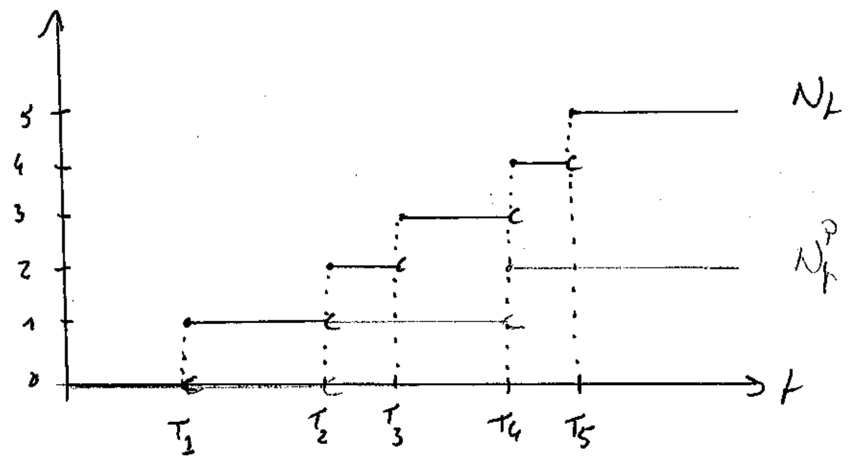
CORRECTION PARTIEL

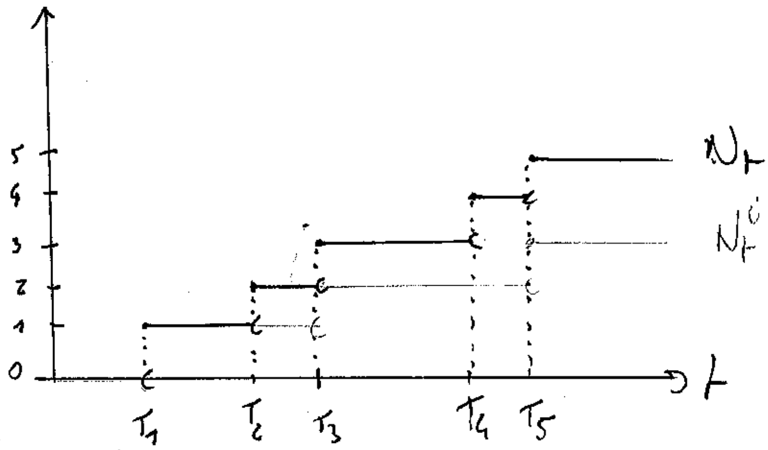
Exercice :

1)



Le premier temps de saut de $(N_t^p)_t$ vaut T_2 qui suit une loi $\Gamma(2,\lambda)$ qui n'est pas une loi exponentielle. Donc $(N_t^p)_t$ n'est pas un processus de Poisson.

2)



~~Le deuxième temps de saut de $(N_t^i)_t$ vaut T_3~~

Le deuxième temps inter-saut de $(N_t^i)_t$ vaut $T_3 - T_1$ et est la somme de deux v.a. indépendantes de loi exponentielle de même paramètre λ. Donc $T_3 - T_1$ suit une loi $\Gamma(2,\lambda)$ qui n'est pas une loi exponentielle et ainsi $(N_t^i)_t$ n'est pas un processus de Poisson.

Problème :

1/a) On sait que $(T_1 \leq t) = (N_t \geq 1)$.

Donc $(T_1 \leq t, N_T = 1) = (N_t \geq 1, N_T = 1) = (N_t = 1, N_T = 1)$ car $t \leq T$

$$= (N_t = 1, N_T - N_t = 0)$$

b) $\mathbb{P}(T_1 \le t \mid N_T = 1) = \dfrac{\mathbb{P}(T_1 \le t, N_T = 1)}{\mathbb{P}(N_T = 1)} = \dfrac{\mathbb{P}(N_t = 1, N_T - N_t = 0)}{\mathbb{P}(N_T = 1)}$

$$= \frac{\mathbb{P}(N_t = 1)\,\mathbb{P}(N_T - N_t = 0)}{\mathbb{P}(N_T = 1)} \quad \text{(accroissements indépendants)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(N_t = 1)\,\mathbb{P}(N_{T-t} = 0)}{\mathbb{P}(N_T = 1)} \quad \text{(stationnarité)}$$

or $N_t \sim \mathcal{P}(\lambda t)$ $\quad N_{T-t} \sim \mathcal{P}(\lambda(T-t))$ $\quad$ et $N_T \sim \mathcal{P}(\lambda T)$

Donc $\mathbb{P}(T_1 \le t \mid N_T = 1) = e^{-\lambda t}\dfrac{\lambda t}{1!}\, e^{-\lambda(T-t)} \times \dfrac{1!}{\lambda T e^{-\lambda T}} = \dfrac{t}{T}$

c) Conditionnellement à $(N_T = 1)$, la fonction de répartition de T_1 vaut

$$F(t) = \mathbb{P}(T_1 \le t \mid N_T = 1) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \le 0 \\ t/T & \text{si } t \in [0,T] \\ 1 & \text{si } t \ge T \end{cases}$$

Cette fonction de répartition est continue et est dérivable sauf en 0 et en 1, donc, conditionnellement à $(N_T = 1)$, T_1 est une v.a. continue de densité

$$f(t) = F'(t) = \frac{1}{T}\mathbb{1}_{[0,T]}(t)$$

On reconnaît la densité de la loi $\mathcal{U}([0,T])$.

