MASTER 2, 2015 ①

CORRECTION PARTIEL

Exercice 1:

1) Si $t<r$, $N_t = N_t^1 \sim \mathcal{P}(\lambda t)$ car N_t^1 est un processus de Poisson de intensité λ.

si $t \geq r$, $N_t = N_t^2 \sim \mathcal{P}(\lambda t)$ car N_t^2 est un processus de Poisson d'intensité λ.

2) $(N_t)_{t\geq 0}$ n'est pas un processus de Poisson car ce n'est pas un processus de comptage : au temps r, le processus peut sauter avec un saut différent de un avec une probabilité non nulle.

$N_{r+} - N_{r-} = N_r^2 - N_{r-}^1$ v.a. à valeurs dans $\mathbb{Z}$. En particulier, $\mathbb{P}\left(N_r^2 - N_{r-}^1\right) \in \mathbb{Z}\setminus\{0,1\}) > 0$.

3) *) Si $t<r$, $\tilde{N}_t = N_t^1 \sim \mathcal{P}(\lambda t)$ car N_t^1 est un processus de Poisson d'intensité λ.

Si $t \geq r$, $\tilde{N}_t = N_t^2 - N_r^2 + N_r^1$

$N_t^2 - N_r^2 \sim N_{t-r}^2 \sim \mathcal{P}(\lambda(t-r))$ car N_t^2 est un processus de Poisson, donc à accroissements stationnaires.

$N_r^1 \sim \mathcal{P}(\lambda r)$

De plus $N_r^1 \perp\!\!\!\perp (N_t^2 - N_r^2)$ car N^1 et N^2 sont des processus indépendants.

Donc $\tilde{N}_t \sim \mathcal{P}(\lambda(t-r) + \lambda r = \lambda t)$.

*) Soient $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n < r \leq t_1' < \dots < t_m'$

$$\left(\tilde{N}_{t_1} - \tilde{N}_{t_0}, \dots, \tilde{N}_{t_n} - \tilde{N}_{t_{n-1}}, \tilde{N}_{t_1'} - \tilde{N}_{t_n}, \tilde{N}_{t_2'} - \tilde{N}_{t_1'}, \dots, \tilde{N}_{t_m'} - \tilde{N}_{t_{m-1}'}\right)$$

$$= \left(N_{t_1}^1 - N_{t_0}^1, \dots, N_{t_n}^1 - N_{t_{n-1}}^1, N_{t_1'}^2 - N_r^2 + N_r^1 - N_{t_n}^1, N_{t_2'}^2 - N_{t_1'}^2, \dots, N_{t_m'}^2 - N_{t_{m-1}'}^2\right)$$

Ce sont des v.a. indépendantes car les v.a. suivantes sont indépendantes :

$$\Big(\underbrace{\underbrace{N^1_{t_1}-N^1_{t_0}, \dots N^1_{t_n}-N^1_{t_{n-1}}, N^1_r-N^1_{t_n}}_{\text{indépendantes car } N^1 \text{ est un processus à accroissements indépendants}}, \underbrace{N^2_{t'_1}-N^2_r, N^2_{t'_2}-N^2_{t'_1}, \dots, N^2_{t'_m}-N^2_{t'_{m-1}}}_{\text{indépendants car } N^2 \text{ est un processus à accroissements indépendants}}}_{\text{indépendants car } N^1 \text{ et } N^2 \text{ sont deux processus indépendants}}\Big)$$

Donc $(\tilde{N}_t)_{t\geq 0}$ est un processus à accroissements indépendants.

*) → Si $0 \leq t < s < r$,

$$\tilde{N}_s - \tilde{N}_t = N^1_s - N^1_t \sim N^1_{s-t} \sim \mathcal{P}(\lambda(s-t)) \sim \tilde{N}_{s-t}$$

→ Si $r \leq t < s$

$$\tilde{N}_s - \tilde{N}_t = N^2_s - N^2_t \sim N^2_{s-t} \sim \mathcal{P}(\lambda(s-t)) \sim \tilde{N}_{s-t}$$

→ Si $t < r \leq s$

$$\tilde{N}_s - \tilde{N}_t = \underbrace{N^2_s - N^2_r}_{\sim \mathcal{P}(\lambda(s-r))} + \underbrace{N^1_r - N^1_t}_{\sim \mathcal{P}(\lambda(r-t))} \sim \mathcal{P}(\lambda(s-t))$$

$\perp\!\!\!\perp$

Donc $(\tilde{N}_t)_{t\geq 0}$ est un processus à accroissements stationnaires.

