Terminal

~~Partiel~~ Correction

Exercice 1

1) Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

$|s| \leq 1$, $G_X(s) = \mathbb{E}[s^X] = \sum_{k=0}^{+\infty} s^k \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{+\infty} s^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

$= e^{-\lambda} e^{s\lambda} = e^{\lambda(s-1)}$

nb: le calcul est valable pour tout $s \in \mathbb{R}$.

2) $G_{X+Y}(s) = G_X(s) G_Y(s)$ $\forall s \in \mathbb{R}$, car X et Y sont indépendantes

$= e^{\lambda(s-1)} e^{\mu(s-1)} = e^{(\lambda+\mu)(s-1)}$

On reconnait la fonction génératrice de la loi $\mathcal{P}(\lambda+\mu)$, donc $X+Y \sim \mathcal{P}(\lambda+\mu)$.

3) $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi_Z(t) = \mathbb{E}[e^{itZ}] = \int_0^{+\infty} e^{itx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \int_0^{+\infty} \lambda e^{(it-\lambda)x} dx$

$= \left[\frac{\lambda}{it-\lambda} e^{(it-\lambda)x} \right]_0^{+\infty} = \frac{\lambda}{\lambda - it}$

car $\lim_{x \to +\infty} |e^{(it-\lambda)x}| = \lim_{x \to +\infty} e^{-\lambda x} = 0$.

4) φ_Z est $\mathcal{C}^\infty$ donc en particulier $\mathbb{E}[Z^k]$ existe pour tout $k \in \mathbb{N}$.

$\varphi_Z^{(k)}(t) = \frac{k! \lambda (i)^k}{(\lambda - it)^{k+1}}$ donc $\varphi_Z^{(k)}(0) = \frac{k! \lambda (i)^k}{\lambda^{k+1}} = \frac{(i)^k k!}{\lambda^k} = (i)^k \mathbb{E}[Z^k]$

Donc $\mathbb{E}[Z^k] = \frac{k!}{\lambda^k}$

Exercice 2:

1) On note les évènements

R_i = " on tire une boule rouge au tirage i "

U_k = " on réalise les tirages dans l'urne k "

a) Avec remise :

$$p_1 = P(R_1 \cap R_2) = \sum_{k=1}^{n} P(R_1 \cap R_2 \mid U_k) P(U_k)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \times \frac{k}{n} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2$$

b) Sans remise :

$$p_2 = P(R_1 \cap R_2) = \sum_{k=1}^{n} P(R_1 \cap R_2 \mid U_k) P(U_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \times \frac{k-1}{n-1} \times \frac{1}{n}$$

c) Pour p_1 on reconnaît une somme de Riemann :

$$p_1 \xrightarrow{n \to +\infty} \int_0^1 x^2 \, dx = \frac{1}{3}$$

$$p_2 = \frac{n}{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \frac{(k-1)}{n} \frac{1}{n} \right) = \underbrace{\frac{n}{n-1}}_{\to 1} \left[\underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2}_{\to \frac{1}{3}} - \underbrace{\frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k}_{= \frac{n(n+1)}{2n^3} \xrightarrow{n \to +\infty} 0} \right]$$

Donc $p_2 \xrightarrow{n \to +\infty} \frac{1}{3}$

2)a) $X_n \in [\![1, n]\!]$ $\qquad Y_n \in \mathbb{N}^*$.

Une fois que l'urne est choisie et vaut k, $Y_n \sim \mathcal{G}\left(\frac{k}{n}\right)$ (loi du premier succès)

$$P(X_n = k, Y_n = r) = \frac{1}{n} \times \frac{k}{n} \times \left(\frac{n-k}{n}\right)^{r-1} \text{ pour } k \in [\![1, n]\!] \text{ et } r \in \mathbb{N}^*.$$

En particulier, si $k = n$ et $r > 1$, la probabilité est nulle.

b) Loi de X_n ? On peut l'obtenir directement :

X_n suit une loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$: $P(X_n=k)=\frac{1}{n}$ pour $k\in[\![1,n]\!]$.

Loi de Y_n ? Loi marginale du couple (X_n,Y_n) :

$$P(Y_n=r)=\sum_{k=1}^{n}P(X_n=k,Y_n=r)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{r-1}$$

Y_n est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ donc il suffit de montrer que $P(Y_n=r)$ converge vers un $P(Y=r)$ lorsque $n\to+\infty$ pour avoir $Y_n\xrightarrow{\mathcal{L}}Y$.

