Université de Bordeaux
Master 1 MSS — 21/10/2019

CONTRÔLE CONTINU
PROBABILITÉS ET STATISTIQUE

Durée 2h00

EXERCICE I.

Soit $\alpha > 0$ un paramètre. On considère X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que

$$\mathbb{P}(X = k) = C_\alpha e^{-\alpha k}, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

avec C_α une constante positive.

1. Que vaut C_α ?
2. Calculer la fonction caractéristique de X.
3. Calculer l'espérance et la variance de X.
4. On suppose que l'on observe $x_1, ..., x_n$ les tirages de n variables aléatoires $X_1, ..., X_n$ i.i.d. de même loi que X. Pour simplifier, on supposera que $x_1 + \ldots + x_n \neq 0$.

   Donner une estimation du maximum de vraisemblance de α.

   En déduire un estimateur du maximum de vraisemblance de α.

EXERCICE II.

Jeanne et Didier aiment pêcher dans le lac de Cazaux où l'on trouve 50% de truites, 30% de carpes et 20% de brochets. À chaque fois qu'ils pêchent un poisson ils le relâchent à l'eau (après avoir, bien sûr, immortalisé cet instant en prenant un égoportrait avec leur proie).

1. Jeanne décide de pêcher m poissons et Didier n poissons, avec $m, n \in \mathbb{N}^*$ fixés.
   (a) Donner la loi du nombre de poissons pêchés par Didier qui ne sont pas des brochets.

   Dans les prochaines questions, on note X le nombre de carpes pêchées par Jeanne et Y le nombre de carpes pêchées par Didier. On supposera X, Y indépendantes.

   (b) Que vaut $\mathbb{P}(X = 3)$?
   (c) En prenant $n = 50$, calculer $\mathbb{E}[Y]$.
   (d) Quelle est la loi de $X + Y$? Que représente cette variable aléatoire ?
   (e) L'hypothèse d'indépendance de X, Y vous paraît-elle réaliste ?
2. Didier change de stratégie et décide de pêcher jusqu'à ce qu'il attrape un brochet. Donner la loi du nombre de poissons pêchés par Didier.

EXERCICE III.

On considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes de loi $\mathcal{U}([0,1])$. On rappelle que cette loi admet pour densité $f(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$. On définit la fonction

$$\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (xy, y) \end{array} \right.$$

et on pose $(U,V) = \phi(X,Y)$. Remarquons que $\phi(]0,1[\times]0,1[) = \mathcal{D}$ où l'on a défini

$$\mathcal{D} = \left\{ \ (u,v) \in \,]0,1[\times]0,1[\ | \ u < v \ \right\}.$$

1. Quelle est la loi de (X,Y) ?
2. Quelle est la loi de (U,V) ?
3. Donner la loi de U et la loi de V.
4. U et V sont elles indépendantes ?

EXERCICE IV.

Soit $\alpha > 0$ et $\lambda > 0$ deux paramètres. On considère X une variable aléatoire de densité

$$f_{\lambda,\alpha}(x) = C_{\lambda,\alpha} e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,\alpha]}.$$

avec $C_{\lambda,\alpha}$ une constante positive. On observe $x_1, ..., x_n$ les tirages de n variables aléatoires $X_1, ..., X_n$ i.i.d. de même loi que X.

1. Montrer que $C_{\lambda,\alpha} = \dfrac{\lambda}{1 - e^{-\lambda\alpha}}$.
2. Dans cette question, on suppose que λ est fixé et connu.
   Donner une estimation du maximum de vraisemblance de α.
   En déduire un estimateur du maximum de vraisemblance de α.
3. On suppose maintenant que $\alpha = 1/\lambda$. La densité de X devient donc

$$g_\lambda(x) = \frac{\lambda}{1 - e^{-1}} e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,1/\lambda]}.$$

   Donner une estimation du maximum de vraisemblance de λ.
   En déduire un estimateur du maximum de vraisemblance de λ.