EDSRs ergodiques et EDPs avec condition de Neumann au bord

Adrien Richou

IRMAR, Université Rennes 1

Séminaire triangulaire Brest - 20 octobre 2008

1. Introduction
   - rappels sur les EDSRs
   - contrôle ergodique optimal et EDP
2. EDSRs ergodiques
   - EDSREs et EDPs dans $\mathbb{R}^d$
   - EDSREs et EDPs avec condition de Neumann
3. Contrôle ergodique optimal

EDSRs en horizon fini

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, $(W_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ un m.b. de dimension d, $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ sa filtration naturelle augmentée, ξ une variable $\mathcal{F}_T$-mesurable, $f : [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} \to \mathbb{R}^k$ progressivement mesurable. (Dans toute la suite on prend $k = 1$).

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r, Y_r, Z_r)dr - \int_t^T Z_r dW_r, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{1}$$

EDSRs en horizon fini

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, $(W_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ un m.b. de dimension d, $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ sa filtration naturelle augmentée, ξ une variable $\mathcal{F}_T$-mesurable, $f : [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} \to \mathbb{R}^k$ progressivement mesurable. (Dans toute la suite on prend $k = 1$).

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r, Y_r, Z_r)dr - \int_t^T Z_r dW_r, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{1}$$

Theorem (Pardoux-Peng 1990)

On suppose f uniformément lipschitzienne en y et en z et $\mathbb{E}\left[|\xi|^2 + \int_0^T |f(.,0,0)|^2 dr\right] < \infty$. Alors (1) possède une unique solution (Y, Z) telle que

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t|^2\right] < \infty, \quad \mathbb{E}\left[\int_0^T |Z_t|^2 dt\right] < \infty.$$

EDSRs en horizon infini

Heuristique : $Y_\infty = 0$.

$$Y_t = Y_T + \int_t^T f(r, Y_r, Z_r)dr - \int_t^T Z_r dW_r, \quad 0 \leqslant t \leqslant T < +\infty. \qquad (2)$$

EDSRs en horizon infini

Heuristique : $Y_\infty = 0$.

$$Y_t = Y_T + \int_t^T f(r, Y_r, Z_r)dr - \int_t^T Z_r dW_r, \quad 0 \leqslant t \leqslant T < +\infty. \qquad (2)$$

Theorem (Briand-Hu 1998, Royer 2004)

On suppose :

1. *f uniformément lipschitzienne en y et en z,*
2. *f strictement monotone en y : $\mu > 0$*
   $(y_1 - y_2).(f(t, y_1, z) - f(t, y_2, z)) \leqslant -\mu \left|y_1 - y_2\right|^2$,
3. $|f(t, 0, 0)| \leqslant K$,

alors il existe une solution (Y, Z) telle que Y soit un processus borné par K/μ et $\mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} e^{-2\mu s}[|Y_s|^2 + \|Z_s\|^2]ds\right] < +\infty$. Cette solution est unique parmi les processus tels que Y soit continu et borné et $Z \in \mathcal{M}^2_{loc}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$.

Le problème de contrôle ergodique optimal

Le but est d'appliquer des résultats concernant les EDSRs pour traiter un problème de contrôle ergodique optimal avec

- l'équation d'état à valeur dans un domaine régulier borné $G = \{\phi > 0\}$

$$\begin{aligned} X_t^x &= x + \int_0^t b(X_s^x)ds + \int_0^t \sigma(X_s^x)dW_s + \int_0^t \nabla\phi(X_s^x)dK_s^x, \quad t \geqslant 0; \\ K_t^x &= \int_0^t \mathbb{1}_{X_s^x \in \partial G} dK_s^x, \quad K^x \text{ croissant.} \end{aligned}$$

Le problème de contrôle ergodique optimal

Le but est d'appliquer des résultats concernant les EDSRs pour traiter un problème de contrôle ergodique optimal avec

- l'équation d'état à valeur dans un domaine régulier borné $G = \{\phi > 0\}$

$$\begin{aligned} X_t^x &= x + \int_0^t b(X_s^x)ds + \int_0^t \sigma(X_s^x)dW_s + \int_0^t \nabla\phi(X_s^x)dK_s^x, \quad t \geqslant 0; \\ K_t^x &= \int_0^t \mathbb{1}_{X_s^x \in \partial G} dK_s^x, \quad K^x \text{ croissant.} \end{aligned}$$

- la fonction de coût

$$J(x,\rho) = \limsup_{T \to +\infty} \frac{\mathbb{1}_{\mathbb{E}^{\rho,T}[K_T^x]>0}}{\mathbb{E}^{\rho,T}[K_T^x]} \mathbb{E}^{\rho,T}\left[\int_0^T [L(X_s^x,\rho_s)]ds + \int_0^T g(X_s^x)dK_s^x\right],$$

avec ρ un processus adapté à valeur dans un espace métrique séparable U et $\mathbb{E}^{\rho,T}$ l'espérance pour la probabilité $\mathcal{E}(R(\rho))_T\mathbb{P}$.

EDSRs ergodiques

Nous allons relier le problème de contrôle ergodique optimal à un nouveau type d'EDSR en horizon infini

$$Y_t^x = Y_T^x + \int_t^T [f(X_s^x, Z_s^x)]ds + \int_t^T [g(X_s^x) - \mu]dK_s^x - \int_t^T Z_s^x dW_s.$$

Une solution est un triplé (Y, Z, μ)

- μ est un réel
- Y est un processus continu progressivement mesurable à valeur réelle
- Z est un processus continu progressivement mesurable à valeur dans $\mathbb{R}^{1\times d}$.

EDSRs ergodiques

Nous allons relier le problème de contrôle ergodique optimal à un nouveau type d'EDSR en horizon infini

$$Y_t^x = Y_T^x + \int_t^T [f(X_s^x, Z_s^x)]ds + \int_t^T [g(X_s^x) - \mu]dK_s^x - \int_t^T Z_s^x dW_s.$$

Une solution est un triplé (Y, Z, μ)

- μ est un réel
- Y est un processus continu progressivement mesurable à valeur réelle
- Z est un processus continu progressivement mesurable à valeur dans $\mathbb{R}^{1\times d}$.

Le lien avec le problème de contrôle ergodique est

- μ est le coût optimal
- Z donne le contrôle optimal.

Lien avec les EDPs

G. Barles et F. Da Lio (2005) ont étudié des EDPs dans des domaines bornés avec des conditions de Neumann de la forme :

$$\begin{cases} F(x, \nabla v(x), \nabla^2 v(x)) = 0, & \forall x \in G \\ L(x, \nabla v(x)) = \mu, & \forall x \in \partial G \end{cases}$$

où μ fait partie des inconnues.