On reconnaît encore une somme de Riemann.

$$P(Y_n=r)\xrightarrow{n\to+\infty}\int_0^1 x(1-x)^{r-1}dx=\left[\frac{-x}{r}(1-x)^r\right]_0^1+\int_0^1\frac{(1-x)^r}{r}dx=\left[-\frac{(1-x)^{r+1}}{r(r+1)}\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{r(r+1)}=\frac{1}{r}-\frac{1}{r+1}.$$

Soit Y v.a. réelle telle que $P(Y=r)=\frac{1}{r}-\frac{1}{r+1}$ $r\in\mathbb{N}^*$.

on a bien $\sum_{r=1}^{+\infty}P(Y=r)=\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{1}{r}-\frac{1}{r+1}=1$ (somme télescopique)

$Y_n\xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}}Y$.

Exercice 3 :

1) $\mathbb{E}[X]=\mathbb{E}[X\mathbb{1}_{X\geq t\mathbb{E}[X]}+X\mathbb{1}_{X<t\mathbb{E}[X]}]=\mathbb{E}[X\mathbb{1}_{X\geq t\mathbb{E}[X]}]+\mathbb{E}[X\mathbb{1}_{X<t\mathbb{E}[X]}]$

et $\mathbb{E}[X\mathbb{1}_{X<t\mathbb{E}[X]}]\leq\mathbb{E}[t\mathbb{E}[X]\mathbb{1}_{X<t\mathbb{E}[X]}]\leq\mathbb{E}[t\mathbb{E}[X]]=t\mathbb{E}[X]$.

2) $\left(\mathbb{E}[X\mathbb{1}_{X\geq t\mathbb{E}[X]}]\right)^2\leq\mathbb{E}[X^2]\,\mathbb{E}[\mathbb{1}^2_{X\geq t\mathbb{E}[X]}]=\mathbb{E}[X^2]\,\mathbb{E}[\mathbb{1}_{X\geq t\mathbb{E}[X]}]$

$\mathbb{1}_{X\geq t\mathbb{E}[X]}$ est une v.a. de Bernoulli de paramètre $P(\mathbb{1}_{X\geq t\mathbb{E}[X]}=1)=P(X\geq t\mathbb{E}[X])$

Donc $\left(\mathbb{E}[X\mathbb{1}_{X\geq t\mathbb{E}[X]}]\right)^2\leq\mathbb{E}[X^2]\,P(X\geq t\mathbb{E}[X])$

3) en utilisant 1) et 2) on a

$$(1-t)^2 \mathbb{E}[X]^2 \leq \mathbb{E}[X \mathbb{1}_{X \geq t\mathbb{E}[X]}]^2 \leq \mathbb{E}[X^2]\, \mathbb{P}(X \geq t\mathbb{E}[X])$$

car $(1-t)\mathbb{E}[X] \geq 0$.

Comme $\mathbb{E}[X^2] > 0$, on a $\mathbb{P}(X \geq t\mathbb{E}[X]) \geq (1-t)^2 \dfrac{(\mathbb{E}[X])^2}{\mathbb{E}[X^2]}$

4) $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$. $\mathbb{E}[X] = \int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx = \dots = \dfrac{1}{\lambda}$ $\quad \mathbb{E}[X^2] = \dots = \dfrac{2}{\lambda^2}$

$\mathbb{P}\left(X \geq \dfrac{t}{\lambda}\right) \geq (1-t)^2 \dfrac{1}{2}$ D'après 3).

On pose $a = \dfrac{t}{\lambda} \in \left[0, \dfrac{1}{\lambda}\right]$

alors $\mathbb{P}(X \geq a) \geq \dfrac{(1-a\lambda)^2}{2}$.

Exercice 4:

Soit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue bornée.

$$\mathbb{E}[h(U,V)] = \mathbb{E}\left[h\left(X+Y, \frac{X+Y}{Y}\right)\right] = \iint_{(\mathbb{R}^{+*})^2} h\left(x+y, \frac{x+y}{y}\right) f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy$$

car (X,Y) est un vecteur à densité car X et Y à densité et indépendantes.

$$\mathbb{E}[h(U,V)] = \iint_{(\mathbb{R}^{+*})^2} h\left(x+y, \frac{x+y}{y}\right) e^{-x} e^{-y}\, dx\, dy$$

Soit $\phi : \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}^{+*} \times]1, +\infty[$

$(x, y) \longmapsto \left(x+y, \dfrac{x+y}{y}\right) = \left(x+y, 1 + \dfrac{x}{y}\right)$

ϕ est $\mathcal{C}^\infty$, $\begin{cases} u = x+y \\ v = \dfrac{x+y}{y} \end{cases} \iff \begin{cases} y = u/v \\ x = u - \dfrac{u}{v} = \dfrac{u(v-1)}{v} \end{cases}$

