UNIVERSITÉ DE BORDEAUX **MASTER 1, 2016/2017**
OUTILS DE SIMULATION

LOIS DE VALEURS EXTRÊMES

Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des variables aléatoires i.i.d. On note $(X_{(1,n)}, X_{(2,n)}, ..., X_{(n,n)})$ le réarrangement dans l'ordre croissant du vecteur aléatoire $(X_1, ..., X_n)$.

Nous nous intéressons ici au maximum $M_n = \max_{i\in\{1,...,n\}} X_i = X_{(n,n)}$. Plus précisément, on cherche des suites déterministes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que la suite $(a_n^{-1}(M_n - b_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une limite non dégénérée. On a en particulier les résultats suivants.

- Si $X_i \sim \mathcal{U}([0,\theta])$ avec $\theta > 0$ un paramètre, alors la suite $(n(M_n/n-1))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi de Weibull de paramètre 1. La loi de Weibull de paramètre $\alpha > 0$, notée $\mathcal{W}(\alpha)$, a pour fonction de répartition
$$\Psi_\alpha(x) = e^{-(-x)^\alpha}\mathbb{1}_{x<0} + \mathbb{1}_{x\geqslant 0}.$$
- Si $X_i \sim \mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$, alors la suite $(\lambda M_n - \log(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi de Gumbel. La loi de Gumbel, notée $\mathcal{G}$, a pour fonction de répartition $\lambda(x) = e^{-e^{-x}}$.
- Si $X_i \sim \mathcal{C}(1)$, alors la suite $(\pi M_n/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi de Fréchet de paramètre 1. La loi de Fréchet de paramètre $\alpha > 0$, notée $\mathcal{F}(\alpha)$, a pour fonction de répartition
$$\Phi_\alpha(x) = e^{-x^{-\alpha}}\mathbb{1}_{x>0}.$$
- Si X_i suit une loi $\mathcal{B}(p)$ avec $p \in]0,1[$, alors on ne peut pas trouver de suites déterministes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que la suite $(a_n^{-1}(M_n - b_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une limite non dégénérée.

Le théorème suivant nous dit que l'on ne peut pas obtenir n'importe quoi à la limite.

Théorème 0.1 *On suppose qu'il existe des suites déterministes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que la suite $(a_n^{-1}(M_n - b_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une limite non dégénérée. Alors, a une translation et un changement d'échelle près, la loi limite est soit une loi $\mathcal{W}(\alpha)$, soit une loi $\mathcal{G}$, soit une loi $\mathcal{F}(\alpha)$.*

Il est possible de regrouper ces trois lois en une seule famille de lois $\mathcal{H}(\xi)$ avec $\mathcal{H}(0) = \mathcal{G}$, $\mathcal{H}(-1/\alpha) = \mathcal{W}(\alpha)$ et $\mathcal{H}(1/\alpha) = \mathcal{F}(\alpha)$. On peut alors estimer le paramètre ξ à l'aide de l'estimateur suivant.

Théorème 0.2 *On suppose qu'il existe des suites déterministes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que la suite $(a_n^{-1}(M_n - b_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la loi $\mathcal{H}(\xi)$. On pose $\beta \in]0,1[$. Alors l'estimateur de Pickand*
$$\hat{\xi}_n := \frac{1}{\ln 2}\log\left(\frac{X_{(n-n^\beta+1,n)} - X_{(n-2n^\beta+1,n)}}{X_{(n-2n^\beta+1,n)} - X_{(n-4n^\beta+1,n)}}\right)$$

est un estimateur fortement consistant de ξ. De plus on a la normalité asymptotique suivante

$$\sqrt{n^{\beta}}\left(\hat{\xi}_n - \xi\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{\xi^2(\xi^{2\xi+1}+1)}{(2(2^{\xi}-1)\log(2))^2}\right).$$

Créer un code Scilab permettant de d'illustrer les convergences dans les différentes situations décrites ci-dessus.