Sujet 6: Contraintes Probabilistes

MSE3313: Optimisation Stochastique

Andrew J. Miller

Dernière mise à jour: November 8, 2011

Dans ce sujet...

1. Motivation
2. Amélioration de la formulation en variables entières
3. Applications
   - Localisation des dépôts
   - Planification des chirurgies

1. Motivation

2. Amélioration de la formulation en variables entières

3. Applications
   - Localisation des dépôts
   - Planification des chirurgies

Rappel: formulation programmation stochastique

Le problème de recours avec une distribution finie:

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x + \mathcal{Q}(x) \\ \text{s.à.} & Ax = b, x \in X \end{array}$$

où

$$\mathcal{Q}(x) = \sum_j p^j Q(x, \xi^j),$$

l'ensemble X est défini par les bornes et/ou par des spécifications que quelques-un des variables x soient entières, et

$$Q(x,\xi) = \begin{array}{ll} \min & q(\xi)^T y \\ \text{s.à.} & W(\xi)y = h(\xi) - T(\xi)x, y \in Y \end{array}$$

Absence de recours

Parfois, on se trouve en face des situations où

- il n'y a pas de recours quanitfiable;
- il y a des éléments aléatoires dans le probème qui auront une influence sur la réalisabilité d'une solution proposé'
- ces éléments aléatoires se conforme à une **distribution**.

La programmation stochastique n'est pas très bien adapté pour modèliser des telles situations.

Exemple : installation de capacité

Supposons qu'il y a toujours un coût unitaire de a pour chaque unité de capacité installé.

Supposons aussi, par contre, qu'il n'y a pas de coût quantifiable de stockage, et qu'il n'y a pas d'urgence possible.

Le problème est de choisir un niveau de capacité qui permettre de

- pouvoir satisfaire à toutes les demandes, avec une probabilité de $\bar{p}$.
- minimiser le coût de première étape.

Exemple

$$
\begin{array}{ll}
\min\limits_{x} & ax \\
\text{s.à} & x \geq 0, x \in \mathbb{Z} \\
& Pr\left[\begin{array}{rcl} x & \geq & d_1 \\ 2x & \geq & d_1 + d_2 \\ 3x & \geq & d_1 + d_2 + d_3 \end{array}\right] \geq \bar{p}
\end{array}
$$

Contraintes Probabilistes

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x & \\ \text{s.à.} \quad & Ax = b, x \in X & (1) \\ & Pr\left[Tx \geq h(\xi)\right] \geq \bar{p} & (2) \end{aligned}$$

Le système (1) est composé les contraintes dures.

Le système (2) est composé des contraintes probabilistes; il faut les satisfaire avec un probabilité supérieure à $\bar{p}$.
On choisit normalement une haute valeur pour $\bar{p}$ (0.9, 0.95, ou 0.99).
A remarquer:

- Il n'y a pas de recours explicite.
- Il faut satisfaire *toutes les contraintes du système à la fois (**conjointement**)* avec la probabilité $\bar{p}$.
- On suppose que l'incertitude ne paraît que dans la cotê droite des contraintes. (C'est possible a relâcher cette supposition.)

Formulation déterministe équivalente (MIP)

Supposons que la distribution ξ est discrète, et que l'ensemble de scénarios est donné par $\{\xi^1, ..., \xi^{|\Omega|}\}$, où $\Omega = \{1, ..., |\Omega|\}$.

On ajoute des nouvelles variables $\lambda_j, j \in \Omega$; pour chaque $j \in \Omega$, $\lambda_j = 1$ ssi le système de contraintes probabilistes sera satisfait.

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.à.} & Ax = b, x \in X \\ & Tx \geq h(\xi^j)\lambda_j, \forall j \in \Omega \\ & \sum_j p_j \lambda_j \geq \bar{p} \\ & \lambda_j \in \{0, 1\} \end{array}$$

Formulation MIP

Problème: La formulaton est *faible*; même lorsque l'ensemble X est simple, il existe des grands écarts entres les bornes supérieures et inférieures.

