Ch 10 : Vecteurs gaussiens

But : ~~définir~~ généraliser la loi gaussienne à des vecteurs.

I] Intro (loi normale)

Déf : Soit $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma^2 > 0$

$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ si X v.a à densité, de densité

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) \quad x \in \mathbb{R}.$$

On définit également

$X \sim \mathcal{N}(m, 0)$ si $X = m$

Prop : Si $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ (avec $\sigma > 0$) alors $\frac{X-m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$

preuve : $Y = \frac{X-m}{\sigma}$ $\quad F_Y(t) = \dots$

Csq : Tout calcul sur la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ $(\sigma > 0)$ se ramène à un calcul sur la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Prop : $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$

- on a bien $\int f_{m,\sigma^2}(x)dx = 1$
- De plus $\mathbb{E}[X] = m$ et $Var(X) = \sigma^2$.

preuve : $\int_{\mathbb{R}} f_{m,\sigma^2}(x)dx \underset{\text{chg}^t \text{ de variable}}{=} \int_{\mathbb{R}} f_{0,1}(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} I$

$$I^2 = \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\frac{(x^2+y^2)}{2}\right)dxdy = \int_{r=0} \int_{\theta=0}^{2\pi} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) r\,dr\,d\theta = 2\pi\left[-e^{-r^2/2}\right]_0^{+\infty}$$

$= 2\pi \quad$ ok.

$X \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$\mathbb{E}[X] = \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{x e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}}_{\text{impair et intégrable}} dx = 0$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_{\mathbb{R}} x^2 \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x \; x e^{-x^2/2} \, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[x\left(-e^{-x^2/2}\right) \right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx = 0 + 1.$$

$\mathrm{Var}(X) = 1$

Si $Y \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ $\quad \frac{Y-m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$ donc en loi $Y \overset{\mathcal{L}}{=} m + \sigma X$

avec $X \sim \mathcal{N}(0,1)$

$\mathbb{E}[Y] = m + \sigma \mathbb{E}[X] = m$

$\mathrm{Var}(Y) = \sigma^2 \mathrm{Var}(X) = \sigma^2$

Prop: $Y \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$

$$\phi_Y(t) = \exp\left(itm - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$$

preuve: $X \sim \mathcal{N}(0,1)$

$\phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$

$$\phi_X'(t) = \mathbb{E}[iX e^{itX}] = \int_{\mathbb{R}} ix e^{itx} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx = \left[i e^{itx} \left(\frac{-e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \right) \right]_{-\infty}^{+\infty} + \int i \cdot it e^{itx} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx$$

$$= -t \, \phi_X(t)$$

ϕ_X solut° équa diff linéaire du premier ordre

$$\phi_X(t) = C e^{-t^2/2} = e^{-t^2/2} \quad \text{car } \phi_X(0) = 1$$

$Y \overset{\mathcal{L}}{=} m + \sigma X$ $\quad \phi_Y(t) = \mathbb{E}[e^{itm + \sigma X}] = e^{itm} \mathbb{E}[e^{it\sigma X}] = e^{itm} \phi_X(\sigma t)$

$$= e^{itm - \sigma^2 t^2/2}$$

Prop: Si $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ et $Y \sim \mathcal{N}(m', \sigma'^2)$ indépendantes

Alors $X + Y \sim \mathcal{N}(m + m', \sigma^2 + \sigma'^2)$

preuve : $\phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t)\,\phi_Y(t)$ ϕ/

II] Vecteurs gaussiens

Déf : Un vecteur aléatoire X de $\mathbb{R}^n$ est dit gaussien si toute combinaison linéaire de ses composantes est une v.a. réelle gaussienne.

$\forall \lambda_1, \dots \lambda_n \in \mathbb{R}^n$, $\sum \lambda_i X_i$ v.a. gaussienne.

Csq : Si $X = (X_1, \dots X_n)$ vecteur gaussien alors chaque X_i est une v.a. gaussienne.

La réciproque est fausse :

Si X_i est une v.a. gaussienne pour tout $1 \leq i \leq n$ alors $(X_1, \dots, X_n)$ n'est pas forcément un vecteur gaussien.

contre ex : $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ $\varepsilon \sim \mathcal{R}(1/2)$ i.e. $P(\varepsilon = 1) = P(\varepsilon = -1) = 1/2$

$Y = \varepsilon X$

on montre que $F_Y(t) = F_X(t)$ donc $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$.

$X+Y$ n'est pas une v.a. gaussienne

car $P(X+Y=0) = P((1+\varepsilon)X = 0) = P(\{X=0\} \cup \{\varepsilon = -1\})$

$= P(\varepsilon = -1) = 1/2$

Donc $X+Y$ pas à densité et pas constante ! donc pas gaussienne.

Prop : Si $X_1, \dots, X_n$ gaussiennes indépendantes alors $(X_1, \dots, X_n)$ est un vecteur gaussien.

