MSS

13/12/17

①

Correction partielle de l'examen de Probabilité et statistique

Exercice II

1) $V(\theta) = V(x_1, \dots x_n ; \theta) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{[\theta, \theta+1]}(x_i)$

V est une fonction à valeurs dans $\{0,1\}$.

$V(\theta) = 1$ ssi $\forall i, \begin{cases} \theta \leq x_i \\ \theta \geq x_i - 1 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} \theta \leq \min_{i \in [1,n]} x_i \\ \theta \geq \max_{i \in [1,n]} x_i - 1 \end{cases}$

Donc $V(\theta) = \mathbb{1}_{[\max x_i - 1 ; \min x_i]}(\theta)$

$[\max x_i - 1, \min X_i]$ est non vide et possède une infinité d'éléments dès que $\min X_i > 0$ ou $\max x_i < 1$ ~~qui~~

~~Donc V est maximale en~~ On $\min_{i \in [1,n]} X_i > 0$ et $\max_{i \in [1,n]} X_i < 1$ p.s

Donc V est maximale en une infinité de valeurs θ p.s.

2) X_i à valeurs dans $[\theta, \theta+1]$ donc $Y = X_i - \theta$ à valeurs dans $[0,1]$

Donc $F_Y(t) = P(Y \leq t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ 1 \text{ si } t \geq 1 \end{cases}$

on a $F_{X_i}(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ 1 \text{ si } t \geq 1 \\ t - \theta \text{ si } t \in [\theta, \theta+1] \end{cases}$

Donc pour $t \in [0,1]$,

$$F_Y(t) = P(Y \leq t) = P(X_i - \theta \leq t) = P(X_i \leq t+\theta) = F_{X_i}(t+\theta)$$
$$= t+\theta-\theta = t \quad \text{car } t+\theta \in [\theta, \theta+1]$$

Ainsi Y a même fonction de répartition que la loi $\mathcal{U}([0,1])$: $Y \sim \mathcal{U}([0,1])$

· Si $U \sim \mathcal{U}([0,1])$ $\quad 1-U$ à valeurs dans $[0,1]$

Donc $F_{1-U}(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t<0 \\ 1 \text{ si } t \geq 1 \end{cases}$

Si $t \in [0,1]$, $F_{1-U}(t) = P(1-U \leq t) = P(U \geq 1-t) = 1 - P(U < 1-t)$
$= 1 - P(U \leq 1-t)$ car U v.a. continue
$= 1 - F_U(1-t) = 1-(1-t)$ car $1-t \in [0,1]$
$= t$

Donc U et $1-U$ ont même fonction de répartition : $1-U \sim U \sim \mathcal{U}([0,1])$.

3) On note $U_i = X_i - \theta$. D'après 2) $U_i \sim \mathcal{U}([0,1])$ et les U_i sont i.i.d.

$$\min_{1\leq i\leq n}(X_i) - \theta = \min_{1\leq i\leq n}(X_i - \theta) = \min_{1\leq i\leq n}(U_i)$$

Or $(U_1, \dots U_n)$ a même loi que $(1-U_1, \dots, 1-U_n)$ (même marginales + indépendance)

Donc $\min_{1\leq i\leq n}(U_i) \sim \min_{1\leq i\leq n}(1-U_i) = 1 - \max_{1\leq i\leq n} U_i = 1 - \max_{1\leq i\leq n}(X_i - \theta) = 1+\theta - \max_{1\leq i\leq n} X_i$

4) $\min_{1\leq i\leq n}(X_i - \theta) = \min_{1\leq i\leq n} U_i = M_n$

M_n à valeurs dans $[0,1]$, donc $F_{M_n}(t) = P(M_n \leq t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t<0 \\ 1 \text{ si } t \geq 1 \end{cases}$

Pour $t \in [0,1]$, ③

$$P(\Pi_n \le t) = P(\min_{1\le i\le n} U_i \le t) = 1 - P(\min_{1\le i\le n} U_i > t) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{U_i > t\}\right)$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{n} P(U_i > t) \qquad \text{(indépendance)}$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - P(U_i \le t)) = 1 - (1-t)^n$$

On remarque que F_{Π_n} est continue (on a $F_{\Pi_n}(0^+) = 0$ et $F_{\Pi_n}(1^-) = 1$)

et ~~dérivable~~ $\mathcal{C}^1$ sauf en 0 et 1 a priori.

Donc Π_n est à densité ~~de~~ densité $f(t) = F'_{\Pi_n}(t) = n(1-t)^{n-1} \mathbb{1}_{[0,1]}(t)$.

