UNIVERSITÉ DE BORDEAUX MASTER 1, 2016/2017
OUTILS DE SIMULATION

LA MARCHE DE L'ÉLÉPHANT

La marche aléatoire de l'éléphant est une marche à mémoire sur $\mathbb{Z}$. A l'instant 0, l'éléphant est situé à l'origine, $S_0 = 0$. A l'instant 1, il va vers la droite au point 1 ou vers la gauche au point -1, avec la même probabilité 1/2, donc $S_1 = X_1 = 1$ ou bien $S_1 = X_1 = -1$ avec la même probabilité 1/2. Ensuite, à chaque instant $n \geqslant 2$, on choisit uniformément au hasard un instant k parmi les instants précédents $1, \ldots, n-1$, puis on détermine

$$X_n = \begin{cases} +X_k & \text{avec probabilité} \quad p, \\ -X_k & \text{avec probabilité} \quad 1-p, \end{cases}$$

où le paramètre $p \in [0,1]$ est la mémoire de la chaîne de l'éléphant. La position de la chaîne de l'éléphant est alors donnée par

$$S_n = S_{n-1} + X_n.$$

Pour bien comprendre comment bouge l'éléphant, on a $S_2 = 2$ ou $S_2 = -2$ avec la même probabilité $p/2$ et $S_2 = 0$ avec probabilité $1-p$. De même, $S_3 = 3$ ou $S_3 = -3$ avec la même probabilité $p^2/4$ et $S_3 = 1$ ou $S_3 = -1$ avec la même probabilité $(1-p^2)/2$. Le cas particulier $p = 1/2$ correspond à la marche aléatoire simple symétrique, il n'y a pas d'effet mémoire.

Le comportement asymptotique de la chaîne de l'éléphant est étroitement lié à la trichotomie $0 \leqslant p < 3/4$, $p = 3/4$ et $3/4 < p \leqslant 1$. La chaîne de l'éléphant est dite sous-critique si la mémoire $0 \leqslant p < 3/4$, critique si $p = 3/4$, et super-critique si la mémoire $3/4 < p \leqslant 1$. Dans le cas sous-critique $0 \leqslant p < 3/4$, on peut montrer, via la loi forte des grands nombres pour les martingales, que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = 0 \qquad \text{p.s.}$$

De plus, on a également le théorème limite centrale

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\Big(0, \frac{1}{3-4p}\Big).$$

Dans le cas critique $p = 3/4$, on a également

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = 0 \qquad \text{p.s.}$$

et

$$\frac{S_n}{\sqrt{n \log n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

Enfin, dans le cas super-critique $3/4 < p \leqslant 1$, on peut montrer qu'il existe une variable aléatoire réelle Z non nulle p.s. telle que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n^{2p-1}} = Z \qquad \text{p.s.}$$

Créer un code Scilab permettant de simuler la marche de l'éléphant et de visualiser les convergences p.s. et normalités asymptotiques dans les trois situations décrites ci-dessus, où la mémoire p est affectée par l'utilisateur. Que se passe-t-il si l'on remplace le tirage uniforme de l'instant k par un tirage dépendant des sites déjà visités par l'éléphant ?