Une solution: Essayer des autres formulations non-convexe (pas trop de succès).

Meilleure solution: Améliorer la formulation (voir deuxième partie).

Extension

Dans certaines applications, on peut penser que l'exigeance qu'il satisfaire toutes les contraintes $Tx \geq h(\xi)$ **conjointement** avec la probabilité $\bar{p}$ est trop rigide.

On peut penser à imposer seulement que chaque contrainte doit être satisfaite dans le grand plupart des scénarios, sans imposer que ce grand plupart soit le même ensembles des scénarios pour toutes contraintes.

Plus généralement, on peut diviser le système $Tx \geq h(\xi)$ dans plusieurs systèmes $T^k \geq h^k(\xi), k = 1, ..., K$, où

$$T = \begin{bmatrix} T^1 \\ T^2 \\ \vdots \\ T^K \end{bmatrix} \text{ et } h(\xi) = \begin{bmatrix} h^1(\xi) \\ h^2(\xi) \\ \vdots \\ h^K(\xi) \end{bmatrix},$$

et imposer que $Pr[T^k \geq h^k(\xi)] \geq \bar{p}^k$ pour $k = 1, ..., K$.

1. Motivation

2. Amélioration de la formulation en variables entières

3. Applications
   - Localisation des dépôts
   - Planification des chirurgies

Une contrainte du système $Tx \geq h(\xi^j)$

Il existe un sous-modèle de la forme

$$\sum_i T_{mi} x_i \geq h_m(\xi^j)\lambda_j, \forall j \in \Omega$$
$$\sum_i T_{mi} x_i \geq 0; \lambda_j \in \{0,1\}, \forall j \in \Omega$$

pour chaque ligne (contrainte) m de la matrice T.
On peut utiliser la structure de ce sous-modèle de fortifier la formulation[1].

Notez qu'il est important que la matrice T ne change pas d'un scénario à l'autre. Si T dépend sur j, on peut toujours appliquer les même conceptes, mais cette application devient plus compliquée.

[1] Luedtke, Ahmed, Nemhauser, 2008, "An Integer Programming Approach for Linear Programs with Probabilistic Constraints."

Reformulation d'une contrainte du système $Tx \geq h(\xi^j)$

Définir des variables

$$\delta_{mj} = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda_j = 1 \textbf{ et } h_m(\xi^j) \geq h_m(\xi^{j'}) \text{ pour tout } j' : \lambda_{j'} = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\sum_i T_{mi} x_i \geq \sum_{j \in \Omega} h_m(\xi^j) \delta_{jm}$$

$$\sum_{j \in \Omega} \delta_{jm} = 1$$

$$\lambda_{j'} = \sum_{j \in \Omega : h_m(\xi^{j'}) \leq h_m(\xi^j)} \delta_{jm}$$

$$\sum_i T_{mi} x_i \geq 0; \lambda_j \in \{0,1\}, \forall j \in \Omega; \delta_{mj} \in \{0,1\}, \forall j \in \Omega$$

La relaxation de cette reformulation est beaucoup plus forte.

1. Motivation

2. Amélioration de la formulation en variables entières

3. Applications
   - Localisation des dépôts
   - Planification des chirurgies

1. Motivation

2. Amélioration de la formulation en variables entières

3. Applications
   - Localisation des dépôts
   - Planification des chirurgies

Rappel: formulation stochastique

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_i f_i x_i + \mathcal{Q}(x) \\ & x_i \in \{0,1\}, \forall i \end{array}$$

$\mathcal{Q}(x) = \sum_j p^j Q(x, d^j)$, où

$$Q(x, \mathbf{d^j}) = \begin{array}{ll} \min & \sum_{i,j} c_{ik} z^j_{ik} + \sum_k t_k u^j_k \\ \text{s.à.} & \sum_i z^j_{ik} + u^j_k \geq \mathbf{d^j_k}, \forall k \\ & \sum_k z^j_{ik} \leq Cap_i x_i, \forall i \\ & z^j_{ik} \geq 0, \forall i,k;\ u^j_k \geq 0, \forall k \end{array}$$

Les variables u (les “transports d’urgence”) donnent le modèle la capacité d’éviter d’être trop pessimiste.

