CHAPITRE 2 : CLASSES COMMUNIQUANTES, RÉCURRENCE, TRANSIENCE

ADRIEN RICHOU

Master MSS Bordeaux

1. Classes communiquantes

Soit $(X_n)_n$ une chaîne de Markov (homogène) de matrice de transition P sur un espace d'états discret E. Dans ce chapitre, on notera également par $P_{i,j}$ le coefficient (i,j) de la matrice P.

Définition 1.1. Soit $i, j \in E$. On dit que i **conduit** à j (ou que j est accessible/atteignable depuis i) s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $P^n_{i,j} > 0$. On note $i \longrightarrow j$.

Remarque 1.2. Par convention, $P^0 = I_E$ dons pour tout $i \in E$, $P^0_{i,i} = 1$. On a donc toujours $i \longrightarrow i$.

Exercice 1.3. Soit $i \neq j$, $i, j \in E$. Montrer que $i \longrightarrow j$ si et seulement si il existe un chemin allant de i à j dans le graphe orienté associé à P.

Définition 1.4. On dit que i et j **communiquent** si $i \longrightarrow j$ et $j \longrightarrow i$. On note $i \longleftrightarrow j$.

Proposition 1.5. *Si $i \longrightarrow j$ et $j \longrightarrow k$ alors $i \longrightarrow k$.*

Démonstration. Par hypothèse, il existe $n, m \geq 0$ tels que $P^n_{i,j} > 0$ et $P^m_{j,k} > 0$. On a alors

$$P^{n+m}_{i,k} = \sum_{l \in E} P^n_{i,l} P^m_{l,k} = P^n_{i,j} P^m_{j,k} + \sum_{l \in E, l \neq j} P^n_{i,l} P^m_{l,k} > 0.$$

Donc on a bien $i \longrightarrow k$. □

Proposition 1.6. $\longleftrightarrow$ *est une relation d'équivalence.*

Démonstration.
- Réflexivité : on a bien $i \longleftrightarrow i$ pour tout $i \in E$.
- Symétrie : si $i \longleftrightarrow j$ on a bien évidemment $j \longleftrightarrow i$.
- Transitivité : si $i \longleftrightarrow j$ et $j \longleftrightarrow k$ on a alors $i \longleftrightarrow k$ d'après la proposition précédente. □

Définitions 1.7.
- Les classes d'équivalence pour la relation $\longleftrightarrow$ sont appelées **classes communiquantes**.
- La matrice P est dite **irréductible** si elle n'admet qu'une classe communiquante.

Définitions 1.8.

— Une classe $\mathcal{C}$ est dite **fermée** (ou **close**) si : $\begin{cases} i \in \mathcal{C} \\ i \longrightarrow j \end{cases} \Rightarrow j \in \mathcal{C}$.

— Un état i est dit **absorbant** si $\{i\}$ est une classe fermée.

— un état i est dit **de non retour** si pour tout $n \geq 1$, $Q^n_{i,i} = 0$.

Exemple 1.9. Déterminer les classes communiquantes pour la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque 1.10. Il existe trois types de classe singleton :

— absorbant,

— de non retour,

— un état où on peut rester sur place mais dès qu'on en part c'est pour de bon.

2. Récurrence et transience

Notation-Définition 2.1. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov à valeurs dans E. Soit $i \in E$, on note

$$N_i = N_i(X) = \text{card}\{n \geq 0, X_n = i\}$$

le **nombre de passages** de la chaîne en i. On définit les **instants successifs de passage** en i par

$$\tau_i = \tau_i^1 = \tau_i^1(X) = \inf\{p > 0, X_p = i\}$$

et pour $n \geq 2$, si $\tau_i^{n-1} < +\infty$,

$$\tau_i^n = \tau_i^n(X) = \inf\{p > \tau_i^{n-1}, X_p = i\}.$$

De plus on note, avec $\tau_i^0 = 0$,

$$\forall n \geq 1, S_i^n = \begin{cases} \tau_i^n - \tau_i^{n-1} \text{ si } \tau_i^{n-1} < \infty, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Enfin, on note $\mathbb{E}_i$ l'espérance sous $\mathbb{P}_i$.

