MASTER 1, 2012 5/12/12

PARTIEL
CORRECTION

PROBLEME 1

1) $t \in \mathbb{R}$, (la fonction caractéristique d'une v.a. est bien définie pour tout $t \in \mathbb{R}$)

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{itk} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}} = e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

ϕ_X est $\mathcal{C}^\infty$ donc en particulier X a tous ses moments finis.

En particulier

$$\phi_X'(0) = i\mathbb{E}[X] \quad \text{et} \quad \phi_X''(0) = -\mathbb{E}[X^2]$$

$$\phi_X'(t) = i\lambda e^{it} e^{\lambda(e^{it}-1)} \quad \text{donc} \quad \mathbb{E}[X] = \lambda$$

$$\phi_X''(t) = -\lambda e^{it} e^{\lambda(e^{it}-1)} - \lambda^2 e^{2it} e^{\lambda(e^{it}-1)} \quad \text{donc } \mathbb{E}[X^2] = \lambda^2 + \lambda$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \lambda$$

2) $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ X et Y indépendantes

$\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\phi_{X+Y}(t) = \mathbb{E}[e^{it(X+Y)}] = \mathbb{E}[e^{itX} e^{itY}] = \mathbb{E}[e^{itX}]\mathbb{E}[e^{itY}] \quad \text{(indépendance)}$$

$$= \phi_X(t)\phi_Y(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)} e^{\mu(e^{it}-1)} = e^{(\lambda+\mu)(e^{it}-1)}$$

fonction caractéristique de la loi $\mathcal{P}(\lambda+\mu)$

Donc $X+Y \sim \mathcal{P}(\lambda+\mu)$.

3)

a) Lorsque $X=n$ on sait qu'il y a n personnes dans la file et chaque personne à une probabilité $1/2$ d'être un homme de manière indépendante les unes des autres.

Ainsi, lorsque $X=n$, G suit une loi $\mathcal{B}(n,1/2)$ (on compte le nombre "d'expériences" réussies lorsqu'on réalise n expériences indépendantes et chaque expérience a une probabilité $1/2$ de réussir).

Donc $P(G=k \mid X=n) = C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \frac{C_n^k}{2^n}$ lorsque $k \leq n$

et $P(G=k \mid X=n) = 0$ si $k>n$.

b)
$$P(G=k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(G=k \text{ et } N=n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(G=k \mid N=n) P(N=n)$$
$$= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{C_n^k}{2^n} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^n \frac{e^{-\lambda}}{n!}$$
$$= \left(\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(\lambda/2)^{n-k}}{(n-k)!}\right) \frac{(\lambda/2)^k e^{-\lambda}}{k!} = \frac{(\lambda/2)^k e^{-\lambda}}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda/2)^n}{n!}$$
$$= \frac{(\lambda/2)^k e^{-\lambda}}{k!} e^{\lambda/2} = e^{-\lambda/2} \frac{(\lambda/2)^k}{k!}$$

Donc $G \sim \mathcal{P}(\lambda/2)$

PROBLEME II

1) On note $p = P(\varepsilon=1)$ $\quad P(\varepsilon=-1) = 1-p$

$$P(X\in[a,b], \varepsilon=1) = P(X\in[a,b])P(\varepsilon=1) \quad \text{(indépendance}$$
$$= p\int_a^b f(t)\,dt$$

$$P(X\in[a,b], \varepsilon=-1) = P(X\in[a,b])P(\varepsilon=-1)$$
$$= (1-p)\int_a^b f(t)\,dt$$

2)

2) Pour tous $a<b$ on a

$$P(Y\in[a,b]) = P(\varepsilon X\in[a,b]) = P(X\in[a,b], \varepsilon=1) + P(X\in[-b,-a], \varepsilon=-1)$$

$$= p\int_a^b f(t)\,dt + (1-p)\int_{-a}^{-b} f(t)\,dt$$

$$= p\int_a^b f(t)\,dt + (1-p)\int_a^b f(-t)\,dt = \int_a^b p f(t) + (1-p) f(-t)\,dt$$

Donc Y est à densité et la densité de Y vaut $g(t) = p f(t) + (1-p) f(-t)$

3) X et Y ont la même densité ssi $g(t) = f(t)$ pour presque tout $t\in\mathbb{R}$

ssi $p f(t) + f(-t)(1-p) = f(t)$

ssi $(1-p) f(t) = (1-p) f(-t)$

ssi $p = 1$

ou $f(t) = f(-t)$ (f est symétrique) pour presque tout $t\in\mathbb{R}$.

PROBLEME III

1) La loi de X_B correspond à la loi du premier succès lorsque l'on itère de façon indépendante l'expérience « j'essaye d'ouvrir la porte avec une clé tirée au hasard parmi les k clés ».

$X_B \sim \mathcal{G}(1/k)$ $\quad P(X_B = i) = \frac{1}{k}\left(1-\frac{1}{k}\right)^{i-1}$ pour $i\in\mathbb{N}^*$

2) $P(X_A = 1) = \frac{1}{k}$

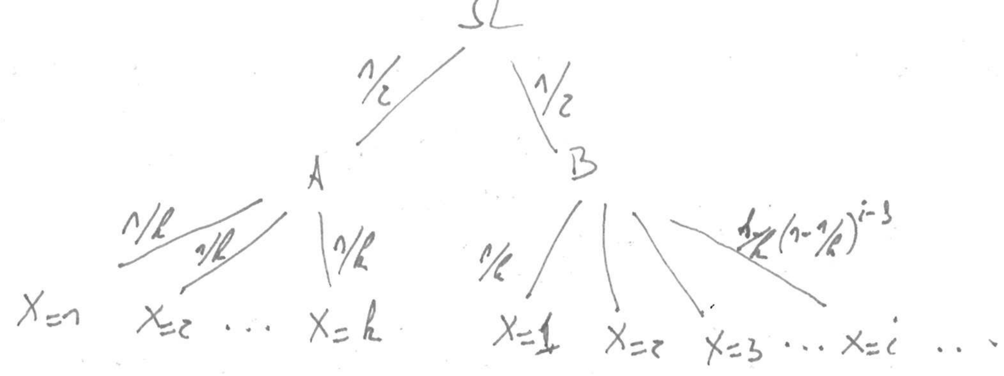
$P(X_A = 2) = \left(1-\frac{1}{k}\right)\frac{1}{k-1} = \frac{1}{k}$ (la première clé n'est pas la bonne et pour le second tirage il reste $k-1$ clés)

$P(X_A = 3) = \left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{1}{k-1}\right)\frac{1}{k-2} = \frac{k-1}{k}\,\frac{k-2}{k-1}\,\frac{1}{k-2} = \frac{1}{k}$

De façon identique on montre que $P(X_A = j) = \frac{1}{k}$ pour tout $j\in[\![1,k]\!]$

$X_A \sim \mathcal{U}([\![1,k]\!])$

3) X : nb d'essais pour ouvrir la porte



$$p_n = P(B \mid X=n) = \frac{P(B \cap X=n)}{P(B \cap X=n) + P(A \cap X=n)}$$

lorsque $n > k$, $P(A \cap X=n) = 0$ donc $p_n = 1$ (c'est logique...)

lorsque $n \leq k$,

par ~~Bll~~ $$p_n = \frac{\frac{1}{k}\left(1-\frac{1}{k}\right)^{n-1} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{k}\left(1-\frac{1}{k}\right)^{n-1} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{k} \times \frac{1}{2}} = \frac{\left(1-\frac{1}{k}\right)^{n-1}}{\left(1-\frac{1}{k}\right)^{n-1} + 1}$$