MASTER1, 2013

22/11/13

(1)

PARTIEL
CORRECTION

PROBLEME 1

Soit $s \in [-1,1]$, on note $G_X(s)$ la fonction génératrice de X au point s.

$$G_X(s) = \mathbb{E}[s^X] = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k)\, s^k = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1} s^k = ps \sum_{k=0}^{+\infty} [(1-p)s]^k$$

comme $|(1-p)s| < 1$, on a

$$G_X(s) = \frac{ps}{1-(1-p)s}$$

Le calcul précédent est en fait valable pour $|s| < \frac{1}{1-p}$.

PROBLEME II

1) f est une fonction positive, De plus

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} t e^{-t}\,dt \overset{IPP}{=} \left[-te^{-t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = 0 + \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1$$

Donc f est une densité.

2) T est une variable aléatoire positive donc $\mathbb{E}[T]$ existe (finie ou infinie).

$$\mathbb{E}[T] = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t}\,dt \overset{IPP}{=} \left[-t^2 e^{-t}\right]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} t e^{-t}\,dt = 0 + 2\int_{\mathbb{R}} f(t)\,dt = 2\times 1 = 2$$

3) Soit A_i l'évènement "le composant i fonctionne durant au moins six ans".

$$\mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(T \geq 6) = \int_6^{+\infty} f(t)\,dt = \int_6^{+\infty} t e^{-t}\,dt = \left[-te^{-t}\right]_6^{+\infty} + \int_6^{+\infty} e^{-t}\,dt$$

$$= 6e^{-6} + \left[-e^{-t}\right]_6^{+\infty} = 7e^{-6} \simeq 0{,}0174$$

Puisque les six composants sont indépendants et nécessaires au fonctionnement, la probabilité que l'appareil fonctionne durant au moins six ans à partir de sa mise en marche est donc :

$$p = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{6} A_i\right) = \prod_{i=1}^{6} \mathbb{P}(A_i) = \left(7e^{-6}\right)^6 = 2,73 \times 10^{-11}$$

PROBLEME III

1) X et Y sont des v.a. discrètes à valeur dans $[\![1,n]\!]$ donc (X,Y) est un vecteur aléatoire discret à valeurs dans $[\![1,n]\!]$.

Soient $i \in [\![1,n]\!]$, $j \in [\![1,n]\!]$.

$\mathbb{P}(X=i, Y=j) = 0$ si $j > i$ car si on a tiré la boîte i, $Y \in [\![1,i]\!]$ et donc $Y \leq i$.

Sinon, $j \leq i$ et on a

$\mathbb{P}(X=i, Y=j) = \mathbb{P}(Y=j \mid X=i)\,\mathbb{P}(X=i)$

$\mathbb{P}(X=i) = 1/n$ car le tirage est uniforme parmi les n boîtes

et $\mathbb{P}(Y=j \mid X=i) = \frac{1}{i}$ car le tirage est uniforme parmi les i boules.

Donc $\mathbb{P}(X=i, Y=j) = \begin{cases} \frac{1}{ni} & \text{si } 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

2) $Y(\Omega) = [\![1,n]\!]$. Pour $j \in [\![1,n]\!]$, on a

$$\mathbb{P}(Y=j) = \sum_{i=j}^{n} \mathbb{P}(Y=j, X=i) = \sum_{i=j}^{n} \frac{1}{ni}$$

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{j=1}^{m} j\,\mathbb{P}(Y=j) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=j}^{m} \frac{j}{mi} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=j}^{m}\frac{j}{i}$$

on peut intervertir les sommations en faisant attention aux bornes !

$$\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{i}\frac{j}{i} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{i}\left(\sum_{j=1}^{i} j\right) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{i}\,\frac{i(i+1)}{2} = \frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{m}(i+1)$$

$$= \frac{1}{2m}\left(\frac{m(m+1)}{2} + m\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{m+3}{2}\right) = \frac{m+3}{4}.$$

3) les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes. En effet

$$\mathbb{P}(X=1, Y=m) = 0 \neq \mathbb{P}(X=1)\,\mathbb{P}(Y=m)$$

car $\mathbb{P}(X=1) = 1/m$ et $\mathbb{P}(Y=m) = \frac{1}{m^2}$.

PROBLEME IV

1) X et Y sont indépendantes donc (X,Y) est un vecteur aléatoire à densité et

$$f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x)\,f_Y(y) = \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2} \qquad x,y \in \mathbb{R}^2.$$

2) $(U,V) = r_\theta(X,Y)$

$$r_\theta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longmapsto (x\cos\theta - y\sin\theta,\ x\sin\theta + y\cos\theta) = (u,v)$$

$$r_\theta^{-1} = r_{-\theta} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(u,v) \longmapsto (x,y) = (u\cos\theta + v\sin\theta,\ -u\sin\theta + v\cos\theta)$$

r_θ et r_θ^{-1} sont $\mathcal{C}^1$ donc r_θ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

Donc (U,V) est un vecteur à densité.

$$J_{r_\theta^{-1}}(u,v) = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 .$$

$$f_{(U,V)}(u,v) = f_{(X,Y)}\left(r_\theta^{-1}(u,v)\right) \left|J_{r_\theta^{-1}}(u,v)\right|$$

$$= f_{(X,Y)}\left(u\cos\theta + v\sin\theta , -u\sin\theta + v\cos\theta\right) \times 1$$

$$= \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}\left((u\cos\theta + v\sin\theta)^2 + (-u\sin\theta + v\cos\theta)^2\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(u^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + v^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\right)\right)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)}_{f_U(u)} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right)}_{f_V(v)}$$

donc U et V sont indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0,1)$.