UNIVERSITÉ DE BORDEAUX **MASTER 1, 2016/2017**
OUTILS DE SIMULATION

BLACK-SCHOLES DISCRET

L'évolution d'une action boursière peut être modélisée par le processus autorégressif

$$X_{n+1} = (1+m)X_n + \sigma X_n \varepsilon_{n+1}$$

où la valeur initiale de l'action $X_0 = x$ est strictement positive et (ε_n) est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Rademacher $\mathcal{R}(1/2)$. Les paramètres m et σ sont le taux d'actualisation et la volatilité de l'action. Ils satisfont l'inégalité $|\sigma| < 1 + m$. On estime le taux d'actualisation m par l'estimateur des moindres carrés

$$\widehat{m}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{(X_k - X_{k-1})}{X_{k-1}}.$$

Vérifier que

$$\widehat{m}_n - m = \frac{\sigma}{n} \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k.$$

En déduire que $\widehat{m}_n$ converge p.s. vers m et que l'on a le théorème limite centrale

$$\sqrt{n}(\widehat{m}_n - m) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

Créer un premier code Scilab permettant de visualiser la convergence presque sûre de $\widehat{m}_n$ vers m ainsi que le théorème limite centrale, où les paramètres m et σ, et la valeur initiale x, sont affectés par l'utilisateur. On propose ensuite d'estimer le carré de la volatilité σ^2 par

$$\widehat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{(X_k - X_{k-1} - \widehat{m}_{k-1} X_{k-1})^2}{X_{k-1}^2}$$

ou bien

$$\widetilde{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{(X_k - X_{k-1} - \widehat{m}_n X_{k-1})^2}{X_{k-1}^2}.$$

Etudier les propriétes asymptotiques de ces deux estimateurs. Créer un second code Scilab permettant de visualiser la loi forte des grands nombres et le théorème limite centrale associés à $\widehat{\sigma}_n^2$ et $\widetilde{\sigma}_n^2$. Quel est selon vous l'estimateur de σ^2 le plus performant ?