**UNIVERSITÉ DE BORDEAUX** **MASTER 1, 2016/2017**
**OUTILS DE SIMULATION**

# ESTIMATION DE QUANTILES

Soit $X$ une variable aléatoire réelle continue de densité de probabilité $f$ strictement positive, et de fonction de répartition $F$ continue et strictement croissante. Pour tout $\alpha \in ]0,1[$, on appelle quantile d'ordre $\alpha$ de $F$, l'unique racine $\theta_\alpha$ de l'équation

$$F(x) = \alpha.$$

En particulier, si $\alpha = 1/2$, $\theta_{1/2}$ correspond à la médiane de $X$, tandis que si $\alpha = 1/4$ ou $\alpha = 3/4$, $\theta_{1/4}$ et $\theta_{3/4}$ sont les premier et troisième quartiles de $X$. Pour une valeur de $\alpha$ donnée, on s'intéresse à l'estimation de la valeur $\theta_\alpha$.

Afin d'estimer la valeur $\theta_\alpha$, on dispose d'un $n$-échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ de même loi que $X$. Soit $(X_{(1)}, \ldots, X_{(n)})$ l'échantillon ordonné, de sorte que $X_{(1)} = \min(X_1, \ldots, X_n)$ et $X_{(n)} = \max(X_1, \ldots, X_n)$. On peut montrer la convergence presque sûre

$$\lim_{n \to \infty} X_{([n\alpha]+1)} = \theta_\alpha \qquad \text{p.s.}$$

ainsi que la normalité asymptotique

$$\sqrt{n}\Big(X_{([n\alpha]+1)} - \theta_\alpha\Big) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\Big(0, \frac{\alpha(1-\alpha)}{f^2(\theta_\alpha)}\Big).$$

Une autre stratégie pour estimer la valeur $\theta_\alpha$ est d'utiliser l'algorithme de Robbins-Monro donné par la relation récursive

$$\widehat{\theta}_{n+1} = \widehat{\theta}_n - \gamma_n \big(\mathrm{I}_{\{X_{n+1} \leqslant \widehat{\theta}_n\}} - \alpha\big)$$

où la valeur initiale $\widehat{\theta}_0$ est arbitrairement choisie et $\gamma_n = d/(c+n)$ avec $c > 0$ et $d > 0$. On peut montrer la convergence presque sûre

$$\lim_{n \to \infty} \widehat{\theta}_n = \theta_\alpha \qquad \text{p.s.}$$

De plus, si $f(\theta_\alpha) > 1/2$, on a également la normalité asymptotique

$$\sqrt{n}\Big(\widehat{\theta}_n - \theta_\alpha\Big) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\Big(0, \frac{\alpha(1-\alpha)}{2f(\theta_\alpha) - 1}\Big).$$

Créer deux codes Scilab permettant de visualiser la convergence presque sûre et le théorème limite centrale pour ces deux procédures d'estimation de $\theta_\alpha$. Utiliser les commandes `tic`, `toc` et `timer` afin de comparer les vitesses d'exécution et le temps CPU consommé de ces deux procédures d'estimation de $\theta_\alpha$. Choisir plusieurs valeurs de $\alpha$ et préciser la procédure d'estimation la plus efficace.