Université de Bordeaux
Master 2
2014/15

Compléments sur les processus de Poisson

1 Propriétés de la loi exponentielle

Propriété 1.1 (Absence de mémoire de la loi exponentielle) *Une variable aléatoire positive non nulle S suit une loi exponentielle si et seulement si elle a la propriété d'absence de mémoire*

$$\mathbb{P}(S > s + t | S > s) = \mathbb{P}(S > t)$$

pour tous $s, t \geqslant 0$.

Preuve. Supposons tout d'abord que S suit une loi exponentielle de paramètre λ. On a

$$\mathbb{P}(S > s + t | S > s) = \frac{\mathbb{P}(S > s + t, S > s)}{\mathbb{P}(S > s)} = e^{-\lambda t} = \mathbb{P}(S > t).$$

Réciproquement, supposons que S vérifie la propriété d'absence de mémoire. On pose $g(t) = \mathbb{P}(S > t)$ pour tout $t \geqslant 0$. On a que g est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et vérifie $\lim_{t \to 0} g(t) = 1$ et $\lim_{t \to +\infty} g(t) = 0$. De plus,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S > s + t | S > s) &= \frac{\mathbb{P}(S > s + t, S > s)}{\mathbb{P}(S > s)} = \frac{g(s + t)}{g(s)}, \\ \mathbb{P}(S > t) &= g(t), \end{aligned}$$

d'où $g(s)g(t) = g(s + t)$ pour tous $s, t \geqslant 0$. On conclut à l'aide du lemme suivant que $g(t) = e^{-\lambda t}$: S suit donc une loi exponentielle. □

Lemme 1.1 *Soit $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction multiplicative (c'est-à-dire $g(s)g(t) = g(s + t)$ pour tous $s, t \geqslant 0$), décroissante et vérifiant $\lim_{t \to 0} g(t) = 1$ et $\lim_{t \to +\infty} g(t) = 0$. Alors il existe $\lambda > 0$ tel que $g(t) = e^{-\lambda t}$ pour tout $t \geqslant 0$.*

Preuve. Soit n un entier positif. On a

$$g(n) = g(1 + ... + 1) = g(1)^n$$

par la propriété de multiplicativité. Soit maintenant un entier n strictement positif, alors on a

$$g(1) = g\left(\frac{1}{n} + ... + \frac{1}{n}\right) = g\left(\frac{1}{n}\right)^n,$$

d'où $g(1/n) = g(1)^{1/n}$. On en déduit que pour tout nombre rationnel positif $r = p/q$ on a $g(r) = g(p/q) = g(1)^{p/q}$. Soit maintenant un réel positif t quelconque. Il existe une suite croissante $(r_n)_{n\geqslant 0}$ et une suite décroissante $(s_n)_{n\geqslant 0}$ de rationnels convergeant vers t telles que $r_n \leqslant t \leqslant s_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a alors pour tout n

$$g(r_n) \leqslant g(t) \leqslant g(s_n).$$

Comme r_n et s_n sont rationnels, on en déduit

$$g(1)^{r_n} \leqslant g(t) \leqslant g(1)^{s_n}.$$

Finalement, comme g est monotone, on en déduit en passant à la limite dans l'inégalité ci-dessus que $g(t) = g(1)^t$ pour tout réel positif. Comme $\lim_{t\to 0} g(t) = 1$ et $\lim_{t\to+\infty} g(t) = 0$, on a nécessairement $0 < g(1) < 1$. On pose $\lambda = -\log(g(1)) > 0$ et on a le résultat : $g(t) = e^{-\lambda t}$ pour tout réel t positif. □

2 Définitions équivalentes du processus de Poisson

Théorème 2.1 *Soit $(T_n)_{n\geqslant 1}$ un processus ponctuel sur $\mathbb{R}^+$, $(N_t)_{t\geqslant 0}$ sa fonction aléatoire de comptage et $\lambda > 0$. Alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *(N_t) est un processus de Poisson d'intensité λ.*
2. *Les accroissements de $(N_t)_{t\geqslant 0}$ sont indépendants et on a les convergences uniformes en t lorsque h tend vers 0*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_{t+h} - N_t = 0) &= 1 - \lambda h + o(h)\\ \mathbb{P}(N_{t+h} - N_t = 1) &= \lambda h + o(h).\end{aligned}$$

3. *Les temps d'attente entre les sauts $(S_n)_{n\geqslant 1}$ sont indépendants et identiquement distribués de loi exponentielle de paramètre λ.*

Preuve. On a vu dans le cours que $1 \Rightarrow 2$ et $1 \Rightarrow 3$. Il suffit donc de montrer que $3 \Rightarrow 2$ et $2 \Rightarrow 1$ pour avoir toutes les équivalences. Supposons que 3 est vraie et essayons de montrer 2. On va commencer par montrer que sous cette hypothèse, pour tout instant $s \geqslant 0$, le processus $N_t^s = N_{t+s} - N_s$ est indépendant de $(N_r, 0 \leqslant r \leqslant s)$ et a des temps d'attente (S_n^s) indépendants et identiquement distribués de loi $\mathcal{E}(\lambda)$. Comme N_s ne peut prendre que des valeurs entières, il suffit de montrer ce résultat conditionnellement à $N_s = i$ pour un entier i quelconque. On a alors $S_1^s = S_{i+1} - (s - T_i)$ et $S_n^s = S_{n+1}$ pour $n \geqslant 2$. Pour $n \geqslant 2$, les (S_n^s) sont donc bien indépendants et identiquement distribués de loi $\mathcal{E}(\lambda)$ et indépendants du passé $(N_r, 0 \leqslant r \leqslant s)$. Calculons maintenant la loi de S_1^s. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_1^s > t | N_s = i) &= \mathbb{P}(S_{i+1} > t + s - T_i | T_i \leqslant s, S_{i+1} > s - T_i)\\ &= \frac{\mathbb{P}(S_{i+1} > t + s - T_i, T_i \leqslant s, S_{i+1} > s - T_i)}{\mathbb{P}(T_i \leqslant s, S_{i+1} > s - T_i)}\\ &= \frac{\mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{S_{i+1} > t+s-T_i, T_i \leqslant s, S_{i+1} > s - T_i\}} | T_i]]}{\mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{T_i \leqslant s, S_{i+1} > s - T_i\}} | T_i]]}\end{aligned}$$