Donc ϕ inversible et $\phi^{-1} : \mathbb{R}^{+*} \times]1, +\infty[\to \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$

$(u, v) \longmapsto \left(\dfrac{u(v-1)}{v}, \dfrac{u}{v}\right)$

Donc ϕ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

$$\text{Jac}\,\phi^{-1}(u,v) = \begin{vmatrix} 1-\frac{1}{v} & \frac{u}{v^2} \\ \frac{1}{v} & \frac{-u}{v^2} \end{vmatrix} = -\frac{u}{v^2}$$

Le changement de variable nous donne

$$\mathbb{E}[h(U,V)] = \iint_{\mathbb{R}^{+*}\times]1,+\infty[} h(u,v)\frac{u}{v^2} e^{-(u-\frac{u}{v})} e^{-(-u/v)}\,du\,dv$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^{+*}\times]1,+\infty[} h(u,v)\, u e^{-u} \frac{1}{v^2}\,du\,dv$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} h(u,v) \underbrace{\frac{u}{v^2} e^{-u} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^{+*}}(u)\, \mathbb{1}_{]1,+\infty[}(v)}_{g(u,v)}\,du\,dv$$

Donc (U,V) à densité, de densité g.

2) $$f_U(u) = \int_1^{+\infty} f_{(U,V)}(u,v)\,dv = u e^{-u} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(u) \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{v^2}\,dv}_{=\left[\frac{-1}{v}\right]_1^{+\infty} = 1} = u e^{-u} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(u)$$

$$f_V(v) = \int_0^{+\infty} f_{(U,V)}(u,v)\,du = \frac{1}{v^2} \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(v) \underbrace{\int_0^{+\infty} u e^{-u}\,du}_{=\left[-ue^{-u}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-u}\,du = 1}$$

$$= \frac{1}{v^2} \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(v)$$

3) U et V sont indépendantes car $f_{(U,V)}(u,v) = f_U(u)\, f_V(v)$.

Exercice 5 :

1) X et Y sont centrées donc $\mathbb{E}[2X+Y]=\mathbb{E}[X-3Y]=0$

et ainsi $0=\mathrm{Covar}(2X+Y,X-3Y)=\mathbb{E}[(2X+Y)(X-2Y)]=2\mathbb{E}[X^2]-3\mathbb{E}[Y^2]-5\mathbb{E}[XY]$

$$=\underbrace{2\times 4-3\times 1}_{5}-5\mathbb{E}[XY]$$

Donc $\mathbb{E}[XY]=1=\mathrm{Covar}(X,Y)$

Ainsi (X,Y) de matrice de covariance $\begin{pmatrix}4&1\\1&1\end{pmatrix}=\Gamma$

2) $\det\Gamma=4-1=3\neq 0$ donc $\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ est un vecteur à densité.

3) $\begin{pmatrix}U\\V\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X+Y+1\\2X-Y\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}+B$ avec $A=\begin{pmatrix}1&1\\2&-1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}U\\V\end{pmatrix}$ est une transformation affine de $\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ donc c'est un vecteur gaussien.

$\mathbb{E}\left[\begin{pmatrix}U\\V\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ matrice de covariance $\tilde{\Gamma}=A\Gamma A^T=\begin{pmatrix}7&8\\8&13\end{pmatrix}$

$\tilde{\Gamma}$ n'est pas diagonale car U et V ne sont pas indépendantes.

Exercice 6 :

1) f est une densité ssi $\begin{cases} f \text{ positive} \\ \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx=1\end{cases}$

f est positive ssi $a=0$. En effet si $a>0$ $(x-a)(\theta+a-x)<0$ pour x proche de 0

si $a<0$ $(x-a)(\theta+a-x)<0$ ——— θ.

On prend donc $a=0$.

Alors $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \int_0^\theta \lambda x(\theta-x)\,dx = \lambda\left[\frac{x^2\theta}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^\theta = \frac{\lambda\theta^3}{6} = 1$ ssi $\lambda = \frac{6}{\theta^3}$

2) $t\in\mathbb{R}$, $X_n \in [0,\theta]$

donc $F_{X_n}(t) = P(X_n \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t\leq 0 \\ 1 & \text{si } t \geq \theta \end{cases}$

Si $t\in]0,\theta[$, $F_{X_n}(t) = \lambda\int_0^t x(\theta-x)\,dx = \lambda\left[\frac{x^2}{2}\theta-\frac{x^3}{3}\right]_0^t$

$$= \frac{6t^2}{\theta^3}\left(\frac{\theta}{2}-\frac{t}{3}\right) = \frac{t^2}{\theta^2}\,\frac{(3\theta-2t)}{\theta}$$