4) $(\tilde{N}_t)_{t\geq 0}$ est un PAIS. De plus, $(\tilde{N}_t)_{t\geq 0}$ est un processus de comptage :

→ le processus fait des sauts de 1 jusqu'au temps r^- (sauts de N^1)

→ ——————————— après le temps r^+ (sauts de N^2)

→ le processus fait un saut de 1 en r si et seulement si N^1 fait un saut en r.

Donc $(\tilde{N}_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Poisson, d'intensité λ car $N_t \sim \mathcal{P}(\lambda t)$.

Rem : Le processus ~~est un p~~ $(N_t)_{t\geq 0}$ est un processus tel que $N_t \sim \mathcal{P}(\lambda t)$ et pourtant ce n'est pas un processus de Poisson !

Exercice 2

1) On note N^1, N^2, N^3 les trois processus de Poisson modélisant les arrivées de clients dans les trois concessions et $\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3$ leurs intensités respectives. Le temps est compté en heures.

$$\lambda^1 \simeq \frac{N^1_{10}}{10} = 2 \qquad \lambda^2 \simeq \frac{N^2_{10}}{10} = 1 \qquad \lambda^3 \simeq \frac{N^3_{10}}{10} = 1,5.$$

2) $N = N^1 + N^2 + N^3$ représente les arrivées de clients dans les concessions DMC de Bordeaux. C'est un processus de Poisson d'intensité $\lambda^1 + \lambda^2 + \lambda^3 \simeq 4,5$ car N^1, N^2, N^3 sont des processus indépendants.

Donc $N_1 = N^1_1 + N^2_1 + N^3_1 \sim \mathcal{P}(1 \times 4,5)$

3) Pour chaque saut du processus N (chaque client sur les concessions de Bordeaux) on tire une v.a. X_i indépendante de N et de loi $\mathcal{B}(1/5)$. Les X_i sont i.i.d.

Si $X_i = 1$, le $i^{\text{ème}}$ saut de N est conservé
Si $X_i = 0$, ———————— n'est pas conservé

$\Big\}$ On note N^V le processus de comptage des sauts de N "conservés".

D'après les feuilles de TD, N^V est un processus de Poisson d'intensité $\frac{1}{5} \times 4,5 = 0,9$.
N^V représente les ventes de voiture DMC à Bordeaux.
Soit A = " au moins une voiture DMC est vendue à Bordeaux en ~~une~~ journée ".

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(N^V_{10} = 0) = 1 - e^{-9} \simeq 0,99988$$

4)
$$P(T_1 > t \mid N_T = n) = \frac{P(T_1 > t \text{ et } N_T = n)}{P(N_T = n)} = \frac{P(N_t = 0 \text{ et } N_T = n)}{P(N_T = n)}$$

$$= \frac{P(N_t = 0 \text{ et } N_T - N_t = n)}{P(N_T = n)} = \frac{P(N_t = 0)\, P(N_T - N_t = n)}{P(N_T = n)}$$

(indépendance des accroissements)

$$= \frac{P(N_t = 0)\, P(N_{T-t} = n)}{P(N_T = n)} \qquad \text{stationnarité des accroissements}$$

$$= e^{-\lambda t}\, e^{-\lambda (T-t)} \frac{[\lambda (T-t)]^n}{n!} \times \frac{n!}{e^{-\lambda T} (\lambda T)^n} = \left(1 - \frac{t}{T}\right)^n$$

5) $$\mathbb{P}(T_1>t, T_n\le s / N_T=n) = \frac{\mathbb{P}(T_1>t, T_n\le s, N_T=n)}{\mathbb{P}(N_T=n)} = \frac{\mathbb{P}(N_t=0, N_s=n, N_T=n)}{\mathbb{P}(N_T=n)}$$ (4)

$$= \frac{\mathbb{P}(N_t=0, N_s-N_t=n, N_T-N_s=0)}{\mathbb{P}(N_T=n)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(N_t=0)\,\mathbb{P}(N_{s-t}=n)\,\mathbb{P}(N_{T-s}=0)}{\mathbb{P}(N_T=n)}$$ N est un PAIS

$$= e^{-\lambda t} e^{-\lambda(s-t)} \frac{[\lambda(s-t)]^n}{n!} e^{-\lambda(T-s)} \frac{n!}{e^{-\lambda T}(\lambda T)^n}$$

