## Exercice 13 :

1) $(T_i \leq t) =$ " le but $i$ a eu lieu avant le temps $t$ "

Donc au temps $t$ au moins $i$ buts ont été observés ; i.e. $(N_t \geq i)$

2) $$\mathbb{P}(T_2 \leq T/2 \mid N_T = 2) = \frac{\mathbb{P}(T_2 \leq \frac{T}{2}, N_T = 2)}{\mathbb{P}(N_T = 2)} = \frac{\mathbb{P}(N_{T/2} \geq 2, N_T = 2)}{\mathbb{P}(N_T = 2)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(N_{T/2} = 2, N_T = 2)}{\mathbb{P}(N_T = 2)} = \frac{\mathbb{P}(N_T - N_{T/2} = 0, N_{T/2} = 2)}{\mathbb{P}(N_T = 2)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(N_T - N_{T/2} = 0)\,\mathbb{P}(N_{T/2} = 2)}{\mathbb{P}(N_T = 2)}$$ (indépendance des accroissements)

$$= \frac{\mathbb{P}(N_{T/2} = 0)\,\mathbb{P}(N_{T/2} = 2)}{\mathbb{P}(N_T = 2)}$$ (stationnarité)

$$= \frac{e^{-\lambda T/2} e^{-\lambda T/2} (\lambda T/2)^2}{2!} \; \frac{2!}{e^{-\lambda T} (\lambda T)^2} = \frac{1}{4}$$

3) $$\mathbb{P}(T_1 \leq T/2, T_2 > T/2 \mid N_T = 2) = \frac{\mathbb{P}(N_{T/2} \geq 1, N_{T/2} < 2, N_T = 2)}{\mathbb{P}(N_T = 2)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(N_{T/2} = 1, N_T = 2)}{\mathbb{P}(N_T = 2)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(N_T - N_{T/2} = 1, N_{T/2} = 1)}{\mathbb{P}(N_T = 2)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(N_{T/2} = 1)\,\mathbb{P}(N_{T/2} = 1)}{\mathbb{P}(N_T = 2)} = \dots = \frac{1}{2}$$

4) $$\mathbb{P}(T_1 \leq s, T_2 \leq t \mid N_T = 2) = \mathbb{P}(N_s \geq 1, N_t \geq 2 \mid N_T = 2)$$

$$= \mathbb{P}(N_s = 1, N_t = 2 \mid N_T = 2) + \mathbb{P}(N_s = 2, N_t = 2 \mid N_T = 2)$$

②

5) $$\mathbb{P}(T_1 \le s, T_2 \le t \mid N_T = 2) = \mathbb{P}(N_s = 1, N_t = 2 \mid N_T = 2) + \mathbb{P}(N_s = 2, N_t = 2 \mid N_T = 2)$$

$$= \frac{\mathbb{P}(N_{T-t} = 0)\mathbb{P}(N_{t-s} = 1)\mathbb{P}(N_s = 1)}{\mathbb{P}(N_T = 2)} + \frac{\mathbb{P}(N_{T-t} = 0)\mathbb{P}(N_{t-s} = 0)\mathbb{P}(N_s = 2)}{\mathbb{P}(N_T = 2)}$$

$$= \frac{2e^{-\lambda(T-t)}e^{-\lambda(t-s)}\lambda(t-s)e^{-\lambda s}\lambda s}{e^{-\lambda T}(\lambda T)^2} + \frac{e^{-\lambda(T-t)}e^{-\lambda(t-s)}e^{-\lambda s}(\lambda s)^2 2}{e^{-\lambda T}(\lambda T)^2\ 2}$$

$$= \frac{2s(t-s)}{T^2} + \frac{s^2}{T^2} = \frac{s(2t-s)}{T^2}$$

6) $$\mathbb{P}(T_1 \le s \mid N_T = 2) = \mathbb{P}(T_1 \le s, T_2 \le T \mid N_T = 2) = \frac{s(2T-s)}{T^2}$$

Donc $f_1(s) = \frac{2(T-s)}{T^2} \mathbb{1}_{[0,T]}(s)$

$$\mathbb{P}(T_2 \le t \mid N_T = 2) = \mathbb{P}(T_1 \le t, T_2 \le t \mid N_T = 2) = \frac{t(2t-t)}{T^2} = \frac{t^2}{T^2}$$