Lien avec les EDPs

G. Barles et F. Da Lio (2005) ont étudié des EDPs dans des domaines bornés avec des conditions de Neumann de la forme :

$$\begin{cases} F(x, \nabla v(x), \nabla^2 v(x)) = 0, & \forall x \in G \\ L(x, \nabla v(x)) = \mu, & \forall x \in \partial G \end{cases}$$

où μ fait partie des inconnues.
Sous certaines hypothèses, on peut construire une solution (Y, Z, λ) de l'EDSRE précédente telle que $v(x) := Y_0^x$ est solution de viscosité de l'EDP :

$$\begin{cases} \mathcal{L}v(x) + f(x, {}^t\nabla v(x)\sigma(x)) = 0, & \forall x \in G \\ \frac{\partial v(x)}{\partial n} + g(x) = \mu, & \forall x \in \partial G \end{cases}$$

EDSREs et EDPs dans $\mathbb{R}^d$

EDSRs Introduites par M. Fuhrman, Y. Hu et G. Tessitore (2007).

$$\begin{cases} X_t^x = x + \int_0^t b(X_s^x)ds + \int_0^t \sigma(X_s^x)dW_s \\ Y_t^x = Y_T^x + \int_t^T \left[f(X_s^x, Z_s^x) - \lambda\right] ds - \int_t^T Z_s^x dW_s \\ 0 \leq t \leq T < \infty \end{cases} \tag{3}$$

Avec b, σ et f Lipschitz, $f(.,0)$ borné. De plus, on rajoute une hypothèse de dissipativité pour l'EDS sous-jacente : $\eta + K_{f,z}K_\sigma < 0$ avec

$$\eta = \sup_{x,y\in\mathbb{R}^d, x\neq y} \left\{ \frac{{}^t(x-y)(b(x)-b(y))}{|x-y|^2} + \frac{\mathrm{Tr}[(\sigma(x)-\sigma(y))^t(\sigma(x)-\sigma(y))]}{|x-y|^2} \right\}.$$

Une solution de l'EDSRE (3) est un triplé (Y, Z, λ). λ est appelée constante d'ergodicité.

Résultat d'existence

Theorem (existence d'une solution pour l'EDSRE (3))

Il existe

- $\lambda \in \mathbb{R}$
- $v : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *lipschitz et* $v(0) = 0$
- $\zeta : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{1\times d}$ *mesurable*

tels que, si on pose $Y_t^x := v(X_t^x)$ *et* $Z_t^x := \zeta(X_t^x)$*, alors* (Y^x, Z^x, λ) *est solution de l'EDSRE.*

Résultat d'existence

Theorem (existence d'une solution pour l'EDSRE (3))

Il existe

- $\lambda \in \mathbb{R}$
- $v : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *lipschitz et* $v(0) = 0$
- $\zeta : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{1\times d}$ *mesurable*

tels que, si on pose $Y_t^x := v(X_t^x)$ *et* $Z_t^x := \zeta(X_t^x)$*, alors* (Y^x, Z^x, λ) *est solution de l'EDSRE.*

Idée de la preuve : On approche l'EDSRE par une EDSR strictement monotone

$$Y_t^{x,\alpha} = Y_T^{x,\alpha} + \int_t^T [f(X_s^x, Z_s^{x,\alpha}) - \alpha Y_s^{x,\alpha}] ds - \int_t^T Z_s^{x,\alpha} dW_s, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Et l'unicité ?

- unicité de λ :

Theorem

On suppose que pour $x \in \mathbb{R}^d$, (Y', Z', λ) est une solution de l'EDSRE (3) vérifiant

$$\left|Y'_t\right| \leqslant c_x(1 + |X_t^x|), \quad \rightarrow \forall t \geqslant 0,$$

alors $\lambda' = \lambda$.

Et l'unicité ?

- unicité de λ :

Theorem

On suppose que pour $x \in \mathbb{R}^d$, (Y', Z', λ) est une solution de l'EDSRE (3) vérifiant

$$\left|Y'_t\right| \leqslant c_x(1 + |X_t^x|), \quad \to \forall t \geqslant 0,$$

alors $\lambda' = \lambda$.

- non unicité de la solution :
  - Si (Y, Z, λ) est solution, alors $(Y + c, Z, \lambda)$ est solution.
  - Même en supposant $Y_0^0 = 0$, la solution de l'EDSRE n'est pas nécessairement unique.

EDSREs avec condition de Neumann au bord

Soit G un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ tel qu'il existe $\phi \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}^d)$ vérifiant $G = \{\phi > 0\}$, $\partial G = \{\phi = 0\}$ et $|\nabla\phi(x)| = 1$ $\forall x \in \partial G$.
On considère une EDS sous-jacente réfléchie :

$$\begin{cases} X_t^x = x + \int_0^t b(X_s^x)ds + \int_0^t \sigma(X_s^x)dW_s + \int_0^t \nabla\phi(X_s^x)dK_s^x, & t \geqslant 0; \\ K_t^x = \int_0^t \mathbb{1}_{X_s^x \in \partial G} dK_s^x, & K^x \text{ est croissant.} \end{cases}$$

EDSREs avec condition de Neumann au bord

Soit G un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ tel qu'il existe $\phi \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}^d)$ vérifiant $G = \{\phi > 0\}$, $\partial G = \{\phi = 0\}$ et $|\nabla\phi(x)| = 1 \ \forall x \in \partial G$. On considère une EDS sous-jacente réfléchie :

$$\begin{cases} X_t^x = x + \int_0^t b(X_s^x)ds + \int_0^t \sigma(X_s^x)dW_s + \int_0^t \nabla\phi(X_s^x)dK_s^x, & t \geqslant 0; \\ K_t^x = \int_0^t 1_{X_s^x \in \partial G} dK_s^x, \quad K^x \text{ est croissant.} \end{cases}$$

L'EDSRE que l'on souhaite étudier est : pour tous $0 \leq t \leq T$

$$Y_t^x = Y_T^x + \int_t^T \left[f(X_s^x, Z_s^x) - \lambda\right] ds + \int_t^T \left[g(X_s^x) - \mu\right] dK_s^x - \int_t^T Z_s^x dW_s \quad (4)$$

où λ est une constante. On suppose toujours b, σ et f lipschitz, $f(.,0)$ borné et $\eta + K_{f,z}K_\sigma < 0$.

Démonstration de l'existence

Comme G. Barles et F. Da Lio, on considère une version modifiée strictement monotone de l'équation :

$$\begin{aligned} Y_t^{x,\alpha} &= Y_T^{x,\alpha} + \int_t^T \left[f(X_s^x, Z_s^{x,\alpha}) - \lambda - \alpha^2 Y_t^{x,\alpha}\right] ds \\ &\quad + \int_t^T \left[g(X_s^x) - \alpha Y_t^{x,\alpha}\right] dK_s^x - \int_t^T Z_s^{x,\alpha} dW_s \\ &\quad 0 \leq t \leq T < \infty \end{aligned}$$

avec $\alpha > 0$. On applique alors la stratégie de M. Fuhrman, Y. Hu et G. Tessitore.

Démonstration de l'existence

Comme G. Barles et F. Da Lio, on considère une version modifiée strictement monotone de l'équation :

$$\begin{aligned} Y_t^{x,\alpha} &= Y_T^{x,\alpha} + \int_t^T \left[f(X_s^x, Z_s^{x,\alpha}) - \lambda - \alpha^2 Y_t^{x,\alpha}\right] ds \\ &\quad + \int_t^T \left[g(X_s^x) - \alpha Y_t^{x,\alpha}\right] dK_s^x - \int_t^T Z_s^{x,\alpha} dW_s \\ &\quad 0 \leq t \leq T < \infty \end{aligned}$$

avec $\alpha > 0$. On applique alors la stratégie de M. Fuhrman, Y. Hu et G. Tessitore.
Ne semble pas aboutir...

Démonstration de l'existence (2)

1. Dans un premier temps on résout un problème différent : μ devient un paramètre et λ une inconnue.

Démonstration de l'existence (2)

1. Dans un premier temps on résout un problème différent : μ devient un paramètre et λ une inconnue.
2. On prouve l'existence d'une solution (Y, Z, λ) lorsque $g = 0$ et $\mu = 0$, en rajoutant une hypothèse : G convexe. On a $Y_t^x = v(X_t^x)$ avec $v \in \mathcal{C}^0_{lip}(\overline{G})$. On montre également l'unicité de λ.

