Sujet 7: Optimisation Robuste

MSE3313: Optimisation Stochastiqe

Andrew J. Miller

Dernière mise au jour: November 16, 2011

Dans ce sujet...

1. Motivation et formulation générale
2. Applications et exemples
   - Installation de capacité
   - Localisation des dépôts
3. Méthodes de resolution : décomposition de Bender

1. Motivation et formulation générale
2. Applications et exemples
   - Installation de capacité
   - Localisation des dépôts
3. Méthodes de resolution : décomposition de Bender

Optimisation stochastique en deux étapes

1. Première étape
2. Résolution d'incertitude
3. Deuxième étape

Avec les outils de la programmation stochasique, on considère explicitement chaque évenement possible.

Inconvénients de la programmation stochastique

- Elle nécessite une distribution.
- Les problèmes deviennent vite très grands et très difficiles.

L'optimisation robuste

Souvent, on a besoin d'un ensemble d'outils qu'on pourrait utiliser dans des situations où

- On connaît quelque chose sur l'incertitude, mais une distribution n'est pas connue;
- on veut une approximation du vrai problème (le problème avec des incertitudes) qui est relativement facile à résoudre.

Il s'agit alors d'une approximation du "vrai probème" stochastique qui est plus simple à définir et à résoudre qu'un programme stochastique, mais qui est une approximation beaucoup meilleure qu'une formulation déterministe.

"Le pire des cas borné"

Le but est de prendre des décisions de première étape ainsi que la solution minimise les coûts totaux qui peuvent arriver dans le pire de tous les cas présents dans un **ensemble d'incertitude borné**.

Normalement on définit cet ensemble d'incertitude ainsi que des événements rares où extrèmes ne sont **pas** impliqués.

Rappel : Programmation avec constraintes probabilistes

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.à.} \quad & Ax = b, x \in X && (1) \\ & Pr\left[Tx \geq h(\xi)\right] \geq \bar{p} && (2) \end{aligned}$$

Le système (3) est composé les contraintes dures.

Le système (2) est composé des contraintes probabilistes; il faut les satisfaire avec un probabilité supérieure à $\bar{p}$.

Optimisation Robuste

$$
\begin{aligned}
\min \quad & c^T x \\
\text{s.à.} \quad & Ax = b, x \in X && (3) \\
& Tx \geq h, \forall (T, h) \in \Omega && (4)
\end{aligned}
$$

Le système (3) est composé les contraintes dures.

Il faut que le système (4) soit satisfait pour tout (T, b) dans l'ensemble d'incertitude Ω.

L'ensemble d'incertitude : incertitude par constrainte

Pour que le système $Tx \geq h$ soit satisfait, il faut que chaque constrainte

$$T_i x \geq h_i$$

soit satisfait, pour tout (T_i, h_i) tel que $(T, h) \in \Omega$.

Cela nous motive à considerer l'ensemble d'incertitude associé à chaque contrainte :

$$T_i x \geq h_i, \forall (T_i, h_i) \in \Omega_i.$$

L'ensemble d'incertitude

Pour une solution $\bar{x}$ donnée,

$$T_i\bar{x} \geq h_i, \forall (T_i, h_i) \in \Omega_i.$$

ssi

$$\begin{aligned} \min \quad & T_i\bar{x} - h_i \\ \text{s.à} \quad & (T_i, h_i) \in \Omega_i \end{aligned}$$

a une solution optimale non-negative.

L'ensemble d'incertitude

Supposition 1. Pour chaque $(T_i, h_i) \in \Omega_i$, il faut que

- $L_{ik} \leq T_{ik} \leq U_{ik}$
- $L'_i \leq h_i \leq U'_i$

Vers une formulation robuste détermiste équivalente

Utilisation de la dualité

1. Motivation et formulation générale
2. Applications et exemples
   - Installation de capacité
   - Localisation des dépôts
3. Méthodes de resolution : décomposition de Bender

Ensemble d'incertitude

Exemple :

$$\Omega = \left\{ d \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} 4 \leq d_1 \leq 8, \\ 2 \leq d_2 \leq 6, \\ 6 \leq d_3 \leq 12 \\ \sum_{t=1}^{3} d_t \leq 19 \end{array} \right\}$$

1. Motivation et formulation générale

2. Applications et exemples
   - Installation de capacité
   - Localisation des dépôts

3. Méthodes de resolution : décomposition de Bender

Formulation avec contraintes probabilistes

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_i f_i x_i + \sum_{i,k} g_{ik} v_{ik} \\
\text{s.à} \quad & \sum_i v_{ik} \geq 1, \forall k \\
& v_{ik} \in \{0,1\}, \forall i,k; x_i \in \{0,1\}, \forall i \\
& \mathbf{Pr}\left(\sum_k d_k v_{ik} \leq Cap_i x_i, \forall i \right) \geq \mathbf{p}
\end{aligned}
$$

Supposons que les scénarios sont indiqués par une ensemble $\Omega = \{1, ..., |\Omega|\}$, et que chaque scénario $j \in \Omega$ est défini par une vecteur de demandes d^j.

Comment modéliser les contraintes probablistes?

1. Motivation et formulation générale

2. Applications et exemples
   - Installation de capacité
   - Localisation des dépôts

3. Méthodes de resolution : décomposition de Bender

Génération dynamique des scénarios

Il s'agit de générer, pour une solution de première étape x, le scénario ω qui maximise la violation des contraintes...

A souvenir

- Comparaison des méthodes différents
  - programmation stochastique
    - minimiser l'espèrance
    - incertitude décrite par une distribution
  - optimisation robuste
    - minimiser le pire des cas
    - incertitude décrite par une ensemble de possibilités
- La "fonctionne d'adversaire": Cela nous permet de minimiser rigoreusement le pire des cas.
- L'interêt du cas oû $R(x, \omega)$ est linéaire
  - Application de dualité pour trouver une formulation déterministe équivalente
  - Les approximations linéaires...
- La décomposition de Bender's pour l'optimisation robuste: comment générer les pires des cas provisoires.

Pour pratiquer

- Trouver une formulation robuste pour l'application de localisation de dépots.
- Trouver des formulations robustes pour des autres applications aussi.