# TD & TP II
# SIMULATION DE PROCESSUS ALÉATOIRES

## 1 Méthode du rejet.

**Exercice 1.** Soit $B \subset A$ deux sous ensembles de $\mathbb{R}^2$ de mesure de Lebesgue respectives $0 < b \leqslant a$. Soit $(X_n)$ une suite de vecteurs aléatoires de $\mathbb{R}^2$ indépendants et de même loi uniforme sur $A$. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $Y_n = \mathrm{I}_{\{X_n \in B\}}$.

1) Montrer que les variables aléatoires $(Y_n)$ sont indépendantes et de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ avec $p = b/a$.

2) En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$, $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

3) Montrer que la variable aléatoire $T = \inf\{n \geqslant 1 \ / \ X_n \in B\}$ suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ tandis que $X_T$ suit la loi uniforme sur $B$.

**Exercice 2.** Proposer une méthode pour simuler une variable aléatoire de loi uniforme sur le losange de centre zéro et dont les longueurs des diagonales sont $a > 0$ et $b > 0$.

**Exercice 3.** Soit $X$ une variable aléatoire réelle de densité de probabilité $f$. Si le vecteur $Z = (U, V)$ suit la loi uniforme sur le domaine

$$\mathcal{D} = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 < y < f(x)\Big\},$$

montrer que son abscisse $U$ et $X$ suivent la même loi.

**Exercice 4.** Soit $X$ une variable aléatoire réelle de densité de probabilité $f$. On suppose qu'il existe une constante $c \geqslant 1$ et une densité de probabilité $g$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leqslant cg(x)$. Soit $(U_n)$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mathcal{U}([0,1])$ et soit $(X_n)$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de densité $g$, indépendante de $(U_n)$. On pose

$$T = \inf\Big\{n \geqslant 1 \ / \ cU_n g(X_n) < f(X_n)\Big\}.$$

Montrer que la variable aléatoire $T$ et indépendante de $X_T$ et que $T$ suit la loi géométrique $\mathcal{G}(1/c)$. Vérifier que $X_T$ et $X$ suivent la même loi.

**Exercice 5.** Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(-x^2/2) \leqslant \sqrt{e}\exp(-|x|)$. En déduire une façon de simuler la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ avec la méthode du rejet via la loi exponentielle symétrique.

## 2 Loi Normale.

**Exercice 6.** Soient $U$ et $V$ deux variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{U}([0, 1])$. Si

$$X = \sqrt{-2\log U}\cos(2\pi V) \qquad \text{et} \qquad Y = \sqrt{-2\log U}\sin(2\pi V),$$

montrer que $X$ et $Y$ sont indépendantes et de loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

**Exercice 7.** La méthode polaire rejet permet de simuler la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Soit $U = (U_1, U_2)$ un vecteur aléatoire de loi uniforme sur le carré unité. On peut par la méthode du rejet simuler un vecteur aléatoire $V = (V_1, V_2)$ de loi uniforme sur le disque unité. On note $R$ et $\theta$ les coordonnées polaires de $V$.

1) Montrer que $R$ et $\theta$ sont indépendantes avec $R$ de loi Beta$(2,1)$ et $\theta$ de loi $\mathcal{U}([0,2\pi])$.

2) Vérifier que $X$ et $Y$ sont indépendantes et de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ où

$$X = 2\sqrt{-\log R}\left(\frac{V_1}{R}\right) \qquad \text{et} \qquad Y = 2\sqrt{-\log R}\left(\frac{V_2}{R}\right).$$

# 3 Processus de Poisson.

On appelle processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$, une famille $(N_t)$ de variables aléatoires définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, dont les trajectoires sur $\mathbb{R}^+$ sont croissantes, constantes par morceaux, continues à droite, avec limites à gauche, satisfaisant les propriétés suivantes :

a) $N_0 = 0$,
b) Pour tout $t \geqslant 0$, la variable aléatoire $N_t$ suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda t)$,
c) Pour tout $s, t \geqslant 0$, les variables aléatoires $N_{t+s} - N_t$ et $N_t$ sont indépendantes.

**Exercice 8.** Soit $(X_n)$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Soit $N_0 = 0$ et pour tout $t > 0$

$$N_t = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_{(S_n \leqslant t)},$$

1) Montrer que $(N_t)$ est un processus de Poisson d'intensité $\lambda$.

2) Trouver la loi des grands nombres et le théorème limite centrale associés à $(N_t)$.

# 4 Mouvement Brownien.

On appelle mouvement brownien sur $\mathbb{R}^+$, une famille $(B_t)$ de variables aléatoires définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indexée de manière continue sur $\mathbb{R}^+$, satisfaisant les propriétés suivantes

a) $B_0 = 0$,
b) Pour tout $t \geqslant 0$, la variable aléatoire $B_t$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0,t)$,
c) Pour tout $s, t \geqslant 0$, les variables aléatoires $B_{t+s} - B_t$ et $B_t$ sont indépendantes.

**Exercice 9.** Si $(B_t)$ un mouvement Brownien issu de zéro, vérifier que pour tout $s, t \geqslant 0$,

$$\mathrm{Cov}(B_s, B_t) = \min(s,t) \qquad \text{et} \qquad \mathbb{E}[(B_t - B_s)^2] = |t-s|.$$

**Exercice 10.** Soit $(B_t)$ un mouvement Brownien issu de zéro. Pour tout $0 < t_1 < \cdots < t_n$ avec $t_0 = 0$, on a l'égalité

$$(B_{t_1}, B_{t_2}, \ldots, B_{t_n}) = (Z_1, Z_1 + Z_2, \ldots, Z_1 + \cdots + Z_n)$$

où les variables aléatoires $(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$ sont indépendantes avec $Z_k = B_{t_k} - B_{t_{k-1}}$ de loi normale $\mathcal{N}(0, t_k - t_{k-1})$. En déduire une manière de simuler une trajectoire d'un mouvement Brownien.