Démonstration de l'existence (2)

1. Dans un premier temps on résout un problème différent : μ devient un paramètre et λ une inconnue.
2. On prouve l'existence d'une solution (Y, Z, λ) lorsque $g = 0$ et $\mu = 0$, en rajoutant une hypothèse : G convexe. On a $Y_t^x = v(X_t^x)$ avec $v \in \mathcal{C}^0_{lip}(\overline{G})$. On montre également l'unicité de λ.
3. On se ramène au cas précédent : Soit w vérifiant $\frac{\partial w(x)}{\partial n} + g(x) = \mu$, pour tous $x \in \partial G$; on retranche $(w(X_t^x), {}^t\nabla w(X_t^x)\sigma(X_t^x))$ à (Y_t^x, Z_t^x). On a besoin de $g \in \mathcal{C}^2_{lip}(\overline{G})$.

Démonstration de l'existence (2)

1. Dans un premier temps on résout un problème différent : μ devient un paramètre et λ une inconnue.
2. On prouve l'existence d'une solution (Y, Z, λ) lorsque $g = 0$ et $\mu = 0$, en rajoutant une hypothèse : G convexe. On a $Y_t^x = v(X_t^x)$ avec $v \in \mathcal{C}^0_{lip}(\overline{G})$. On montre également l'unicité de λ.
3. On se ramène au cas précédent : Soit w vérifiant $\frac{\partial w(x)}{\partial n} + g(x) = \mu$, pour tous $x \in \partial G$; on retranche $(w(X_t^x), {}^t\nabla w(X_t^x)\sigma(X_t^x))$ à (Y_t^x, Z_t^x). On a besoin de $g \in \mathcal{C}^2_{lip}(\overline{G})$.
4. On peut définir la fonction $\mu \mapsto \lambda(\mu)$ et montrer qu'elle est continue et décroissante. Il ne reste plus qu'à montrer que $\lambda(-\infty) = +\infty$ et $\lambda(+\infty) = -\infty$ pour pouvoir utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.

Deuxième étape

On va montrer le résultat suivant :

Theorem

On suppose $g = 0$ et $\mu = 0$. Il existe

- $\lambda \in \mathbb{R}$
- $v : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *lipschitz et* $v(0) = 0$
- $\zeta : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{1\times d}$ *mesurable*

tels que, si on pose $Y_t^x := v(X_t^x)$ et $Z_t^x := \zeta(X_t^x)$, alors (Y^x, Z^x, λ) est solution de l'EDSRE avec μ fixé. De plus, λ est unique parmi les solutions (Y, Z, λ) telles que Y soit un processus adapté continu borné et $Z \in \mathcal{M}^2_{loc}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$.

Deuxième étape

On approche l'EDSRE par une EDSR strictement monotone

$$Y_t^{x,\alpha} = Y_T^{x,\alpha} + \int_t^T [f(X_s^x, Z_s^{x,\alpha}) - \alpha Y_s^{x,\alpha}] ds - \int_t^T Z_s^{x,\alpha} dW_s, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Deuxième étape

On approche l'EDSRE par une EDSR strictement monotone

$$Y_t^{x,\alpha} = Y_T^{x,\alpha} + \int_t^T [f(X_s^x, Z_s^{x,\alpha}) - \alpha Y_s^{x,\alpha}]ds - \int_t^T Z_s^{x,\alpha} dW_s, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Lemme (Y. Hu, P. Briand, M. Royer)

Il existe une unique solution $(Y^{x,\alpha}, Z^{x,\alpha})$ avec $Y^{x,\alpha}$ borné continu et $Z^{x,\alpha} \in \mathcal{M}^2_{loc}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$. De plus $|Y^{x,\alpha}| \leqslant M/\alpha\ \mathbb{P} - p.s.$ pour tout $t \geqslant 0$.

On définie $v^\alpha(x) := Y_0^{x,\alpha}$. On a clairement $|v^\alpha(x)| \leqslant M/\alpha$ et $Y_t^{x,\alpha} = v^\alpha(X_t^x)$.

Estimation du gradient

Proposition

$$|v^\alpha(x) - v^\alpha(x')| \leqslant \frac{K_{f,x}}{-\eta - K_{f,z}K_\sigma} |x - x'|.$$

Estimation du gradient

Proposition

$$|v^\alpha(x) - v^\alpha(x')| \leqslant \frac{K_{f,x}}{-\eta - K_{f,z}K_\sigma} |x - x'|.$$

Démonstration : on pose $\tilde{Y}^\alpha := Y^{x,\alpha} - Y^{x',\alpha}$, $\tilde{Z}^\alpha := Z^{x,\alpha} - Z^{x',\alpha}$,

$$\beta_s = \frac{f(X_s^{x'}, Z_s^{x',\alpha}) - f(X_s^{x'}, Z_s^{x,\alpha})}{|Z_s^{x',\alpha} - Z_s^{x,\alpha}|^2}^t (Z_s^{x',\alpha} - Z_s^{x,\alpha}),$$

$$f_\alpha(s) = f(X_s^x, Z_s^{x,\alpha}) - f(X_s^{x'}, Z_s^{s,\alpha}),$$

et $\tilde{W}_t = \int_0^t \beta_s ds + W_t$.

Estimation du gradient

Proposition

$$|v^\alpha(x) - v^\alpha(x')| \leqslant \frac{K_{f,x}}{-\eta - K_{f,z}K_\sigma}|x - x'|.$$

Démonstration : on pose $\tilde{Y}^\alpha := Y^{x,\alpha} - Y^{x',\alpha}$, $\tilde{Z}^\alpha := Z^{x,\alpha} - Z^{x',\alpha}$,

$$\beta_s = \frac{f(X_s^{x'}, Z_s^{x',\alpha}) - f(X_s^{x'}, Z_s^{x,\alpha})}{|Z_s^{x',\alpha} - Z_s^{x,\alpha}|^2}^t (Z_s^{x',\alpha} - Z_s^{x,\alpha}),$$

$$f_\alpha(s) = f(X_s^x, Z_s^{x,\alpha}) - f(X_s^{x'}, Z_s^{s,\alpha}),$$

et $\tilde{W}_t = \int_0^t \beta_s ds + W_t$. On a

$$\tilde{Y}_0^\alpha = \tilde{Y}_T^\alpha - \alpha \int_0^T \tilde{Y}_s^\alpha ds + \int_0^T f_\alpha(s) ds - \int_0^T \tilde{Z}_s^\alpha d\tilde{W}_s,$$

$$\tilde{Y}_0^\alpha = e^{-\alpha T}\tilde{Y}_T^\alpha + \int_0^T e^{-\alpha s} f_\alpha(s) ds - \int_0^T e^{-\alpha s}\tilde{Z}_s^\alpha d\tilde{W}_s$$

Estimation du gradient (2)

$$|\tilde{Y}_0^\alpha| \leqslant e^{-\alpha T}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_T}\left[|\tilde{Y}_T^\alpha|\right] + \int_0^T e^{-\alpha s}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_T}\left[|f_\alpha(s)|\right] ds$$

$$|\tilde{Y}_0^\alpha| \leqslant e^{-\alpha T}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_T}\left[|\tilde{Y}_T^\alpha|\right] + K_{f,x}\int_0^T e^{-\alpha s}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_T}\left[|X_s^x - X_s^{x'}|^2\right]^{1/2} ds.$$