Dem : $\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_n X_n$ est bien une loi normale.

Compléments sur les vecteurs aléatoires (~~groupe~~ pas nec. gaussiens)

Soit $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ | \\ X_n \end{pmatrix}$ un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^n$

↳ espérance : $m = \mathbb{E}[X] = \begin{pmatrix} \mathbb{E}[X_1] \\ | \\ \mathbb{E}[X_n] \end{pmatrix}$

↳ Γ matrice de covariance

$$\Gamma = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])(X - \mathbb{E}[X])^T \right] = \mathbb{E}\left[\left((X_i - \mathbb{E}[X_i])(X_j - \mathbb{E}[X_j]) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} Var(X_1) & Cov(X_1, X_2) & \cdots \\ Cov(X_1, X_2) & Var(X_2) & \\ \vdots & & \ddots \\ & & & Var(X_n) \end{pmatrix}$$

$$\Gamma = \mathbb{E}[(X - m)(X - m)^T] = \mathbb{E}[XX^T] - m m^T$$

↳ La fonction caractéristique d'un vecteur est donnée par

$$t \in \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$t = \begin{pmatrix} t_1 \\ | \\ t_n \end{pmatrix} \longrightarrow \mathbb{E}\left[e^{i\langle t, X \rangle}\right] = \mathbb{E}\left[e^{i \sum_{j=1}^{n} t_j X_j}\right]$$

Prop :

La fonction caractéristique ~~caractérise~~ d'un vecteur caractérise sa loi.

Retour aux vecteurs gaussiens

Théorème :

Soit X un vecteur gaussien d'espérance m et de matrice de covariance Γ

Alors $\phi_X(t) = \mathbb{E}[\exp(i\langle t, X\rangle)]$ $\quad (t \in \mathbb{R}^n)$

$$= \exp\left(i\langle t, m\rangle - \frac{1}{2} t^T \Gamma t\right)$$

Csq : La loi d'un vecteur gaussien est caractérisée par son espérance m et sa covariance Γ.

Preuve :

III) Transformations linéaire d'un vecteur gaussien

Prop :

Si X est un vecteur gaussien, alors $Y = AX + B$ avec $A \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{R})$, $B \in \mathbb{R}^p$ est encore un vecteur gaussien.

preuve : Toute combinaison linéaire de Y $\sum \lambda_i Y_i$ est en fait une combinaison linéaire des coordonnées de X ($Y_i = \sum a_{ij} X_j + b_j$) donc est une v.a. gaussienne. $\square$

~~Notation~~ :

$\mathbb{E}[Y] = A\,\mathbb{E}[X] + B$.

$$\Gamma_Y = \mathbb{E}\left[(Y - \mathbb{E}[Y])(Y - \mathbb{E}[Y])^T\right] = \mathbb{E}\left[A(X - \mathbb{E}[X])(X - \mathbb{E}[X])^T A^T\right]$$

$$= A\,\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(X - \mathbb{E}[X])^T]\,A^T = A\Gamma_X A^T.$$

Théorème :

Soit X un vecteur gaussien d'espérance m et de matrice de covariance Γ

Alors $\phi_X(t) = \mathbb{E}[\exp(i\langle t, X\rangle)]$ $\quad t \in \mathbb{R}^n$

$= \exp\left(i\langle t, m\rangle - \frac{1}{2} t^T \Gamma t\right)$

Csq : La loi d'un vecteur gaussien est entièrement caractérisée par son espérance m et sa covariance Γ.

preuve : $t \in \mathbb{R}^n$

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}[\exp(i\langle t, X\rangle)] = \mathbb{E}[\exp(i 1 Y)] = \phi_Y(1)$$

avec $Y = \langle t, X\rangle$

$\langle t, X\rangle = AX + 0$ avec $A = (t_1, \dots t_n) = t^T$

Donc Y vecteur gaussien de dimension 1, donc variable gaussienne,

de espérance $Am = \langle t, m\rangle$

et de variance $A\Gamma_X A^T = t^T \Gamma_X t$

Donc $\phi_Y(u) = \exp\left(iu\langle t, m\rangle - \frac{u^2}{2} t^T \Gamma t\right)$

$u = 1$ donne le résultat $\square$

IV) Indépendance

Prop : Soit X un vecteur gaussien. On a équivalence entre

a) $(X_1, \dots X_n)$ sont indépendantes

b) $(X_1, \dots, X_n)$ sont deux à deux indépendantes

c) ——— non corrélées.

d) la matrice de covariance Γ est diagonale

Dem: a) ⇒ b) ⇒ c) ⇒ d) OK

d) ⇒ a) :

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}[\exp(i\langle t, X\rangle)] = \exp\Big(i\langle t, m\rangle - \frac{1}{2}\underbrace{t^T\Gamma t}_{\sum \sigma_k^2 t_k^2}\Big)$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \exp\Big(i t_k m_k - \frac{1}{2}\sigma_k^2 t_k\Big)$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \phi_{X_k}(t_k)$$ c'est la fct caractéristique du vecteur $(X_1, \dots, X_n)$ avec $X_k \sim \mathcal{N}(m_k, \sigma_k^2)$, et indépendants !

