| | | |
|---|---|---|
| université de BORDEAUX<br><br>**DISVE**<br>Pôle Licence | **ANNEE UNIVERSITAIRE 2017/2018**<br>**SESSION 1 DE PRINTEMPS**<br>**PARCOURS**: L3 Mathématiques fondamentales<br>et L3 Ingénierie Mathématique<br>**CODE UE** : M1MA6M11<br>**Epreuve : Probabilités**<br>**Date : 25/04/2018** **Heure : 14h30-17h30 Durée : 3h**<br>*Responsable de l'épreuve*: M. RICHOU<br>*Documents*: Non autorisés. La calculatrice homologuée par l'université est le seul matériel électronique autorisé. | Département DL Licence |

On rappelle que $X$ suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$ si

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{pout tous les } k \in \mathbb{N}.$$

On rappelle également que $Y$ suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$ si $Y$ est une variable aléatoire à densité, de densité

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x).$$

**Exercice 1.**

1. Calculer la fonction génératrice de la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$.
2. Soient $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ deux variables aléatoires indépendantes. Calculer la loi de $X + Y$.
3. Calculer la fonction caractéristique de la variable aléatoire $Z \sim \mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$.
4. Calculer $\mathbb{E}[|Z|^k]$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

**Exercice 2.** On dispose de $n$ urnes numérotées de 1 à $n$ avec $n \geqslant 2$. L'urne numéro $k$ contient $k$ boules rouges et $n - k$ boules blanches. Les deux parties qui suivent sont indépendantes.

1. Dans cette partie on choisit au hasard une des $n$ urnes puis on tire successivement avec remise deux boules de cette urne.
   (a) Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules rouges ?
   (b) Répondre à la même question si le tirage des deux boules s'effectue sans remise.
   (c) En déduire les limites de ces deux probabilités lorsque $n$ tend vers l'infini.
2. Dans cette partie on choisit au hasard une urne, puis on tire avec remise des boules dans cette urne jusqu'à l'obtention d'une boule rouge. On note $X_n$ le numéro de l'urne choisie et $Y_n$ le nombre de boules tirées.
   (a) Calculer la loi du couple $(X_n, Y_n)$.
   (b) Calculer les lois marginales de $X_n$ et $Y_n$.
   (c) Montrer que $(Y_n)_{n\geqslant 2}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on donnera la loi.

**Exercice 3.** Soit $X$ une variable aléatoire positive non nulle, on va montrer l'inégalité de Paley-Zygmund qui dit que pour tout $0 \leqslant t \leqslant 1$,

$$\mathbb{P}(X \geqslant t\mathbb{E}[X]) \geqslant (1-t)^2\frac{(\mathbb{E}[X])^2}{\mathbb{E}[X^2]}.$$

1. Montrer que pour tout $0 \leqslant t \leqslant 1$ on a

$$(1-t)\mathbb{E}[X] \leqslant \mathbb{E}[X\mathbb{1}_{X\geqslant t\mathbb{E}[X]}].$$

2. Montrer à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que
$$(\mathbb{E}[X \mathbb{1}_{X \geqslant t\mathbb{E}[X]}])^2 \leqslant \mathbb{E}[X^2]\mathbb{P}(X \geqslant t\mathbb{E}[X]).$$
3. En déduire l'inégalité de Paley-Zygmund.
4. Si $X$ suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$, montrer que pour tout $0 \leqslant a \leqslant 1/\lambda$ on a
$$\mathbb{P}(X \geqslant a) \geqslant \frac{1}{2}(1 - a\lambda)^2.$$

**Exercice 4.** Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes et de même loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$. Soient $U$ et $V$ les variables aléatoires réelles définies par
$$U = X + Y \quad \text{et} \quad V = \frac{X+Y}{Y}.$$

1. Montrer que la densité de probabilité du couple $(U, V)$ est donnée par
$$f_{(U,V)}(u, v) = \frac{u}{v^2} e^{-u} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(u) \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(v).$$
2. Donner les lois marginales de $U$ et $V$.
3. Les variables aléatoires $U$ et $V$ sont-elles indépendantes ?

**Exercice 5.** Soit $(X, Y)$ un vecteur gaussien centré, avec $\mathbb{E}[X^2] = 4$ et $\mathbb{E}[Y^2] = 1$, et tel que les variables $2X + Y$ et $X - 3Y$ sont indépendantes.

1. Déterminer la matrice de covariance de $(X, Y)$.
2. Est-ce que le vecteur aléatoire $(X, Y)$ est à densité ?
3. Montrer que le vecteur $(X+Y+1, 2X-Y)$ est également gaussien, puis déterminer ses paramètres. Est-ce que $X + Y + 1$ et $2X - Y$ sont indépendantes ?

**Exercice 6.** Soit $(X_n)$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, de densité de probabilité $f$ donnée par
$$f(x) = \begin{cases} \lambda(x-a)(\theta+a-x) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \theta, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
avec $\theta > 0$, $\lambda > 0$ et $a \in \mathbb{R}$ trois paramètres.

1. Montrer que $f$ est une densité si et seulement si $a = 0$ et $\lambda = \frac{6}{\theta^3}$. On garde ces deux valeurs pour toute la suite de l'exercice.
2. Calculer la fonction de répartition de $X_n$.
3. On pose $Y_n = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} X_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la fonction de répartition de $Y_n$ vaut
$$F(t) = 0 \text{ si } t < 0, \quad F(t) = \left(\frac{t^2}{\theta^2} \frac{(3\theta - 2t)}{\theta}\right)^n \text{ si } t \in [0, \theta], \quad F(t) = 1 \text{ si } t \geqslant \theta.$$
4. Montrer que $Y_n$ converge presque sûrement vers $\theta$.
5. Montrer que si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels qui converge vers $x$, alors on a
$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^n = \exp(x).$$
En déduire que
$$\sqrt{n}(\theta - Y_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$$
avec $Z$ une variable aléatoire dont on précisera la loi.