Estimation du gradient (2)

$$
\begin{aligned}
|\tilde{Y}_0^\alpha| &\leqslant e^{-\alpha T}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_T}\left[|\tilde{Y}_T^\alpha|\right] + \int_0^T e^{-\alpha s}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_T}\left[|f_\alpha(s)|\right] ds \\
|\tilde{Y}_0^\alpha| &\leqslant e^{-\alpha T}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_T}\left[|\tilde{Y}_T^\alpha|\right] + K_{f,x}\int_0^T e^{-\alpha s}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_T}\left[|X_s^x - X_s^{x'}|^2\right]^{1/2} ds.
\end{aligned}
$$

Lemme

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_T}\left[|X_s^x - X_s^{x'}|^2\right] \leqslant e^{2(\eta+K_{f,z}K_\sigma)s}|x-x'|^2.$$

Estimation du gradient (2)

$$|\tilde{Y}_0^\alpha| \leqslant e^{-\alpha T}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_T}\left[|\tilde{Y}_T^\alpha|\right] + \int_0^T e^{-\alpha s}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_T}\left[|f_\alpha(s)|\right] ds$$

$$|\tilde{Y}_0^\alpha| \leqslant e^{-\alpha T}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_T}\left[|\tilde{Y}_T^\alpha|\right] + K_{f,x}\int_0^T e^{-\alpha s}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_T}\left[|X_s^x - X_s^{x'}|^2\right]^{1/2} ds.$$

Lemme

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_T}\left[|X_s^x - X_s^{x'}|^2\right] \leqslant e^{2(\eta+K_{f,z}K_\sigma)s}|x-x'|^2.$$

Donc

$$|\tilde{Y}_0^\alpha| \leqslant e^{-\alpha T}\frac{M_f}{\alpha} + K_{f,x}\frac{\left[1-e^{(-\alpha+\eta+K_{f,z}K_\sigma)T}\right]}{\alpha-\eta-K_{f,z}K_\sigma}|x-x'|.$$

Puis $T \to +\infty$.

Estimation du gradient (3)

Preuve du lemme :

$$\begin{aligned}
e^{-2(\eta+K_{\psi,z}K_\sigma)s}|X_s^x - X_s^{x'}|^2 = |x-x'|^2 \\
+2\int_0^s e^{-2(\eta+K_{f,z}K_\sigma)u}\Big[{}^t(X_u^x - X_u^{x'})(b(X_u^x) - b(X_u^{x'}))du \\
+\frac{1}{2}\mathrm{Tr}[(\sigma(X_u^x)-\sigma(X_u^{x'}))^t(\sigma(X_u^x)-\sigma(X_u^{x'}))]du \\
+{}^t(X_u^x - X_u^{x'})\nabla\phi(X_u^x)dK_u^x - {}^t(X_u^x - X_u^{x'})\nabla\phi(X_u^{x'})dK_u^{x'} \\
+{}^t(X_u^x - X_u^{x'})(\sigma(X_u^x)-\sigma(X_u^{x'}))(d\tilde{W}_u - \beta_u du) \\
-(\eta + K_{f,z}K_\sigma)|X_u^x - X_u^{x'}|^2 du\Big].
\end{aligned}$$

Fin de la deuxième étape (existence)

On pose $\bar{v}^\alpha(x) = v^\alpha(x) - v^\alpha(0)$. On sait que $|\bar{v}^\alpha(x)| \leqslant C|x|$, $\alpha |v^\alpha(x)| \leqslant M$ et $\{\bar{v}^\alpha\}$ uniformément lipschitz.

Fin de la deuxième étape (existence)

On pose $\bar{v}^{\alpha}(x) = v^{\alpha}(x) - v^{\alpha}(0)$. On sait que $|\bar{v}^{\alpha}(x)| \leqslant C|x|$, $\alpha|v^{\alpha}(x)| \leqslant M$ et $\{\bar{v}^{\alpha}\}$ uniformément lipschitz.
$\exists \alpha_n \searrow 0$ telle que $\bar{v}^{\alpha_n}(x) \to v(x), \forall x$ et $\alpha_n v^{\alpha_n}(0) \to \lambda$.

Fin de la deuxième étape (existence)

On pose $\bar{v}^\alpha(x) = v^\alpha(x) - v^\alpha(0)$. On sait que $|\bar{v}^\alpha(x)| \leqslant C\,|x|$, $\alpha\,|v^\alpha(x)| \leqslant M$ et $\{\bar{v}^\alpha\}$ uniformément lipschitz.
$\exists \alpha_n \searrow 0$ telle que $\bar{v}^{\alpha_n}(x) \to v(x)$, $\forall x$ et $\alpha_n v^{\alpha_n}(0) \to \lambda$.
On définie $\bar{Y}_t^{x,\alpha} = \bar{v}^\alpha(X_t^x)$ et $Y^x = v(X^x)$. Alors
$\mathbb{E}\big[\int_0^T \big|\bar{Y}_s^{x,\alpha_n} - Y_s^x\big|^2 ds\big] \to 0$ et $\mathbb{E}\big[\,\big|\bar{Y}_T^{x,\alpha_n} - Y_T^x\big|^2\,\big] \to 0$.

Fin de la deuxième étape (existence)

On pose $\bar{v}^\alpha(x) = v^\alpha(x) - v^\alpha(0)$. On sait que $|\bar{v}^\alpha(x)| \leqslant C|x|$, $\alpha|v^\alpha(x)| \leqslant M$ et $\{\bar{v}^\alpha\}$ uniformément lipschitz.
$\exists \alpha_n \searrow 0$ telle que $\bar{v}^{\alpha_n}(x) \to v(x)$, $\forall x$ et $\alpha_n v^{\alpha_n}(0) \to \lambda$.
On définie $\bar{Y}_t^{x,\alpha} = \bar{v}^\alpha(X_t^x)$ et $Y^x = v(X^x)$. Alors
$\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|\bar{Y}_s^{x,\alpha_n} - Y_s^x\right|^2 ds\right] \to 0$ et $\mathbb{E}\left[\left|\bar{Y}_T^{x,\alpha_n} - Y_T^x\right|^2\right] \to 0$.
De plus, par un raisonnement standard, $\exists Z^x \in \mathcal{M}^2_{loc}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ tel que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|\bar{Z}_s^{x,\alpha_n} - Z_s^x\right|^2 ds\right] \to 0.$$

Fin de la deuxième étape (existence) (2)

$\bar{Y}^{x,\alpha_n}$ et $\bar{Z}^{x,\alpha_n}$ vérifient

$$\bar{Y}_t^{x,\alpha_n} = \bar{Y}_T^{x,\alpha_n} + \int_t^T f(X_s^x, \bar{Z}_s^{x,\alpha_n}) - \alpha_n \bar{Y}_s^{x,\alpha_n} - \alpha_n v^{\alpha_n}(0) ds - \int_0^T \bar{Z}_s^{x,\alpha_n} dW_s$$

En passant à la limite on obtient

$$Y_t^x = Y_T^x + \int_t^T f(X_s^x, Z_s^x) - \lambda ds - \int_0^T Z_s^x dW_s.$$

Étude de la fonction $\mu \mapsto \lambda(\mu)$

Le résultat d'unicité concernant λ permet de définir la fonction $\mu \mapsto \lambda(\mu)$.