5/ On peut calculer ~~$\mathbb{E}[\hat{\Theta}_n(t)]$~~

$$\mathbb{E}[\hat{\Theta}_n(t) - \theta] = \mathbb{E}\left[t(\max_{1\le i\le n} X_i - 1 - \theta) + (1-t)(\min X_i - \theta)\right]$$

$$= -t\,\mathbb{E}\left[1 + \theta - \max_{1\le i\le n} X_i\right] + (1-t)\,\mathbb{E}\left[\min X_i - \theta\right]$$

$\min X_i - \theta$ et $1 + \theta - \max X_i$ ont même loi donc même espérance et $\min X_i - \theta > 0$ p.s. donc

$a := \mathbb{E}[\min X_i - \theta] > 0$

Donc $\mathbb{E}[\hat{\Theta}_n(t) - \theta] = -ta + (1-t)a = a - 2ta = 0$ ssi $t = 1/2$ (car $a > 0$).

$\hat{\Theta}_n(t)$ est sans biais ssi $t = 1/2$.

Exercice III :

1) X_r = nb d'essais pour avoir r succès.

Pour obtenir r succès il faut au moins r essais donc X_r à valeurs dans $\{n \in \mathbb{N}^*, n \ge r\}$

nb : en théorie X_r peut aussi prendre la valeur $+\infty$ mais on peut montrer que $P(X_r = +\infty) = 0$.

Soit $n \geq r$, (4)

$X_r = n$ ssi on a $(r-1)$ succès sur les $(n-1)$ premiers lancers et un succès au $n^{ième}$ lancer.

Pour les $(r-1)$ succès sur les $(n-1)$ premiers lancers, on retrouve une loi binomiale :

Si $Y =$ nb de succès sur les $(n-1)$ premiers lancers, alors $Y \sim \mathcal{B}(n-1, p)$

Donc $P(X_r = n) = P(Y = r-1$ et succès au $n^{ième}$ lancer$)$

$$= \binom{n-1}{r-1} p^{r-1}(1-p)^{n-1-(r-1)} \times p \quad \text{par indépendance}$$

$$= \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r}$$

2) $\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$ si $|x| < 1$ donc c'est une série entière de rayon de convergence

$R = 1$. Elle est $\mathcal{C}^\infty$ sur le disque ouvert de convergence $\{x \in \mathbb{C}, |x| < 1\}$

et $\forall r-1 \in \mathbb{N}$ $(r \in \mathbb{N}^*)$,

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(r-1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} (x^{n-1})^{(r-1)} = \sum_{n=r}^{+\infty} (n-1)\dots(n-r+1)\, x^{n-r}$$

De plus $\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$, $\left(\frac{1}{1-x}\right)'' = \frac{2}{(1-x)^3}$ et par une récurrence simple,

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(r-1)} = (r-1)! \left(\frac{1}{1-x}\right)^r$$

3) $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_{X_r}(t) = \mathbb{E}[e^{itX_r}] = \sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n-1}{r-1} p^r \underbrace{(1-p)^{n-r}}_{(1-p)^{n-r}} e^{itn}$

$$= p^r \frac{e^{itr}}{(r-1)!} \sum_{n=r}^{+\infty} (n-1)\dots(n-r+1)\, e^{it(n-r)} = p^r \frac{e^{itr}}{(r-1)!} \frac{(r-1)!}{\left(1-(1-p)e^{it}\right)^r}$$

d'après 2)

$$= \left(\frac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}\right)^r$$

4) Par définition $X_1 \sim \mathcal{G}(p)$

$X_2 - X_1$ représente le nombre de lancers nécessaires pour obtenir un succès

de plus $X_2 - X_1$ est indépendant de X_1 car les lancers sont indépendants.

Donc $X_2 - X_1 \sim \mathcal{G}(p)$ et $X_2 - X_1$, X_1 indépendants.

De même, $\forall k \geq 2$, $X_k - X_{k-1} \sim \mathcal{G}(p)$ et $X_k - X_{k-1}$ indépendant de $X_1, X_2, \dots X_{k-1}$.

en particulier
$$X_r = \underbrace{X_r - X_{r-1}}_{\sim \mathcal{G}(p)} + \underbrace{X_{r-1} - X_{r-2}}_{\sim \mathcal{G}(p)} + \dots + \underbrace{X_2 - X_1}_{\sim \mathcal{G}(p)} + \underbrace{X_1}_{\sim \mathcal{G}(p)}$$

et les variables sont indépendantes.

Or $(X_r - X_{r-1}, \dots X_2 - X_1, X_1) \sim (Y_1, \dots Y_r)$ Donc $Y_1 + \dots + Y_r \sim X_r$.

