MMSE M1
Spé 2

Correction Examen Terminal
Probabilités

Problème 1

1) X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes et à densité donc (X,Y) est un vecteur à densité et la densité est donnée par

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y) = e^{-x-y} \mathbb{1}_{x \geq 0} \mathbb{1}_{y \geq 0}$$

2)
$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x\, f_X(x)\, dx = \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx \overset{IPP}{=} \left[-xe^{-x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x} dx$$
$$= 0 + \left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty} = 1$$

l'espérance est linéaire donc

$\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$. De plus Y et X ont même loi donc

$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$ et $\mathbb{E}[X+Y] = 2\mathbb{E}[X] = 2$

3) $U = \min\{X, 1/X\}$. U est bien définie dès que $X \neq 0$.

Or X est une v.a. à densité donc $\mathbb{P}(X=0)=0$ et donc U est bien définie p.s.

~~Remarque~~ ~~XE~~

Rappelons que X est à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$ p.s. donc U est également à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$.

Lorsque $X \in]0,1]$, alors $\frac{1}{X} \in [1,+\infty[$ et donc $U = X \in]0,1]$

Lorsque $X \in [1,+\infty[$, alors $1/X \in]0,1]$ et donc $U = \frac{1}{X} \in]0,1]$

Donc U est à valeurs dans $]0,1]$.

4) Soit $t \in \mathbb{R}$. On a, d'après 3),

$$F_U(t) = P(U \leq t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ 1 \text{ si } t \geq 1 \end{cases}$$

Si $t \in]0,1[$, alors

$$F_U(t) = P(U \leq t) = P(\min(X, 1/X) \leq t) = 1 - P(\min(X, 1/X) > t)$$

$$= 1 - P(X > t \text{ et } 1/X > t) = 1 - P(t < X < 1/t)$$

$$= 1 - \int_t^{1/t} e^{-x} dx = 1 - \left[-e^{-x}\right]_t^{1/t} = 1 + e^{-1/t} - e^{-t}$$

$$F_U(0^+) = \lim_{t \to 0^+} F_U(t) = 0$$

$$\text{Donc } F_U(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \leq 0 \\ 1 \text{ si } t \geq 1 \\ 1 + e^{-1/t} - e^{-t} \text{ si } t \in]0,1[\end{cases}$$

5) F_U est une fonction continue et dérivable sauf éventuellement en 0 et 1, donc U est une variable à densité, de densité

$$f_U(t) = F_U'(t) = \left(e^{-t} + \frac{1}{t^2} e^{-1/t}\right) \mathbb{1}_{]0,1[}(t).$$

Problème 2

1) (X_1, X_2, X_3) possède une densité sur $\mathbb{R}^3$ ssi $\det \Gamma \neq 0$.

or $\det \Gamma = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$ Donc ce vecteur aléatoire ne possède pas

de densité

2) (X_1, X_2) est une transformation linéaire du vecteur (X_1, X_2, X_3) donc (d'après le cours) c'est un vecteur gaussien. Il suffit maintenant de donner ses paramètres :

$$(X_1, X_2) \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} \mathbb{E}[X_1] \\ \mathbb{E}[X_2] \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathrm{Var}(X_1) & \mathrm{Covar}(X_1, X_2) \\ \mathrm{Covar}(X_1, X_2) & \mathrm{Var}(X_2) \end{pmatrix}\right)$$

$$\sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\right)$$

$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$ Donc (X_1, X_2) est un vecteur à densité sur $\mathbb{R}^2$.

3) $$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y \end{pmatrix}$ est une transformation linéaire de (X_1, X_2, X_3) donc c'est un vecteur gaussien et d'après le cours $\begin{pmatrix} X_1 \\ Y \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, A\Gamma {}^tA\right) = \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2-2a \\ 2-2a & 2(2-2a+a^2) \end{pmatrix}\right)$

4) $\begin{pmatrix} X_1 \\ Y \end{pmatrix}$ est un vecteur gaussien donc X_1 et Y sont indépendantes ssi $\mathrm{Covar}(X_1, Y) = 0$

ssi $2-2a = 0$ ssi $\underline{a=1}$.

Problème 3 :

1/ I_n est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$

$$\mathbb{P}(I_n = k) = \mathbb{P}(X_1^n = 0, \dots X_{k-1}^n = 0, X_k^n = 1)$$
$$= \mathbb{P}(X_1^n = 0)\,\mathbb{P}(X_2^n = 0) \dots \mathbb{P}(X_{k-1}^n = 0)\,\mathbb{P}(X_k^n = 1) \quad (\text{indépendance})$$
$$= \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{k-1} \frac{\lambda}{n}$$

$I_n \sim \mathcal{G}\left(\frac{\lambda}{n}\right)$

2) N_n est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\left\{ \frac{k}{n} \mid k \in \mathbb{N}^* \right\}$

$$\mathbb{P}\left(N_n = \frac{k}{n}\right) = \mathbb{P}(I_n = k) = \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{k-1} \frac{\lambda}{n} \quad \text{pour } k \in \mathbb{N}^*.$$

3) $$\phi_{N_n}(t) = \mathbb{E}\left[e^{itN_n}\right] = \mathbb{E}\left[e^{itI_n/n}\right] = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{itk/n} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{k-1} \frac{\lambda}{n}$$
$$= \frac{\lambda}{n}\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-1} \sum_{k=1}^{+\infty} \left[e^{it/n}\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)\right]^k = \frac{\lambda}{n} e^{it/n} \sum_{k=0}^{+\infty} \left[e^{it/n}\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)\right]^k$$
$$= \frac{\lambda}{n} e^{it/n} \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)e^{it/n}} \quad \text{car } \left|\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)e^{it/n}\right| = \left|1 - \frac{\lambda}{n}\right| < 1$$

4) On cherche la limite de $\phi_{N_n}(t)$ lorsque $n \to +\infty$.

$$1 - \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)e^{it/n} = 1 - \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)\left(1 + \frac{it}{n}\right) + \overset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\lambda}{n} - \frac{it}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Donc $n\left(1 - \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)e^{it/n}\right) = \lambda - it + o(1) \longrightarrow \lambda - it$ lorsque $n \to +\infty$

De plus $e^{it/n} \longrightarrow 1$ lorsque $n \to +\infty$

Donc $\phi_{N_n}(t) \xrightarrow{n \to +\infty} \dfrac{\lambda}{\lambda - it}$ (fonction caractéristique de la loi $\mathcal{E}(\lambda)$)

Donc N_n converge en loi vers la loi de fonction caractéristique $t \mapsto \dfrac{\lambda}{\lambda - it}$