Proposition

$\mu \mapsto \lambda(\mu)$ *est une fonction réelle décroissante et continue.*

Il suffit donc de montrer

$$\lambda(\mu) \overset{\mu \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty \quad \text{and} \quad \lambda(\mu) \overset{\mu \to -\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

pour pouvoir appliquer le théorème des valeurs intermédiaires.

Cas ou f est borné

On prend deux solutions $(Y, Z, \lambda(0))$, $(\tilde{Y}, \tilde{Z}, \lambda(\mu))$:

$$Y_0^x = Y_T^x + \int_0^T [f(X_s^x, Z_s^x) - \lambda(0)]\, ds + \int_0^T [g(X_s^x)]\, dK_s^x - \int_0^T Z_s^x dW_s,$$

$$\tilde{Y}_0^x = \tilde{Y}_T^x + \int_0^T [f(X_s^x, \tilde{Z}_s^x) - \lambda(\mu)]\, ds + \int_0^T [g(X_s^x) - \mu]\, dK_s^x - \int_0^T \tilde{Z}_s^x dW_s.$$

On fait la différence et on obtient

$$\left| \mathbb{E}\left[Y_0^x + \tilde{Y}_T^x - Y_T^x - \tilde{Y}_0^x \right] + (\lambda(0) - \lambda(\mu))T - \mu \mathbb{E}\left[K_T^x\right] \right| \leqslant 2M_f T.$$

Cas ou f est borné

On prend deux solutions $(Y, Z, \lambda(0))$, $(\tilde{Y}, \tilde{Z}, \lambda(\mu))$:

$$Y_0^x = Y_T^x + \int_0^T \left[f(X_s^x, Z_s^x) - \lambda(0)\right] ds + \int_0^T \left[g(X_s^x)\right] dK_s^x - \int_0^T Z_s^x dW_s,$$

$$\tilde{Y}_0^x = \tilde{Y}_T^x + \int_0^T \left[f(X_s^x, \tilde{Z}_s^x) - \lambda(\mu)\right] ds + \int_0^T \left[g(X_s^x) - \mu\right] dK_s^x - \int_0^T \tilde{Z}_s^x dW_s.$$

On fait la différence et on obtient

$$\left|\mathbb{E}\left[Y_0^x + \tilde{Y}_T^x - Y_T^x - \tilde{Y}_0^x\right] + (\lambda(0) - \lambda(\mu))T - \mu\mathbb{E}\left[K_T^x\right]\right| \leqslant 2M_f T.$$

Question : quel est le comportement de $\mathbb{E}\left[K_T^x\right]$?

Comportement de K

Lemme

Soient ν la mesure invariante du processus X, $X_0 \sim \nu$. On a

$$\mathbb{E}\left[K_T^{X_0}\right] = -\mathbb{E}\left[\mathcal{L}\phi(X_0)\right] T.$$

Preuve :

$$K_t^x = \phi(X_t^x) - \phi(x) - \int_0^t \mathcal{L}\phi(X_s^x)ds - \int_0^t ({}^t\nabla\phi(X_s^x)\sigma(X_s^x))dW_s. \quad \square$$

Comportement de K

Lemme

Soient ν la mesure invariante du processus X, $X_0 \sim \nu$. On a

$$\mathbb{E}\left[K_T^{X_0}\right] = -\mathbb{E}\left[\mathcal{L}\phi(X_0)\right] T.$$

Preuve :

$$K_t^x = \phi(X_t^x) - \phi(x) - \int_0^t \mathcal{L}\phi(X_s^x)ds - \int_0^t ({}^t\nabla\phi(X_s^x)\sigma(X_s^x))dW_s. \qquad \square$$

Alors on obtient dans l'inéquation précédente

$$|(\lambda(0) - \lambda(\mu)) + \mu\mathbb{E}\left[\mathcal{L}\phi(X_0)\right]| \leqslant 2M_f.$$

Ainsi, le résultat d'existence est établi si $\mathbb{E}\left[\mathcal{L}\phi(X_0)\right] < 0$. De plus, lorsque $\mathbb{E}\left[\mathcal{L}\phi(X_0)\right] = 0$, il existe des λ pour lesquels il n'y a pas de solution (Y, Z, μ) à l'EDSRE.

Comportement de K : exemples

- Si σ est inversible, $\mathbb{E}\left[\mathcal{L}\phi(X_0)\right] < 0$.

Comportement de K : exemples

- Si σ est inversible, $\mathbb{E}\left[\mathcal{L}\phi(X_0)\right] < 0$.
- $G = B(0,1)$, $\phi(x) = \frac{1-|x|^2}{2}$, $b(x) = -x$ et
$\sigma(x) = \begin{pmatrix} x_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_d \end{pmatrix}$. On a $\nu = \delta_0$, donc $\mathbb{E}\left[\mathcal{L}\phi(X_0)\right] = 0$.

Comportement de K : exemples

- Si σ est inversible, $\mathbb{E}\left[\mathcal{L}\phi(X_0)\right] < 0$.
- $G = B(0,1)$, $\phi(x) = \frac{1-|x|^2}{2}$, $b(x) = -x$ et
$$\sigma(x) = \begin{pmatrix} x_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_d \end{pmatrix}.$$ On a $\nu = \delta_0$, donc $\mathbb{E}\left[\mathcal{L}\phi(X_0)\right] = 0$.
- $G = B(0,1)$, $\phi(x) = \frac{1-|x|^2}{2}$, $b(x) = -x$ et
$$\sigma(x) = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0_{d-k} \end{pmatrix}.$$ On a $\nu = \nu_k \otimes \delta_{0_{\mathbb{R}^{d-k}}}$ et $\mathbb{E}\left[\mathcal{L}\phi(X_0)\right] < 0$.

Résultat

Theorem (f borné)

On suppose

- *G borné convexe et régulier,*
- $\eta + K_{f,z}K_\sigma < 0$,
- $g \in \mathcal{C}^2_{lip}(\overline{G})$,
- *f borné et* $\mathbb{E}\left[\mathcal{L}\phi(X_0)\right] < 0$,

*Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ il existe $\mu \in \mathbb{R}$, $v \in \mathcal{C}^0_{lip}(\overline{G})$ et ζ une fonction mesurable telles que $((v(X_t^x))_t, (\zeta(X_t^x))_t, \mu)$ soit une solution de l'EDSRE (**??**). De plus on a*

$$|(\lambda(0) - \lambda(\mu)) + \mu\mathbb{E}\left[\mathcal{L}\phi(X_0)\right]| \leqslant 2M_f.$$

Problème : On a pas l'unicité de μ et dans les problèmes de contrôle ergodique optimal f n'est pas borné.

f non borné

On prend deux solutions $(Y, Z, \lambda(\mu))$, $(\tilde{Y}, \tilde{Z}, \lambda(\tilde{\mu}))$:

$$Y_0^x = Y_T^x + \int_0^T \left[f(X_s^x, Z_s^x) - \lambda(\mu)\right] ds + \int_0^T \left[g(X_s^x) - \mu\right] dK_s^x - \int_0^T Z_s^x dW_s$$

$$\tilde{Y}_0^x = \tilde{Y}_T^x + \int_0^T \left[f(X_s^x, \tilde{Z}_s^x) - \lambda(\tilde{\mu})\right] ds + \int_0^T \left[g(X_s^x) - \tilde{\mu}\right] dK_s^x - \int_0^T \tilde{Z}_s^x dW_s$$

On pose $\bar{Y}^x := \tilde{Y}^x - Y^x$ et $\bar{Z}^x := \tilde{Z}^x - Z^x$.