Donc $(X_1, \dots, X_n)$ sont indépendantes.

c/

Faux si X pas vecteur de gaussien

ex: $(X, \varepsilon X)$ $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ $\varepsilon \sim \mathcal{R}(1/2)$

$\mathbb{E}[X] = 0$ $\mathbb{E}[\varepsilon X] = \mathbb{E}[\varepsilon]\mathbb{E}[X] = 0$

$\mathrm{Cov}(X, \varepsilon X) = \mathbb{E}[\varepsilon X^2] = \mathbb{E}[\varepsilon]\mathbb{E}[X^2] = 0$

mais (X, Y) pas indépendants.

ex: $\mathbb{P}(X \in [0,1], Y \in [2,3]) = 0$

$\neq \mathbb{P}(X \in [0,1])\,\mathbb{P}(Y \in [2,3]) > 0$

V) Densité

Prop: Si $Z \sim \mathcal{N}(0, I_n)$

Alors Z à densité et $f_Z(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\|x\|^2\right) \quad x \in \mathbb{R}^n$

Preuve: $Z_1, \dots, Z_n$ indépendants de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Donc $f_Z(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{Z_i}(x_i) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x_1^2 + \dots + x_n^2)\right)$ $\square$

Cas général : X vecteur gaussien, est-ce que X à densité ?

Peut-on se ramener à $Z \sim \mathcal{N}(0, I_n)$?

Dim 1 : ~~...~~ $X \overset{\mathcal{L}}{=} \sigma Z + m = \sqrt{\sigma^2} Z + m$

Dim > 1 ?

Prop: Toute matrice de covariance est symétrique semi-définie positive

Preuve: symétrique ok

$u \in \mathbb{R}^n$, $u^T \Gamma u = \mathbb{E}\left[u^T (X-m)(X-m)^T u\right] = \mathbb{E}\left[\left((X-m)^T u\right)^2\right] \geq 0$ $\square$

Donc Γ ~~diag~~ orthogonalement diagonalisable

$$\Gamma = P D P^T \qquad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \lambda_i \geq 0 \qquad P P^T = I_n$$

Donc $\Gamma = A A^T$ avec $A = P D^{1/2} P^T$ où $D^{1/2} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$

Prop: $X \sim \mathcal{N}(m_X, \Gamma_X)$, $Y \sim \mathcal{N}(0, I_n)$, A telle que $AA^T = \Gamma_X$

alors X et $AZ + m_X$ ont même loi

preuve: $AZ + m_X$ vecteur gaussien de moyenne m_X et de matrice de covariance

$A I_n A^T = \Gamma_X$.

$\square$

Théorème :

Soit X un vecteur gaussien $\mathcal{N}(m, \Gamma)$

Alors X admet une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si Γ est inversible ~~et~~ ~~et~~. On a alors

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det \Gamma}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-m)^T \Gamma^{-1}(x-m)\right)$$

Preuve :

~~on cherche le~~ Il suffit d'étudier $Y = AZ + m_X$ avec $AA^T = \Gamma$ et $Z \sim \mathcal{N}(0, I_n)$

Z a densité. $Y = AZ + m_X$ transformation de Z.

$E = \{Az + m_X, z \in \mathbb{R}^n\}$ sous espace affine de dim rg A.

↳ Si A n'est pas inversible, f n'admet pas de densité

↳ Si A inversible : ϕ :

Soit $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continue bornée

$$\mathbb{E}[h(X)] = \mathbb{E}[h(AZ + m_X)] = \int_{\mathbb{R}^n} h(Az + m_X) \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\Big(-\frac{\overbrace{z_1^2 + \dots + z_n^2}^{\langle z, z\rangle}}{2}\Big) dz_1 \dots dz_n$$

$$\phi : \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ z \mapsto Az + m_X \end{array} \qquad \phi^{-1} : \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ y \mapsto A^{-1}(y - m_X) \end{array}$$

$$\langle z, z \rangle = \langle A^{-1}(y - m_X), A^{-1}(y - m_X) \rangle = (y - m_X)^T \underbrace{(A^{-1})^T A^{-1}}_{= (AA^T)^{-1} = \Gamma^{-1}} (y - m_X)$$

$$\text{Jac } \phi^{-1} = \det(A^{-1}) = (\det \Gamma^{-1})^{1/2} = (\det \Gamma)^{-1/2}$$

$$\mathbb{E}[h(X)] = \int_{\mathbb{R}^n} h(y) \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(y-m)^T \Gamma^{-1}(y-m)\right) \frac{1}{(\det \Gamma)^{1/2}}}_{\text{densité}} dy_1 \dots dy_n$$