	ANNEE UNIVERSITAIRE 2018/2019 **EXAMEN FINAL : SESSION 1** **Parcours : M1 MSS Code UE : 4TMS706U** **Épreuve : Probabilités et Statistique** **Date : 17/12/18 Heure : 14h Durée : 3h** **Documents :** non autorisés **Calculatrice :** non autorisée Épreuve de MM. LECLAIRE et RICHOU	**Collège Sciences et Technologies**

Exercice 1

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles.
On suppose que pour tout $n \geqslant 1$, X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $p_n \in \,]0,1[$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur p_n pour que l'on ait $X_n \to 0$ en probabilité.
2. Dans cette question, on suppose les X_n indépendantes.
   Donner une condition nécessaire et suffisante sur p_n pour que l'on ait $X_n \to 0$ p.s.
3. Soit $p \in [1,\infty[$.
   Donner une condition nécessaire et suffisante sur p_n pour que l'on ait $nX_n \to 0$ dans L^p.

Exercice 2

On considère un vecteur gaussien

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \right) .$$

1. Est-ce que X et Z sont indépendantes ? Est-ce que X et Y sont indépendantes ?
2. Donner la loi de $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$.
3. Montrer que $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ admet une densité, et la calculer.
4. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a^2 + b^2 = 1$. Posons $U = aX + bY$ et $V = -bX + aY$.
   Donner la loi de $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$.

Exercice 3

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes. On suppose que pour tout $n \geqslant 1$, X_n suit la loi géométrique de paramètre $p \in \,]0,1[$. On rappelle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\mathbb{P}(X_n = k) = p(1-p)^{k-1}.$$

On pose $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$.

1. Montrer que la fonction génératrice de X_n s'écrit

$$G_{X_n}(z) = \frac{pz}{1-(1-p)z} \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| < \frac{1}{1-p}\ .$$

2. En déduire que

$$\mathbb{E}[X_n] = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \mathrm{Var}(X_n) = \frac{1-p}{p^2}.$$

3. On suppose dans la suite que $p \geqslant \frac{1}{2}$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ on a

$$\mathbb{P}\left(\left|\bar{X}_n - \frac{1}{p}\right| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{2}{n\varepsilon^2}.$$

4. En déduire un intervalle de confiance de niveau $0,98$ pour le paramètre p.

Problème

La loi de Pareto de paramètres $a > 0$ et $s > 0$ a pour densité $x \mapsto \dfrac{sa^s}{x^{s+1}}\mathbf{1}_{x>a}$.
Ce problème porte sur l'estimation des paramètres de la loi de Pareto.
Les deux parties du problème sont indépendantes.

Partie A

On suppose ici que $a = 1$ et on cherche à estimer s. On considère donc le modèle statistique $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta>0}$ où $\mathbb{P}_\theta$ est la loi de probabilité sur $\mathbb{R}$ admettant pour densité

$$f_\theta(x) = \frac{\theta}{x^{\theta+1}}\mathbf{1}_{x>1}\ .$$

On se donne aussi un n-échantillon $(X_1,\dots,X_n)$ de loi $\mathbb{P}_\theta$.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Calculer $\mathbb{E}_\theta[X^\alpha]$, en précisant les valeurs de α pour lesquelles $\mathbb{E}_\theta[X^\alpha] < \infty$.
2. Construire un estimateur $\hat{\theta}_n$ de θ par la méthode des moments.
3. Est-ce que $\hat{\theta}_n$ est fortement consistant ?

Dans la suite de cette partie A, on suppose $\theta > 2$.

4. Montrer que $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ est un estimateur sans biais de $\dfrac{\theta}{\theta - 1}$.

   Calculer son risque quadratique.

5. Montrer que $Z_n = \sqrt{n}\Big(\overline{X}_n - \dfrac{\theta}{\theta-1}\Big)$ converge en loi, en précisant la limite.

6. On admettra que le modèle $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta>0}$ est régulier.

   a) Calculer $\mathbb{E}_\theta[\ln(X)]$ et $\mathrm{Var}_\theta[\ln(X)]$.

   b) Calculer l'information de Fisher $I(\theta)$ associée à ce modèle statistique.

   c) En déduire l'information de Fisher $I_n(\theta)$ associée au n-échantillon $(X_1, \dots, X_n)$.

7. Est-ce que $\overline{X}_n$ est un estimateur efficace de $\dfrac{\theta}{\theta-1}$?

Partie B

On suppose ici que $s = 1$ et on cherche à estimer a. On considère donc le modèle statistique $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta>0}$ où $\mathbb{P}_\theta$ est la loi de probabilité sur $\mathbb{R}$ admettant pour densité

$$g_\theta(x) = \frac{\theta}{x^2}\mathbf{1}_{x>\theta} \ .$$

On se donne aussi un n-échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ de loi $\mathbb{P}_\theta$.

1. Montrer que l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ est donné par

$$\hat{\theta}_n = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} X_i \ .$$

2. Calculer la fonction de répartition de $\hat{\theta}_n$.

3. Montrer que $T_n = \dfrac{n(\hat{\theta}_n - \theta)}{\theta}$ converge en loi vers une loi exponentielle de paramètre 1.

4. En déduire un intervalle de confiance asymptotique sur θ de niveau $1 - \alpha$.