f non borné

On prend deux solutions $(Y, Z, \lambda(\mu))$, $(\tilde{Y}, \tilde{Z}, \lambda(\tilde{\mu}))$:

$$Y_0^x = Y_T^x + \int_0^T [f(X_s^x, Z_s^x) - \lambda(\mu)]\, ds + \int_0^T [g(X_s^x) - \mu]\, dK_s^x - \int_0^T Z_s^x dW_s$$

$$\tilde{Y}_0^x = \tilde{Y}_T^x + \int_0^T [f(X_s^x, \tilde{Z}_s^x) - \lambda(\tilde{\mu})]\, ds + \int_0^T [g(X_s^x) - \tilde{\mu}]\, dK_s^x - \int_0^T \tilde{Z}_s^x dW_s$$

On pose $\bar{Y}^x := \tilde{Y}^x - Y^x$ et $\bar{Z}^x := \tilde{Z}^x - Z^x$. On a, pour tous $T \in \mathbb{R}_+$,

$$\bar{Y}_0^x = \bar{Y}_T^x + \int_0^T [f(X_s^x, \tilde{Z}_s^x) - f(X_s^x, Z_s^x)]\, ds + [\lambda - \tilde{\lambda}]T + [\mu - \tilde{\mu}]K_T^x - \int_0^T \bar{Z}_s^x dW_s.$$

f non borné

On prend deux solutions $(Y, Z, \lambda(\mu))$, $(\tilde{Y}, \tilde{Z}, \lambda(\tilde{\mu}))$:

$$Y_0^x = Y_T^x + \int_0^T [f(X_s^x, Z_s^x) - \lambda(\mu)]\,ds + \int_0^T [g(X_s^x) - \mu]\,dK_s^x - \int_0^T Z_s^x\,dW_s$$

$$\tilde{Y}_0^x = \tilde{Y}_T^x + \int_0^T [f(X_s^x, \tilde{Z}_s^x) - \lambda(\tilde{\mu})]\,ds + \int_0^T [g(X_s^x) - \tilde{\mu}]\,dK_s^x - \int_0^T \tilde{Z}_s^x\,dW_s$$

On pose $\bar{Y}^x := \tilde{Y}^x - Y^x$ et $\bar{Z}^x := \tilde{Z}^x - Z^x$. On a, pour tous $T \in \mathbb{R}_+$,

$$\bar{Y}_0^x = \bar{Y}_T^x + \int_0^T [f(X_s^x, \tilde{Z}_s^x) - f(X_s^x, Z_s^x)]\,ds + [\lambda - \tilde{\lambda}]T + [\mu - \tilde{\mu}]K_T^x - \int_0^T \bar{Z}_s^x\,dW_s.$$

$$\bar{Y}_0^x = \bar{Y}_T^x + \int_0^T \bar{Z}_s^x \beta_s\,ds + [\lambda - \tilde{\lambda}]T + [\mu - \tilde{\mu}]K_T^x - \int_0^T \bar{Z}_s^x\,dW_s.$$

f non borné

On prend deux solutions $(Y, Z, \lambda(\mu))$, $(\tilde{Y}, \tilde{Z}, \lambda(\tilde{\mu}))$:

$$Y_0^x = Y_T^x + \int_0^T [f(X_s^x, Z_s^x) - \lambda(\mu)]\, ds + \int_0^T [g(X_s^x) - \mu]\, dK_s^x - \int_0^T Z_s^x dW_s$$

$$\tilde{Y}_0^x = \tilde{Y}_T^x + \int_0^T [f(X_s^x, \tilde{Z}_s^x) - \lambda(\tilde{\mu})]\, ds + \int_0^T [g(X_s^x) - \tilde{\mu}]\, dK_s^x - \int_0^T \tilde{Z}_s^x dW_s$$

On pose $\bar{Y}^x := \tilde{Y}^x - Y^x$ et $\bar{Z}^x := \tilde{Z}^x - Z^x$. On a, pour tous $T \in \mathbb{R}_+$,

$$\bar{Y}_0^x = \bar{Y}_T^x + \int_0^T [f(X_s^x, \tilde{Z}_s^x) - f(X_s^x, Z_s^x)]\, ds + [\lambda - \tilde{\lambda}]T + [\mu - \tilde{\mu}]K_T^x - \int_0^T \bar{Z}_s^x dW_s.$$

$$\bar{Y}_0^x = \bar{Y}_T^x + \int_0^T \bar{Z}_s^x \beta_s ds + [\lambda - \tilde{\lambda}]T + [\mu - \tilde{\mu}]K_T^x - \int_0^T \bar{Z}_s^x dW_s.$$

$$\bar{Y}_0^x - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_T}\left[\bar{Y}_T^x\right] = [\lambda - \tilde{\lambda}]T + [\mu - \tilde{\mu}]\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_T}\left[K_T^x\right].$$

f non borné

Finalement,$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_T}\left[K_T^x/T\right]$ possède une limite $l_{\mu,\tilde{\mu}} \geqslant 0$ lorsque $T \to +\infty$ et $\mu \neq \mu'$ telle que

$$(\lambda(\mu) - \lambda(\tilde{\mu})) + (\mu - \tilde{\mu})l_{\mu,\tilde{\mu}} = 0.$$

f non borné

Finalement,$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_T}\left[K_T^x/T\right]$ possède une limite $l_{\mu,\tilde{\mu}} \geqslant 0$ lorsque $T \to +\infty$ et $\mu \neq \mu'$ telle que

$$(\lambda(\mu) - \lambda(\tilde{\mu})) + (\mu - \tilde{\mu})l_{\mu,\tilde{\mu}} = 0.$$

Or

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_T}\left[K_T^x\right] &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_T}\left[\phi(X_T^x) - \phi(x) - \int_0^T \mathcal{L}\phi(X_s^x)ds - \int_0^T {}^t\nabla\phi(X_s^x)\sigma(X_s^x)\beta_s ds\right] \\
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_T}\left[\frac{K_T^x}{T}\right] &\geqslant -\frac{2|\phi|_\infty}{T} + \left[-\sup_{x\in\overline{G}} \mathcal{L}\phi - |\nabla\phi\sigma|_{\infty,\overline{G}} K_{f,z}\right].
\end{aligned}$$

f non borné

Finalement, $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_T}\left[K_T^x/T\right]$ possède une limite $l_{\mu,\tilde{\mu}} \geqslant 0$ lorsque $T \to +\infty$ et $\mu \neq \mu'$ telle que

$$(\lambda(\mu) - \lambda(\tilde{\mu})) + (\mu - \tilde{\mu}) l_{\mu,\tilde{\mu}} = 0.$$

Or

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_T}\left[K_T^x\right] &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_T}\left[\phi(X_T^x) - \phi(x) - \int_0^T \mathcal{L}\phi(X_s^x)ds - \int_0^T {}^t\nabla\phi(X_s^x)\sigma(X_s^x)\beta_s ds\right.\\
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_T}\left[\frac{K_T^x}{T}\right] &\geqslant -\frac{2|\phi|_\infty}{T} + \left[-\sup_{x\in\overline{G}} \mathcal{L}\phi - |\nabla\phi\sigma|_{\infty,\overline{G}} K_{f,z}\right].
\end{aligned}$$

Posons $c = -\sup_{x\in\overline{G}} \mathcal{L}\phi - |\nabla\phi\sigma|_{\infty,\overline{G}} K_{f,z}$. On a $l_{\mu,\tilde{\mu}} \geqslant c$ lorsque $\mu \neq \mu'$. Donc il suffit de supposer $c > 0$ pour avoir un résultat d'existence. De plus on obtient également un résultat d'unicité.