Absence de recours

Considerer une situation un peu modifiée.

Pas de recours (pas d'urgence).

Il n'y aura pas des décisions de transports, mais plutôt des décisions d'affections de clients.

Formulation avec contraintes probabilistes

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_i f_i x_i + \sum_{i,k} g_{ik} v_{ik} \\
\text{s.à} \quad & \sum_i v_{ik} \geq 1, \forall k \\
& v_{ik} \in \{0,1\}, \forall i,k; x_i \in \{0,1\}, \forall i \\
& \mathbf{Pr}\left(\sum_k d_k v_{ik} \leq Cap_i x_i, \forall i \right) \geq \mathbf{p}
\end{aligned}$$

Supposons que les scénarios sont indiqués par une ensemble $\Omega = \{1, \ldots, |\Omega|\}$, et que chaque scénario $j \in \Omega$ est défini par une vecteur de demandes d^j.

Comment modéliser les contraintes probablistes?

Formulation avec contraintes probabilistes (2)

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_i f_i x_i + \sum_{i,j} g_{ik} v_{ik} \\
\text{s.à} \quad & \sum_i v_{ik} \geq 1 \forall k \\
& v_{ik} \in \{0,1\}, \forall i,k; x_i \in \{0,1\}, \forall i \\
& \sum_k d_k^j v_{ik} - Cap_i x_i \leq M_j(1-\lambda_j), \forall i, \forall j \\
& \sum_{j \in \Omega} p^j \lambda_j \geq \mathbf{p} \\
& \lambda_j \in \{0,1\}, \forall j \in \Omega
\end{aligned}
$$

1. Motivation

2. Amélioration de la formulation en variables entières

3. Applications
   - Localisation des dépôts
   - Planification des chirurgies

Rappel: formulation programmation stochastique

Première étape:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_i c^f x_i + \sum_j p^j Q([x, y], \mathbf{d^j}) \\
\text{s.t.} \quad & \sum_i y_{ik} = 1, \forall k \\
& y_{ik} \leq x_i, \forall i, k \\
& x_i \in \{0, 1\}, \forall i; y_{ik} \in \{0, 1\}, \forall i, k
\end{aligned}
$$

Pour chaque j, on a le problème de recours:

$$
Q([x, y], \mathbf{d^j}) = \begin{array}{ll} \min & \sum_i c^o o_i^j \\ \text{s.t.} & \sum_k \mathbf{d^j_k} y_{ik} - T x_i \leq o_i^j \\ & o_i^j \geq 0, \forall i \end{array}
$$

Le défi

Ce probème est un peu difficile de modéliser aves les contraintes probabilistes, parce que

- Les variations dans les contraintes se présentent dans les côtés gauches ainsi que dans les côtés droites (pas très en soi grave).
- La forme la plus naturelle des contraintes est $\leq$ et non pas $\geq$. (Ce n'est pas trop grave non plus, mais il nécessite un peu de réflexion.)

Pour pratiquer

Essayez de formuler le problème de planification des chirurgies avec des contraintes probabilistes.

Pour le faire, il faut supprimer les variables o, et modeliser le fait qu'il faut satisfaire le système des contraintes

$$\sum_k d_k y_{ik} \leq T x_i, \forall i$$

avec une très grande probabilité.

A souvenir

- Comparaison des méthodes différents
  - programmation stochastique
  - optimisation robuste
  - programmation avec contraintes probabilistes: à considerer si
    - une distribution est connue; et
    - le recours n'ont pas des grands effets sur les coûts, ou les coûts des décision du recours sont dificils à estimer.
- Le principe des contraintes probabilistes: il faut les satisfaire avec une grande probabilité.
- Formulations MIP
  - Fomulation initiale
    - pourquoi elle est correcte;
    - pourquoi elle est faible
  - Reformulation forte