculation de VPI^j
  - L'importance des VPI^j dans la calculation de *EVPI*
- Autres considérations (propriétés des modèles)