f non borné

Theorem (f non borné)

On suppose

- *G borné convexe et régulier,*
- $\eta + K_{f,z}K_\sigma < 0$,
- $g \in \mathcal{C}^2_{lip}(\overline{G})$,
- $-\sup_{x\in\overline{G}} \mathcal{L}\phi - |\nabla\phi\sigma|_{\infty,\overline{G}} K_{f,z} > 0$,

*Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ il existe $\mu \in \mathbb{R}$, $v \in \mathcal{C}^0_{lip}(\overline{G})$ et ζ une fonction mesurable telles que $((v(X_t^x))_t, (\zeta(X_t^x))_t, \mu)$ soit une solution de l'EDSRE (**??**). De plus on a*

$$(\lambda(\mu) - \lambda(\tilde{\mu})) + (\mu - \tilde{\mu})l_{\mu,\tilde{\mu}} = 0 \textit{ avec } 0 < c \leqslant l_{\mu,\tilde{\mu}} \leqslant C.$$

f non borné : exemple

Exemple : $G = B(0,1)$, $\phi(x) = \frac{1-|x|^2}{2}$, $b(x) = -x$ et $\sigma(x) = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0_{d-k} \end{pmatrix}$. Les hypothèses sont vérifiées dès que $k/2 - 1 > K_{f,z}$.

Cas particulier des processus de Kolmogorov

Dans cette partie on pose $\sigma = \sqrt{2}I$ et $b = -\nabla U$ avec $U \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ et $\nabla^2 U \geqslant cI$ avec $c > 0$.

Theorem (f non borné (2))

On suppose

- *G borné convexe et régulier,*
- $\eta + K_{f,z}K_\sigma < 0$,
- $g \in \mathcal{C}^2_{lip}(\overline{G})$,
- $\left(\frac{\delta}{\sqrt{2c}} + \sqrt{2}|\nabla\phi|_{\infty,\overline{G}}\right) K_{f,z} < -\mathbb{E}[\mathcal{L}\phi(X_0)]$ *avec* $\delta = \sup_{x\in\overline{G}}({}^t\nabla U(x)x) - \inf_{x\in\overline{G}}({}^t\nabla U(x)x)$

*Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ il existe $\mu \in \mathbb{R}$, $v \in \mathcal{C}^0_{lip}(\overline{G})$ et ζ une fonction mesurable telles que $((v(X_t^x))_t, (\zeta(X_t^x))_t, \mu)$ soit une solution de l'EDSRE (**??**).*

Idée de la preuve

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_T}\left[\frac{K_T^x}{T}\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_T}\left[\frac{\phi(X_T^x)-\phi(x)}{T} - \frac{1}{T}\int_0^T \mathcal{L}\phi(X_s^x)ds - \frac{\sqrt{2}}{T}\int_0^T {}^t\nabla\phi(X_s^x)\beta_s ds\right].$$

Idée de la preuve

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_T}\left[\frac{K_T^x}{T}\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_T}\left[\frac{\phi(X_T^x)-\phi(x)}{T} - \frac{1}{T}\int_0^T \mathcal{L}\phi(X_s^x)ds - \frac{\sqrt{2}}{T}\int_0^T {}^t\nabla\phi(X_s^x)\beta_s ds\right].$$

On définit $A_T := \left\{-\frac{1}{T}\int_0^T \mathcal{L}\phi(X_s^{X_0})ds \leqslant -\mathbb{E}[\mathcal{L}\phi(X_0)] - \varepsilon\right\}$. D'après un résultat de A. Guillin, C. Léonard, L. Wu et N. Yao (prépublication) on a $\mathbb{P}(A_T) \leqslant \exp\left(-\frac{c\varepsilon^2 T}{\delta^2}\right)$. Cette inégalité repose sur le fait que ν vérifie une inégalité de Poincaré (de constante de Poincaré 1/c).

Idée de la preuve

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_T}\left[\frac{K_T^x}{T}\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_T}\left[\frac{\phi(X_T^x)-\phi(x)}{T} - \frac{1}{T}\int_0^T \mathcal{L}\phi(X_s^x)ds - \frac{\sqrt{2}}{T}\int_0^T {}^t\nabla\phi(X_s^x)\beta_s ds\right].$$

On définit $A_T := \left\{-\frac{1}{T}\int_0^T \mathcal{L}\phi(X_s^{X_0})ds \leqslant -\mathbb{E}[\mathcal{L}\phi(X_0)] - \varepsilon\right\}$.
D'après un résultat de A. Guillin, C. Léonard, L. Wu et N. Yao (prépublication) on a $\mathbb{P}(A_T) \leqslant \exp\left(-\frac{c\varepsilon^2 T}{\delta^2}\right)$. Cette inégalité repose sur le fait que ν vérifie une inégalité de Poincaré (de constante de Poincaré 1/c).
On montre alors $\mathbb{Q}_T(A_T) \overset{T\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Remarque

Ces résultats restent vrais si $\sigma(x) = \sqrt{2}\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0_{d-k} \end{pmatrix}$ et $F_k := \left\{x \in \mathbb{R}^d / x_{k+1} = \ldots = x_d = 0\right\}$ est stationnaire pour ∇U.

Le problème de contrôle ergodique optimal

Soit U un espace métrique séparable. un contrôle ρ est un processus progressivement mesurable à valeur dans U. Soient $R : U \to \mathbb{R}^d$ et $L : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{1\times d} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues bornées. On suppose L uniformément lipschitz par rapport à sa première variable.

Le problème de contrôle ergodique optimal

Soit U un espace métrique séparable. un contrôle ρ est un processus progressivement mesurable à valeur dans U. Soient $R : U \to \mathbb{R}^d$ et $L : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{1\times d} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues bornées. On suppose L uniformément lipschitz par rapport à sa première variable. Les contrôles ergodiques sont

$$I(x,\rho) = \limsup_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\mathbb{E}^{\rho,T}\left[\int_0^T L(X_s^x,\rho_s)ds + \int_0^T [g(X_s^x)-\mu]dK_s^x\right],$$

$$J(x,\rho) = \limsup_{T\to+\infty} \frac{\mathbb{1}_{\mathbb{E}^{\rho,T}[K_T^x]>0}}{\mathbb{E}^{\rho,T}[K_T^x]}\mathbb{E}^{\rho,T}\left[\int_0^T [L(X_s^x,\rho_s)-\lambda]ds + \int_0^T g(X_s^x)dK_s^x\right],$$

avec $\Gamma_T^\rho = \exp\left(\int_0^T R(\rho_s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^T |R(\rho_s)|^2 ds\right)$ et $\mathbb{P}_T^\rho = \Gamma_T^\rho \mathbb{P}$.

Le problème de contrôle ergodique optimal

On définit l'hamiltonien de façon habituelle :

$$f(x,z) = \inf_{u \in U} \{L(x,u) + zR(u)\}, \quad x \in \mathbb{R}^d, z \in \mathbb{R}^{1\times d}.$$

Si, pour tous x, z l'infimum est atteint alors il existe une fonction mesurable $\gamma : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{1\times d} \to U$ telle que

$$f(x,z) = L(x,\gamma(x,z)) + zR(\gamma(x,z)).$$

On note que f est une fonction lipschitz et $f(.,0)$ est bornée.