5) $\mathbb{E}[X_r] = \mathbb{E}[Y_1 + \dots + Y_r] = r\,\mathbb{E}[Y_1] = \frac{r}{p}$ car $Y_1 \sim \mathcal{G}(p)$ et Y_i de même loi.

$$\mathrm{Var}(X_r) = \mathrm{Var}(Y_1 + \dots + Y_r) = r\,\mathrm{Var}(Y_1) \quad \text{car } Y_i \text{ iid.}$$
$$= \frac{r(1-p)}{p^2} \quad \text{car } Y_1 \sim \mathcal{G}(p).$$

$$\varphi_{X_r}(t) = \varphi_{Y_1}(t)\varphi_{Y_2}(t) \dots \varphi_{Y_r}(t) \quad \text{(indépendance)}$$
$$= \left(\varphi_{Y_1}(t)\right)^r \quad \text{(même loi)}$$
$$= \left(\frac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}\right)^r \quad \text{car } Y_1 \sim \mathcal{G}(p).$$

(6)

$$\varphi_{X_r-r}(t) = \mathbb{E}\left[e^{itX_r}e^{-itr}\right] = e^{-itr}\varphi_{X_r}(t) = e^{-itr}\frac{p^r e^{itr}}{(1-(1-p)e^{it})^r}$$

$$= \frac{p^r}{(1-(1-p)e^{it})^r} \qquad p = \frac{r}{\lambda+r} \to 1$$

$$p^r = \left(\frac{r}{\lambda+r}\right)^r = \left(1-\frac{\lambda}{\lambda+r}\right)^r = \exp\left(r\log\left(1-\frac{\lambda}{\lambda+r}\right)\right) \xrightarrow{r\to+\infty} e^{-\lambda}$$

$$(1-(1-p)e^{it})^r = \left(1-\frac{\lambda e^{it}}{\lambda+r}\right)^r = \exp\left(r\log\left(1-\frac{\lambda e^{it}}{\lambda+r}\right)\right) \xrightarrow{r\to+\infty} e^{-\lambda e^{it}}$$

Donc $\varphi_{X_r-r}(t) \to e^{\lambda(e^{it}-1)}$ fonction caractéristique de la loi $\mathcal{P}(\lambda)$.

$$X_r - r \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{P}(\lambda).$$

7) $V(x;p) = \mathbb{P}_p(X_r = x) = \binom{x-1}{r-1}p^r(1-p)^{x-r}$ fonction de p $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,1[$.

$$\frac{\partial V}{\partial p}(p) = \binom{x-1}{r-1}p^{(r-1)}(1-p)^{x-r-1}\left[r(1-p)-(x-r)p\right] = \binom{x-1}{r-1}p^{r-1}(1-p)^{x-r-1}(r-xp)$$

$\frac{\partial V(p)}{\partial p} = 0$ si $p = p^* = \frac{r}{x}$. De plus $\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}(p^*) = \binom{x-1}{r-1}(p^*)^{r-1}(1-p^*)^{x-r-1}(-x) < 0$

Donc $\boxed{\hat{p}_r = \frac{r}{X_r}}$ (le maximum local est un maximum global par un argument de compacité)

(nb: il était plus simple de passer au log....)

8) $\ln V(X_r;p) = \ln\binom{x-1}{r-1} + r\ln p + (X_r - r)\ln(1-p)$

$$\frac{\partial \ln V(X_r;p)}{\partial p} = \frac{r}{p} + \frac{(X_r-r)}{1-p} \qquad \frac{\partial^2 \ln V(X_r;r)}{\partial r^2} = -\frac{r}{p^2} - \frac{(X_r-r)}{(1-p)^2}$$

$$I(p) = -\mathbb{E}_p\left[-\frac{r}{p^2} - \frac{(X_r - r)}{(1-p)^2}\right] = \frac{r}{p^2} - \frac{(r/p - r)}{(1-p)^2} = \frac{r}{p^2} + \frac{r(1-p)}{p(1-p)^2}$$

$$= \frac{r}{p^2} + \frac{r}{(1-p)p} = \frac{r}{(1-p)\,p^2}$$

9) ~~X_r~~ $\frac{X_r}{r} = \frac{X_r - X_{r-1} + X_{r-1} - X_{r-2} + \dots + X_2 - X_1 + X_1}{r} = \frac{\sum_{k=1}^{r} X_k - X_{k-1}}{r}$

avec $X_0 = 0$

les v.a. $(X_k - X_{k-1})_k$ sont iid de loi $\mathcal{G}(p)$.

Donc, d'après la loi forte des grands nombres, $\frac{X_r}{r} \xrightarrow[r \to +\infty]{p.s.} \mathbb{E}[X_1] = \frac{1}{p}$

Donc $\frac{r}{X_r} \xrightarrow[r \to +\infty]{p.s.} p$. et donc $\hat{p}_r$ est fortement convergent/consistant.