$$= \left[\frac{s-t}{T}\right]^n$$

$$\mathbb{P}(T_2>t/N_T=n) = \frac{\mathbb{P}(N_t\le 1, N_T=n)}{\mathbb{P}(N_T=n)} = \frac{\mathbb{P}(N_t=0,N_T=n)}{\mathbb{P}(N_T=n)} + \frac{\mathbb{P}(N_t=1,N_T=n)}{\mathbb{P}(N_T=n)}$$

$$= \left(1-\frac{t}{T}\right)^n + \frac{\mathbb{P}(N_t=1)\,\mathbb{P}(N_T-N_t=n-1)}{\mathbb{P}(N_T=n)}$$ d'après 4) et parce que N est un PAIS

$$= \left(1-\frac{t}{T}\right)^n + e^{-\lambda t}\lambda t\, e^{-\lambda(T-t)} \frac{[\lambda(T-t)]^{n-1}}{(n-1)!} \frac{n!}{e^{-\lambda T}(\lambda T)^n}$$

$$= \left(1-\frac{t}{T}\right)^n + n\frac{t}{T}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{n-1}$$

Exercice 3 :

1) Si $\Pi = \delta_1$, i.e. $X_i = 1$ p.s. $\forall i\in\mathbb{N}^*$, alors $Z_t = \sum_{k=1}^{N_t} 1 = N_t$ p.s. $\forall t\in\mathbb{R}^+$

Donc $(Z_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Poisson.

2) Si $X_n \sim \mathcal{B}(p)$ alors cela revient à tirer au sort si l'on garde le saut n, avec une probabilité p et à garder dans le processus Z tous les sauts qui ont été tirés au sort. Comme les $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont i.i.d et indépendantes de N, Z est un processus de Poisson d'intensité $p\lambda$ d'après l'exercice 11 du TD.

3) $r \in \mathbb{R}$,

$$\psi_t(r) = \mathbb{E}\left[e^{irZ_t}\right] = \mathbb{E}\left[e^{irZ_t}\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{N_t=k}\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}\left[e^{irZ_t}\mathbb{1}_{N_t=k}\right] = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}\left[e^{ir\sum_{m=1}^{k} X_m}\mathbb{1}_{N_t=k}\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}\left[\prod_{m=1}^{k} e^{irX_m}\right]\mathbb{P}(N_t=k)$$ car N est indépendant des $(X_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \prod_{m=1}^{k} \mathbb{E}\left[e^{irX_m}\right] e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}$$ car les $(X_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ sont indépendantes

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \left[\phi(r)\right]^k e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!} = e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\left(\phi(r)\lambda t\right)^k}{k!} = e^{-\lambda t}e^{\phi(r)\lambda t}$$

$$= e^{\lambda t[\phi(r)-1]}$$

4) On pose $U_t = \dfrac{Z_t}{\sigma\sqrt{t}\sqrt{\lambda}}$, alors $\varphi_{U_t}(r) = \mathbb{E}\left[e^{irU_t}\right] = \mathbb{E}\left[e^{i\frac{r}{\sigma\sqrt{t}\sqrt{\lambda}}Z_t}\right] = \psi_t\left(\dfrac{r}{\sigma\sqrt{t\lambda}}\right)$

Donc $\varphi_{U_t}(r) = \exp\left(\lambda t\left[\phi\left(\dfrac{r}{\sigma\sqrt{t\lambda}}\right)-1\right]\right)$ pour $r\in\mathbb{R}$ quelconque fixé.

Comme les $(X_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ ont une variance finie, $\phi(h) = 1 + i\mathbb{E}[X_1]h - \dfrac{\mathbb{E}[X_1^2]}{2}h^2 + o(h^2)$

i.e. $\phi(h) = 1 - \dfrac{\sigma^2}{2}h^2 + o(h^2)$

Donc $\varphi_{U_t}(r) = \exp\left(\lambda t\left[1 - 1 - \dfrac{\sigma^2}{2}\dfrac{r^2}{\sigma^2 t\lambda} + o\left(\dfrac{1}{t}\right)\right]\right) = \exp\left(-\dfrac{r^2}{2} + o(1)\right) \xrightarrow{t\to+\infty} e^{-r^2/2}$

On reconnait la fonction caractéristique de la loi $\mathcal{N}(0,1)$, donc

$$\frac{Z_t}{\sigma\sqrt{\lambda}\sqrt{t}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1) \text{ quand } t\to+\infty.$$