Remarque 2.2. Les τ_i^n, $i \in E$, $n \geq 1$, sont des temps d'arrêt par rapport à $\mathcal{F}_n$.

Définition 2.3. Un point i de E est dit **récurrent** pour la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $\mathbb{P}_i(N_i = \infty) = 1$. Il est dit **transient** si $\mathbb{P}_i(N_i = \infty) = 0$.

Lemme 2.4. *Pour $r \geq 1$, S_i^r est indépendant de la tribu $\mathcal{F}_{\tau_i^{r-1}}$ (tribu des événements antérieurs au temps d'arrêt τ_i^{r-1}) et conditionnellement à $\tau_i^{r-1} < \infty$, S_i^r a même loi que τ_i,*

$$\mathbb{P}(S_i^r = n | \tau_i^{r-1} < \infty) = \mathbb{P}_i(\tau_i = n).$$

Démonstration. Appliquons la propriété de Markov forte au temps d'arrêt $\tau = \tau_i^{r-1}$. Sous $\tau < \infty$ on a automatiquement $X_\tau = i$. Donc conditionnellement à $\tau < \infty$, $(X_{\tau+n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov de paramètre (δ_i, P) et est indépendante de $X_0, \dots, X_\tau$. De plus,

$$S_i^r = \inf\{n \geq 1, X_{\tau+n} = i\},$$

donc S_i^r est le temps de premier passage de $(X_{\tau+n})_{n\in\mathbb{N}}$ en i. □

Lemme 2.5. *Soit $f_i = \mathbb{P}_i(\tau_i < \infty)$ la probabilité de retour en i. Alors*

$$\forall r \in \mathbb{N}, \mathbb{P}_i(N_i > r) = f_i^r.$$

De plus, si $f_i = 1$, on a $\mathbb{P}_i(N_i = +\infty) = 1$. Et si $f_i < 1$, sous $\mathbb{P}_i$, la variable aléatoire N_i est une loi géométrique de paramètre $1 - f_i$.

Démonstration. Observons tout d'abord que si $X_0 = i$ alors $N_i > r \iff \tau_i^r < \infty$. Montrons le lemme par récurrence sur r.

— Soit $r = 1$. Partant de i, le nombre N_i de fois où on visite l'état i au cours de la trajectoire est superieur ou égal à 2 si et seulement si le temps τ_i de premier retour en i est fini. D'où :

$$\mathbb{P}_i(N_i > 1) = \mathbb{P}_i(\tau_i < \infty) = f_i.$$

— Supposons le résultat vérifié pour $r \geq 1$. Comme précedemment, le nombre N_i de fois où on visite l'état i est superieur ou égal à r+2 si et seulement si le temps τ_i^{r+1} de r+1 ème retour en i est fini. On en déduit :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_i(N_i > r+1) &= \mathbb{P}_i(\tau_i^{r+1} < \infty),\\ &= \mathbb{P}_i(\tau_i^r < \infty, S_i^{r+1} < \infty),\\ &= \mathbb{P}_i(S_i^{r+1} < \infty | \tau_i^r < \infty)\mathbb{P}_i(\tau_i^r < \infty),\\ &= f_i f_i^r \text{ d'après le lemme précédent},\\ &= f_i^{r+1}.\end{aligned}$$

On a donc le résultat souhaité pour tout r. Maintenant si $f_i := \mathbb{P}_i(\tau_i < \infty) = 1$ alors $\mathbb{P}_i(N_i = \infty) = \lim_{r\to\infty} \mathbb{P}_i(N_i > r) = 1$. Et si $f_i < 1$, alors pour $r \geq 1$

$$\mathbb{P}_i(N_i = r) = \mathbb{P}_i(N_i > r-1) - \mathbb{P}_i(N_i > r) = f_i^{r-1}(1 - f_i).$$

□

Le théorème suivant fournit un premier critère de récurrence et transience plus maniable que la définition de la récurrence et de la transience.