3) $P(Y_n\leq t) = P\left(\max_{1\leq k\leq n} X_k \leq t\right) = P\left(\bigcap_{k=1}^n \{X_k\leq t\}\right) = \prod_{k=1}^n P(X_k\leq t)$ (indépendance)

$= [F_{X_n}(t)]^n$ (les X_k ont même loi)

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } t<0 \\ 1 & \text{si } t\geq\theta \\ \left(\frac{t^2}{\theta^2}\frac{(3\theta-2t)}{\theta}\right)^n & \text{si } t\in[0,\theta] \end{cases}$$

4) Soit $\varepsilon>0$ quelconque

$P(|Y_n-\theta|\geq\varepsilon) = P(Y_n\leq\theta-\varepsilon)$ car $Y_n\leq\theta$ p.s.

$= F_{Y_n}(\theta-\varepsilon)$

si $\varepsilon\geq\theta$, $F_{Y_n}(\theta-\varepsilon)=0$

Sinon $0<\varepsilon<\theta$, $F_{Y_n}(\theta-\varepsilon) = \left[\left(\frac{\theta-\varepsilon}{\theta}\right)^2\left(\frac{3\theta-2\theta+2\varepsilon}{\theta}\right)\right]^n = \left[\left(1-\frac{\varepsilon}{\theta}\right)^2\left(1+\frac{2\varepsilon}{\theta}\right)\right]^n$

$\left(1-\frac{\varepsilon}{\theta}\right)^2\left(1+\frac{2\varepsilon}{\theta}\right) = 1-\frac{3\varepsilon^2}{\theta^2}+\frac{2\varepsilon^3}{\theta^3} < 1$ pour ε <u>petit</u>.

Donc $\left(1-\frac{\varepsilon}{\theta}\right)^2\left(1+\frac{2\varepsilon}{\theta}\right) < 1$ pour tout $0<\varepsilon<\theta$ par croissance de la fonction de répartition.

Donc $P(|Y_n-\theta|\geq\varepsilon)$ est le terme général d'une série convergente :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(|Y_n-\theta|\geq\varepsilon) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\left(1-\frac{\varepsilon}{\theta}\right)^2\left(1+\frac{2\varepsilon}{\theta}\right)\right]^n = \frac{\left(1-\frac{\varepsilon}{\theta}\right)^2\left(1+\frac{2\varepsilon}{\theta}\right)}{1-\left(1-\frac{\varepsilon}{\theta}\right)^2\left(1+\frac{2\varepsilon}{\theta}\right)} < +\infty.$$

Ainsi $Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} \theta$.

5) $$\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n = \exp\Big(\underbrace{n\underbrace{\log\left(1+\frac{x_n}{n}\right)}_{\underset{+\infty}{\sim}\frac{x_n}{n}}}_{\xrightarrow{n\to+\infty} x}\Big) \quad \text{(pour } n \text{ assez grand)}$$

$$\xrightarrow{n\to+\infty} e^x$$

$Z_n = \sqrt{n}(\theta-Y_n)$

$$F_{Z_n}(t) = P(Z_n\leq t) = P(\sqrt{n}(\theta-Y_n)\leq t) = P\left(Y_n\geq\theta-\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = 1-F_{Y_n}\left(\theta-\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$$

$= 0$ si $t\leq 0$

Si $t>0$, pour n assez grand,

$$F_{Z_n}(t) = 1-\left[\left(\frac{\theta-\frac{t}{\sqrt{n}}}{\theta}\right)^2\frac{\left(3\theta-2\theta+\frac{2t}{\sqrt{n}}\right)}{\theta}\right]^n = 1-\left[\left(1-\frac{t}{\theta\sqrt{n}}\right)^2\left(1+\frac{2t}{\theta\sqrt{n}}\right)\right]^n$$

$$= 1-\Big[1-\frac{3t^2}{\theta^2 n}\underbrace{\left(1+\frac{2t}{3\theta\sqrt{n}}\right)}_{\xrightarrow{n\to+\infty}1}\Big]^n \xrightarrow{n\to+\infty} 1-e^{-3t^2/\theta^2}$$

Donc $Z_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$ v.a. de fonction de répartition $F_Z(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t<0 \\ 1-e^{-3t^2/\theta^2} & \text{si } t\geq 0\end{cases}$

<u>nb</u> : Z est une v.a. à densité car F_Z continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.