université de BORDEAUX **DISVE** Pôle Licence	**ANNEE UNIVERSITAIRE 2018/2019** **SESSION 1 DE PRINTEMPS** **PARCOURS**: L3 Mathématiques fondamentales, L3 Ingénierie Mathématique et CMI ISI **CODE UE** : M1MA6M11 **Épreuve : Probabilités** **Date : 18/04/2018** **Heure : 14h30-17h30 Durée : 3h** *Responsable de l'épreuve*: M. RICHOU *Documents*: Non autorisés. La calculatrice homologuée par l'université est le seul matériel électronique autorisé.	Département Licence

Exercice 1. Soit $\theta > 0$ et $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 < y < x\}$. Un vecteur aléatoire (X, Y) réel a pour densité

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \theta^2 e^{-\theta x} \mathbb{1}_D(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Calculer les lois marginales de X et de Y.
2. Calculer l'espérance de X.
3. On pose $Z = Y/X$. Montrer que le vecteur aléatoire (X, Z) est à densité et calculer sa densité.
4. En déduire la loi de Z.
5. X et Z sont elles indépendantes ?

Exercice 2. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre $\alpha > 0$ (notée $\mathcal{E}(\alpha)$) dont la densité est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \alpha e^{-\alpha x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x).$$

On pose

$$R_n = \min\{X_1, ..., X_n\}, \quad M_n = \max\{X_1, ..., X_n\}, \quad Z_n = \alpha M_n - \ln(n).$$

1. Calculer la fonction de répartition de la loi $\mathcal{E}(\alpha)$.
2. (a) Calculer $\mathbb{P}(R_n > t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.
   (b) Montrer que R_n suit une loi exponentielle dont on déterminera le paramètre.
   (c) Montrer que $R_n \xrightarrow{n \to +\infty} 0$ p.s.
   (d) Montrer que R_n converge dans L^p pour tout $p \geqslant 1$.
3. (a) Calculer la fonction de répartition de Z_n.
   (b) Montrer que Z_n est une variable aléatoire à densité.
   (c) Montrer que Z_n converge en loi vers une variable aléatoire de fonction de répartition $g(x) = e^{-e^{-x}}$.

Exercice 3. Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi $\mathcal{U}([0, 1])$. On rappelle que cette loi est une loi à densité, de densité donnée par $f(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$. Pour tout $n \geqslant 1$, on considère la variable aléatoire $Y_n = X_n + X_{n+1}$ et on pose

$$T_n = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n}.$$

1. Calculer la fonction caractéristique de X_n. En déduire sa moyenne et sa variance.
2. Calculer la fonction caractéristique de Y_n.

3. Calculer l'espérance et la variance de Y_n et de T_n.

4. Expliquer pourquoi on ne peut pas appliquer la loi faible des grands nombres pour obtenir la convergence en probabilité de T_n lorsque $n \to +\infty$.

5. Montrer que $T_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 4. Soient X, Y et Z trois variables aléatoires telles que

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

1. Donner les lois de X, Y et Z. Sont-elles indépendantes ?

2. Le vecteur (X, Y, Z) possède-t-il une densité ?

3. On pose
$$U = X, \quad V = X + Z - Y, \quad W = Z.$$
Montrer que les variables aléatoires U, V et W sont indépendantes et calculer leur loi.

Exercice 5. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ (notée $\mathcal{E}(\lambda)$) dont la densité est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x).$$

On rappelle que $\mathbb{E}[X_n] = \frac{1}{\lambda}$. Pour $n \geqslant 1$, on pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ et on considère un réel $a > 0$ fixé. Le but de l'exercice est d'étudier $\mathbb{P}(\frac{S_n}{n} - \frac{1}{\lambda} \geqslant a)$.

1. Vers quelle limite $\frac{S_n}{n}$ converge-t-elle presque sûrement ?

2. En déduire que $\mathbb{P}(\frac{S_n}{n} - \frac{1}{\lambda} \geqslant a)$ converge vers 0 lorsque $n \to +\infty$.

3. Montrer que, pour tout $t > 0$,
$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} - \frac{1}{\lambda} \geqslant a\right) = \mathbb{P}(e^{tS_n} \geqslant e^{(\frac{1}{\lambda}+a)nt}).$$

4. Calculer $\mathbb{E}[e^{tS_n}]$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $n \geqslant 1$.

5. Montrer que
$$\mathbb{P}(e^{tS_n} \geqslant e^{(\frac{1}{\lambda}+a)nt}) \leqslant \left(\frac{\lambda}{\lambda - t} e^{-(\frac{1}{\lambda}+a)t}\right)^n, \quad \forall t \in [0, \lambda[.$$

6. En déduire qu'il existe $p \in]0, 1[$ tel que
$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} - \frac{1}{\lambda} \geqslant a\right) \leqslant p^n.$$