Or S_{i+1} est indépendant de T_i, ainsi les propriétés de l'espérance conditionnelle donnent donc

$$\mathbb{P}(S_1^s > t | N_s = i) = \frac{\mathbb{E}[f(T_i)]}{\mathbb{E}[f(T_i)]},$$

avec

$$\begin{aligned} f(u) &= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{S_{i+1}>t+s-u, u\leqslant s, S_{i+1}>s-u\}}] \\ &= \mathbb{P}(S_{i+1} > t+s-u | S_{i+1} > s-u)\mathbb{P}(S_{i+1} > s-u)\mathbb{1}_{u\leqslant s} \\ &= \mathbb{P}(S_{i+1} > t)\mathbb{P}(S_{i+1} > s-u)\mathbb{1}_{u\leqslant s} \\ &= e^{-\lambda t}e^{-\lambda(s-u)}\mathbb{1}_{u\leqslant s} \end{aligned}$$

par la propriété d'absence de mémoire de la loi exponentielle, et

$$\begin{aligned} g(u) &= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{u\leqslant s, S_{i+1}>s-u\}}] \\ &= \mathbb{P}(S_{i+1} > s-u)\mathbb{1}_{u\leqslant s} \\ &= e^{-\lambda(s-u)}\mathbb{1}_{u\leqslant s}. \end{aligned}$$

Ainsi on obtient

$$\mathbb{P}(S_1^s > t | N_s = i) = \frac{\mathbb{E}[e^{-\lambda t}e^{-\lambda(s-T_i)}\mathbb{1}_{T_i\leqslant s}]}{\mathbb{E}[e^{-\lambda(s-T_i)}\mathbb{1}_{T_i\leqslant s}]} = e^{-\lambda t},$$

donc S_1^s suit bien une loi exponentielle de paramètre λ. On obtient de même l'indépendance du passé en montrant que

$$\mathbb{P}(S_1^s > t, S_1 > s_1, ..., S_i > s_i | N_s = i) = e^{-\lambda t}\mathbb{P}(S_1 > s_1, ..., S_i > s_i | N_s = i).$$

On en déduit en particulier que les accroissements de (N_t) sont indépendants sous la condition 3. Par ailleurs, $(N_{t+h} - N_t)$ et (N_h) ont la même loi, donc on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_{t+h} - N_t \geqslant 1) &= \mathbb{P}(N_h \geqslant 1) = \mathbb{P}(T_1 \leqslant h) = \mathbb{P}(S_1 \leqslant h) \\ &= 1 - e^{-\lambda h} = \lambda h + o(h) \end{aligned}$$

uniformément en t, lorsque h est petit. De même on a

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \mathbb{P}(N_{t+h} - N_t \geqslant 2) &= \mathbb{P}(N_h \geqslant 2) = \mathbb{P}(T_2 \leqslant h) \\ &\leqslant \mathbb{P}(S_1 \leqslant h, S_2 \leqslant h) = (1 - e^{-\lambda h})^2 = o(h) \end{aligned}$$

uniformément en t, lorsque h est petit. Par différence, on en déduit que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_{t+h} - N_t = 1) &= \mathbb{P}(N_{t+h} - N_t \geqslant 1) - \mathbb{P}(N_{t+h} - N_t \geqslant 2) = \lambda h + o(h) \\ \mathbb{P}(N_{t+h} - N_t = 0) &= 1 - \mathbb{P}(N_{t+h} - N_t \geqslant 1) = 1 - \lambda h + o(h), \end{aligned}$$

ce qui montre la propriété 2.

Supposons maintenant que 2 est vraie et essayons de montrer 1. On a l'indépendance des accroissements par définition de 2, il reste donc à montrer la stationnarité. Pour cela, on va calculer la fonction caractéristique de $N_{t+s} - N_t$ et vérifier qu'elle ne dépend pas de t. On a, pour tout $u \in \mathbb{R}$, en utilisant l'indépendance des accroissements,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{iu(N_{t+s}-N_t)}] &= \mathbb{E}[\prod_{j=1}^n e^{iu(N_{t+j\frac{s}{n}} - N_{t+(j-1)\frac{s}{n}})}] = \prod_{j=1}^n \mathbb{E}[e^{iu(N_{t+j\frac{s}{n}} - N_{t+(j-1)\frac{s}{n}})}] \\ &= \prod_{j=1}^n \Big(1 - \lambda\frac{s}{n} + e^{iu}\lambda\frac{s}{n} + o(1/n)\Big) \end{aligned}$$

où $o(1/n)$ est uniforme par rapport à j. On a donc

$$\mathbb{E}[e^{iu(N_{t+s}-N_t)}] = e^{\lambda s(e^{iu}-1)} + o(1)$$

puis, en faisant tendre n vers l'infini, on obtient finalement que $N_{t+s} - N_t \sim \mathcal{P}(\lambda s)$ ce qui montre 1. $\square$