Théorème 2.6.

(1) L'état i est récurrent si seulement si $\mathbb{P}_i(\tau_i < \infty) = 1$.

(2) L'état i est transient si et seulement si $\mathbb{P}_i(\tau_i < \infty) < 1$.

En particulier tout état est récurrent ou transient.

Démonstration. Il suffit de montrer que si $\mathbb{P}_i(\tau_i < \infty) = 1$ alors i est récurrent et si $\mathbb{P}_i(\tau_i < \infty) < 1$ alors i est transient.

— Supposons $\mathbb{P}_i(\tau_i < \infty) = 1$ alors $\mathbb{P}_i(N_i = \infty) = \lim_{r\to\infty} \mathbb{P}_i(N_i > r) = 1$ donc i est récurrent.
— Supposons $\mathbb{P}_i(\tau_i < \infty) < 1$ alors $\mathbb{P}_i(N_i = \infty) = \lim_{r\to\infty} \mathbb{P}_i(N_i > r) = 0$ donc i est transient.

□

On déduit maintenant un deuxième critère de récurrence et de transience.

Théorème 2.7.
(1) L'état i est récurrent si seulement si $\sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^n = +\infty$.
(2) L'état i est transient si et seulement si $\sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^n < +\infty$.

Ce théorème se démontre à partir du lemme suivant :

Lemme 2.8. *On a $\mathbb{E}_i(N_i) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^n$.*

Démonstration.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_i(N_i) = \mathbb{E}_i\left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{X_n=i\}}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}_i\left(\mathbf{1}_{\{X_n=i\}}\right) \text{ par Fubini-Tonelli,}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_i(X_n = i) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^n.\end{aligned}$$

□

Démonstration du théorème . D'après ce qui précède, il nous suffit de montrer que si $\mathbb{P}_i(\tau_i < \infty) = 1$ alors $\sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^n = +\infty$ et si $\mathbb{P}_i(\tau_i < \infty) < 1$ alors $\sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^n < +\infty$.
— Supposons $\mathbb{P}_i(\tau_i < \infty) = 1$ alors $\mathbb{P}_i(N_i = \infty) = 1$ et $\sum_{n\geq 0} P_{i,i}^n = \mathbb{E}_i[N_i] = +\infty$.
— Supposons $\mathbb{P}_i(\tau_i < \infty) < 1$ alors $\sum_{n\geq 0} P_{i,i}^n = \mathbb{E}_i[N_i] = \frac{1}{1-f_i} < \infty$, car $N_i \sim \mathcal{G}(1 - f_i)$.

□

Corollaire 2.9. *Soit i un point de E. Alors*

$$\mathbb{P}_i(N_i = \infty) = 1 \iff \mathbb{P}_i(N_i = \infty) > 0,$$

$$\mathbb{P}_i(N_i = \infty) < 1 \iff \mathbb{P}_i(N_i = \infty) = 0.$$

3. Structure de classe

Théorème 3.1. *La récurrence et la transience sont des propriétés de classe.*

Démonstration. Soient i, j tels que $i \longleftrightarrow j$. Il existe $n, m \geq 0$ vérifiant $P_{ij}^n > 0$ et $P_{ji}^m > 0$, et pour tout $r \geq 0$ on a $P_{ii}^{n+r+m} \geq P_{ij}^n P_{jj}^r P_{ji}^m$ d'où

$$\sum_{r=0}^{\infty} P_{jj}^r \leq \frac{1}{P_{ij}^n P_{ji}^m} \sum_{r=0}^{\infty} P_{ii}^{n+r+m}.$$

Supposons maintenant que i est transient alors

$$\sum_{r=0}^{\infty} P_{jj}^{r} \leq \frac{1}{P_{ij}^{n} P_{ji}^{m}} \sum_{r=0}^{\infty} P_{ii}^{n+r+m} < +\infty$$

et donc j est transient.