2] a) $X = N_b - N_a$: le nombre de sauts dans l'intervalle $]a,b]$ est égal au nombre de sauts dans l'intervalle $[0,b]$ moins le nombre de sauts dans l'intervalle $[0,a]$.

$(N_t)_t$ est un processus de poisson, il est donc stationnaire et $N_b - N_a \sim N_{b-a} = N_u$.

Or on sait que $N_u \sim \mathcal{P}(\lambda u)$, donc $X \sim \mathcal{P}(\lambda u)$.

b) Pour les même raisons, on a $Y = N_a - N_0 + N_T - N_b$

$N_a - N_0 \sim \mathcal{P}(\lambda a)$

$N_T - N_b \sim N_{T-b} \sim \mathcal{P}(\lambda(T-b))$

De plus, $(N_a - N_0, N_b - N_a, N_T - N_b)$ sont indépendantes,

donc $N_a - N_0 + N_T - N_b \sim \mathcal{P}(\lambda(a+T-b)) = \mathcal{P}(\lambda(T-u))$

et X est indépendante de Y.

c) $$\mathbb{P}(X=k, X+Y=n) = \mathbb{P}(X=k, Y=n-k) = \mathbb{P}(X=k)\,\mathbb{P}(Y=n-k) \quad \text{car } X \text{ et } Y \text{ indépendantes}$$
$$= e^{-\lambda u}\frac{(\lambda u)^k}{k!}\, e^{-\lambda(T-u)}\frac{(\lambda(T-u))^{n-k}}{(n-k)!} = e^{-\lambda T}\frac{(\lambda u)^k(\lambda(T-u))^{n-k}}{k!\,(n-k)!}$$

d) $$\mathbb{P}(X=k \mid N_T=n) = \frac{\mathbb{P}(X=k, N_T=n)}{\mathbb{P}(N_T=n)} = \frac{\mathbb{P}(X=k, X+Y=n)}{\mathbb{P}(N_T=m)}$$
$$= e^{-\lambda T}\frac{(\lambda u)^k(\lambda(T-u))^{n-k}}{k!\,(n-k)!} \times \frac{n!}{e^{-\lambda T}(\lambda T)^n} \qquad \text{car } N_T \sim \mathcal{P}(\lambda T)$$
$$= \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\left(\frac{\lambda u}{\lambda T}\right)^k\left(\frac{\lambda(T-u)}{\lambda T}\right)^{n-k} = C_n^k\left(\frac{u}{T}\right)^k\left(1-\frac{u}{T}\right)^{n-k}$$

e) Chaque variable $Z_1, \dots Z_n$ a une probabilité $p = \int_I \frac{\mathbb{1}_{[0,T]}}{T}(t)\,dt$ de "tomber" dans l'intervalle I. On a $p = \int_a^b \frac{dt}{T} = \frac{u}{T}$.

Comme $Z_1, \dots Z_n$ sont indépendantes, le nombre de variables prenant leur valeur dans I suit une loi $\mathcal{B}(n,p)$. En particulier, la probabilité qu'il y ait exactement k variables prenant leur valeur dans I vaut :

$$C_n^k\, p^k(1-p)^{n-k} = C_n^k\left(\frac{u}{T}\right)^k\left(1-\frac{u}{T}\right)^{n-k}.$$

C'est la probabilité calculée à la question d).

nb : On vient de montrer que conditionnellement à $(N_T = n)$, les n instants de saut entre 0 et T se comportent comme des tirages de n v.a. indépendantes de loi $\mathcal{U}([0,T])$.

3) a) $(\overline{T_1 \leq t}) = (T_1 > t)$: le premier but a été inscrit après la date t.

Donc $(T_1 > t) =$ « il n'y a pas de but entre 0 et t » $= (X=0)$.

Ainsi $(T_1 \leq t) = (\overline{X=0})$.

$$P(T_1 \leq t \mid N_T = n) = P(\overline{X=0} \mid N_T=n) = 1 - P(X=0 \mid N_T=n)$$

$$= 1 - \left(1 - \frac{t}{T}\right)^n \quad \text{d'après la question 2)d)}$$

b) $P(T_n \leq t \mid N_T = n) = P(X = n \mid N_T = n)$

car $(T_n \leq t, N_T = n) = (N_t \geq n, N_T = n) = (N_t = n, N_T = n)$

Donc $P(T_n \leq t \mid N_T = n) = \left(\frac{t}{T}\right)^n$ d'après la question 2)d)

c) $P(T_1 \leq T/2 \mid N_T = 3) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0{,}875$

$P(T_3 \leq T/2 \mid N_T = 3) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0{,}125$