Un premier résultat

Theorem

On se place sous les hypothèses d'existence d'une solution (Y, Z, λ) à μ fixé. Alors on a :

1. *Pour tout contrôle ρ, $I(x, \rho) \geqslant \lambda$ et l'égalité à lieu si et seulement si $L(X_t^x, \rho_t) + Z_t^x R(\rho_t) = f(X_t^x, Z_t^x)$, $\mathbb{P} -$ p.s. pour tout $t \geqslant 0$.*
2. *Si le minimum est atteint dans la définition de l'hamiltonien, alors le contrôle $\overline{\rho}_t = \gamma(X_t^x, Z_t)$ verifie $I(x, \overline{\rho}) = \lambda$.*

Un second résultat

Theorem

On se place sous les hypothèses d'existence d'une solution (Y, Z, μ) *à* λ *fixé lorsque* f *est non borné. Alors on a :*

1. *Pour tout contrôle* ρ, $J(x, \rho) \geqslant \mu$ *et l'égalité à lieu si et seulement si* $L(X_t^x, \rho_t) + Z_t^x R(\rho_t) = f(X_t^x, Z_t^x)$, $\mathbb{P} - p.s.$ *pour tout* $t \geqslant 0$.
2. *Si le minimum est atteint dans la définition de l'hamiltonien, alors le contrôle* $\overline{\rho}_t = \gamma(X_t^x, Z_t)$ *verifie* $I(x, \overline{\rho}) = \lambda$.

Démonstration

$$-dY_t^x = [f(X_t^x, Z_t^x) - \lambda]dt + [g(X_t^x) - \mu]dK_t^x - Z_t^x dW_t^\rho - Z_t^x R(\rho_t)dt.$$

Démonstration

$$-dY_t^x = [f(X_t^x, Z_t^x) - \lambda]dt + [g(X_t^x) - \mu]dK_t^x - Z_t^x dW_t^\rho - Z_t^x R(\rho_t)dt.$$

$$\begin{aligned} \mu\mathbb{E}^{\rho,T}[K_T^x] \quad &= \quad \mathbb{E}^{\rho,T}\left[Y_T^x - Y_0^x\right] + \mathbb{E}^{\rho,T}\left[\int_0^T [f(X_t^x, Z_t^x) - Z_t^x R(\rho_t) - L(X_t^x, \rho_t)]dt\right] \\ &\quad + \mathbb{E}^{\rho,T}\left[\int_0^T [L(X_t^x, \rho_t) - \lambda]dt\right] + \mathbb{E}^{\rho,T}\left[\int_0^T g(X_t^x)dK_t^x\right]. \end{aligned}$$

Démonstration

$$-dY_t^x = [f(X_t^x, Z_t^x) - \lambda]dt + [g(X_t^x) - \mu]dK_t^x - Z_t^x dW_t^\rho - Z_t^x R(\rho_t)dt.$$

$$\begin{aligned}\mu\mathbb{E}^{\rho,T}[K_T^x] \quad = \quad & \mathbb{E}^{\rho,T}\left[Y_T^x - Y_0^x\right] + \mathbb{E}^{\rho,T}\left[\int_0^T [f(X_t^x, Z_t^x) - Z_t^x R(\rho_t) - L(X_t^x, \rho_t)]dt\right] \\ & + \mathbb{E}^{\rho,T}\left[\int_0^T [L(X_t^x, \rho_t) - \lambda]dt\right] + \mathbb{E}^{\rho,T}\left[\int_0^T g(X_t^x)dK_t^x\right].\end{aligned}$$

$$\mu\mathbb{E}^{\rho,T}[K_T^x] + \mathbb{E}^{\rho,T}\left[Y_0^x - Y_T^x\right] \leqslant \mathbb{E}^{\rho,T}\left[\int_0^T [L(X_t^x, \rho_t) - \lambda]dt + \int_0^T g(X_t^x)dK_t^x\right].$$

Démonstration

$$\mu\mathbb{E}^{\rho,T}[K_T^x]+\mathbb{E}^{\rho,T}\left[Y_0^x - Y_T^x\right] \leqslant \mathbb{E}^{\rho,T}\left[\int_0^T [L(X_t^x,\rho_t)-\lambda]dt + \int_0^T g(X_t^x)dK_t^x\right].$$

Lemme

$$\lim_{T\to+\infty} \mathbb{E}^{\rho,T}[K_T^x] = +\infty, \quad \forall x \in \overline{G}.$$

Démonstration

$$\mu\mathbb{E}^{\rho,T}[K_T^x]+\mathbb{E}^{\rho,T}\left[Y_0^x - Y_T^x\right] \leqslant \mathbb{E}^{\rho,T}\left[\int_0^T [L(X_t^x,\rho_t)-\lambda]dt + \int_0^T g(X_t^x)dK_t^x\right].$$

Lemme

$$\lim_{T\to+\infty} \mathbb{E}^{\rho,T}[K_T^x] = +\infty, \quad \forall x \in \overline{G}.$$

Donc, pour $T > T_0$, $\mathbb{E}^{\rho,T}[K_T^x] > 0$ et

$$\mu+\frac{\mathbb{E}^{\rho,T}\left[Y_0^x - Y_T^x\right]}{\mathbb{E}^{\rho,T}[K_T^x]} \leqslant \frac{1}{\mathbb{E}^{\rho,T}[K_T^x]}\mathbb{E}^{\rho,T}\left[\int_0^T [L(X_t^x,\rho_t)-\lambda]dt + \int_0^T g(X_t^x)dK_t^x\right].$$

Démonstration

$$\mu\mathbb{E}^{\rho,T}[K_T^x]+\mathbb{E}^{\rho,T}\left[Y_0^x-Y_T^x\right]\leqslant\mathbb{E}^{\rho,T}\left[\int_0^T[L(X_t^x,\rho_t)-\lambda]dt+\int_0^T g(X_t^x)dK_t^x\right].$$

Lemme

$$\lim_{T\to+\infty}\mathbb{E}^{\rho,T}[K_T^x]=+\infty,\quad\forall x\in\overline{G}.$$

Donc, pour $T>T_0$, $\mathbb{E}^{\rho,T}[K_T^x]>0$ et

$$\mu+\frac{\mathbb{E}^{\rho,T}\left[Y_0^x-Y_T^x\right]}{\mathbb{E}^{\rho,T}[K_T^x]}\leqslant\frac{1}{\mathbb{E}^{\rho,T}[K_T^x]}\mathbb{E}^{\rho,T}\left[\int_0^T[L(X_t^x,\rho_t)-\lambda]dt+\int_0^T g(X_t^x)dK_t^x\right].$$

$$\mu\leqslant\limsup_{T\to+\infty}\frac{1}{\mathbb{E}^{\rho,T}[K_T^x]}\mathbb{E}^{\rho,T}\left[\int_0^T[L(X_t^x,\rho_t)-\lambda]dt+\int_0^T g(X_t^x)dK_t^x\right]=J(x,\rho).$$

Bibliographie

- M. Fuhrman, Y. Hu and G. Tessitore. Ergodic BSDEs and optimal ergodic control in Banach spaces. arXiv :0707.4214v1.
- G. Barles and F. Da Lio. On the boundary ergodic problem for fully nonlinear equations in bounded domains with general nonlinear Neumann boundary conditions. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*. 22(5) :521-541, 2005.
- A. Guillin, C. Léonard, L. Wu and N. Yao. Transportation-information inequalities for Markov process. arXiv :0706.4193v1.
- A. Richou. Ergodic BSDEs and related PDEs with Neumann boundary conditions. arXiv :0807.1521v1.