Supposons maintenant que j est récurrent alors

$$+\infty = \sum_{r=0}^{\infty} P_{jj}^{r} \leq \frac{1}{P_{ij}^{n} P_{ji}^{m}} \sum_{r=0}^{\infty} P_{ii}^{n+r+m}$$

et donc i est récurrent. □

Remarque 3.2. On peut donc parler de classe récurrente ou transiente. De plus, une chaîne de Markov est dite récurrente (respectivement transiente) si tous ses états sont récurrents (respectivement transients).

Théorème 3.3. *Toute classe récurrente est fermée.*
Ou de manière équivalente : toute classe qui n'est pas fermée est transiente.

Démonstration. Soit $\mathcal{C}$ une classe qui n'est pas fermée. Il existe $i \in \mathcal{C}$, $j \notin \mathcal{C}$ et $m \geq 1$ tels que $\mathbb{P}_i(X_m = j) > 0$. De plus, puisque j ne conduit pas à i, $\mathbb{P}_i(X_m = j, X_m + l = i) = 0$ pour tout $l \geq 0$. Donc $\mathbb{P}_i(\{X_m = j\}) = \mathbb{P}_i(\{X_m = j\} \cap \{N_i < \infty\})$. Ceci implique que

$$\mathbb{P}_i(N_i < \infty) \geq \mathbb{P}_i(\{X_m = j\} \cap \{N_i < \infty\}) = \mathbb{P}_i(\{X_m = j\}) > 0.$$

Donc i est transient et donc $\mathcal{C}$ est transiente. □

Théorème 3.4. *Toute classe fermée et finie est récurrente.*

Démonstration. Soit $\mathcal{C}$ une classe fermée et finie, supposons que $X_0 \in \mathcal{C}$. $\mathcal{C}$ étant fermée et finie, pour chaque réalisation de la chaîne de Markov, il existe un état qui est visité une infinité de fois.

On en déduit que $\mathbb{P}_{\mu_0}(\bigcup_{j\in E}\{N_j = \infty\}) = 1$. $\mathcal{C}$ étant finie, il existe donc un état i tel que $\mathbb{P}_{\mu_0}(N_i = \infty) > 0$. Montrons que i est récurrent, il nous suffit de montrer que $\mathbb{P}_i(N_i = \infty) > 0$.

Posons $T_i = \inf\{n \in \mathbb{N}, X_n = i\}$, on va montrer :

$$0 < \mathbb{P}_{\mu_0}(N_i = \infty) = \mathbb{P}_{\mu_0}(T_i < \infty)\mathbb{P}_i(N_i = \infty).$$

En effet, T_i est un temps d'arrêt et on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{\mu_0}(N_i = \infty) &= \mathbb{P}_{\mu_0}(\{T_i < \infty\} \cap \{X_{T_i+n} = i \text{ pour une infinité de } n\}), \\
&= \mathbb{P}_{\mu_0}(X_{T_i+n} = i \text{ pour une infinité de } n | T_i < \infty)\mathbb{P}_{\mu_0}(T_i < \infty) \\
&= \mathbb{P}_i(X_n = i \text{ pour une infinité de } n)\mathbb{P}_{\mu_0}(T_i < \infty) \text{ par la propriété de Markov} \\
&\qquad\qquad \text{forte qui nous dit que, conditionnellement à } \{T_i < \infty\}, \\
&\qquad\qquad (X_{T_i+n})_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une chaîne de Markov de paramètres } (\delta_i, P), \\
&= \mathbb{P}_{\mu_0}(T_i < \infty)\mathbb{P}_i(N_i = \infty).
\end{aligned}$$

Donc on obtient que $\mathbb{P}_i(N_i = \infty) > 0$, donc i est récurrent et $\mathcal{C}$ l'est aussi. □

Corollaire 3.5. *Toute chaîne de Markov homogène sur un espace d'états fini admet (au moins) une classe récurrente.*