Donc $f_2(t) = \frac{2t}{T^2} \mathbb{1}_{[0,T]}(s)$

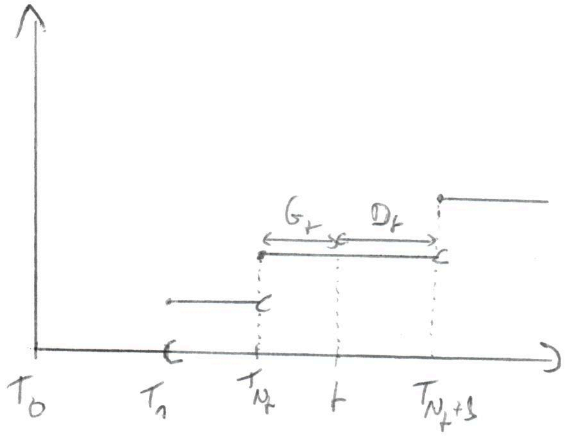
7) $$\mathbb{E}[T_1 \mid N_T = 2] = \int_0^T s \frac{2(T-s)}{T^2} ds = \dots = \frac{T}{3}$$

$$\mathbb{E}[T_2 \mid N_T = 2] = \int_0^T \frac{2t^2}{T^2} dt = \dots = \frac{2T}{3}$$

## Exercice 14 :



1)




2) $(G_t<x)=(t-T_{N_t}<x)=(T_{N_t}>t-x)=(N_{t-x}<N_t)$

$(D_t\le y)=(T_{N_t+1}-t\le y)=(T_{N_t+1}\le y-t)=(N_{y+t}\geq N_t+1)=(N_{y+t}>N_t)$

Donc $(G_t<x, D_t\le y)=(N_{t-x}<N_t, N_{y+t}>N_t)=(N_{t-x}<N_t<N_{t+y})$

$= P(N_{t+y}-N_t>0, N_t-N_{t-x}>0)$

$= P(N_{t+y}-N_t>0)P(N_t-N_{t-x}>0)$ (indépendance des accroissements)

$= P(N_y>0)P(N_x>0)$ (stationnarité)

$=(1-e^{-\lambda x})(1-e^{-\lambda y})$

3) $(G_t=t)=(t-T_{N_t}=t)=(T_{N_t}=0)=(N_t=0)$ car $(T_0=0)$

$(D_t\le y)=(N_{y+t}>N_t)$ d'après 2)

Donc $(G_t=t, D_t\le y)=(N_t=0, N_{y+t}>N_t)=(N_t=0, N_{y+t}>0)$

et $P(G_t=t, D_t\le y)=P(N_t=0, N_{y+t}-N_t>0)=P(N_t=0)P(N_{y+t}-N_t>0)$ (indép. des accroissements)

$=e^{-\lambda t}P(N_y>0)=e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda y})$ (stationnarité)

4) $P(D_t\le y)=P(G_t\le t, D_t\le y)=P((G_t<t, D_t\le y)\,\dot{\cup}\,(G_t=t, D_t\le y))$

$=P(G_t<t, D_t\le y)+P(G_t=t, D_t\le y)$

$=(1-e^{-\lambda t})(1-e^{-\lambda y})+e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda y})=1-e^{-\lambda y}$

Donc $D_t\sim\mathcal{E}(\lambda)$

nb : $D_t$ est le premier saut du processus $N^t$, donc on sait d'après le cours que $D_t \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

5) $P(G_t<x) = P(N_{t-x}<N_t) = P(N_t-N_{t-x}>0) = 1-e^{-\lambda x}$ si $0<x\leq t$.

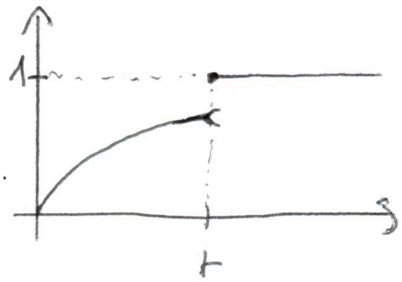
$P(G_t<x)=0$ si $x>0$ car $G_t\geq 0$

$P(G_t\leq x)=1$ si $x\geq t$ car $G_t\leq t$ par définition

Si $x<t$ :

$$P(G_t\leq x) = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} P(G_t< x+\varepsilon) = 1-e^{-\lambda x}$$

Donc $P(G_t\leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x\leq 0 \\ 1-e^{-\lambda x} & \text{si } 0\leq x<t \\ 1 & \text{si } x\geq t \end{cases}$




6) $P(\min(T_1,t)>x) = P(T_1>x,\ t>x)$

$= P(T_1>x)\,\mathbb{1}_{\{t>x\}}$

$= e^{-\lambda x}\,\mathbb{1}_{\{t>x\}}\mathbb{1}_{\{x\geq 0\}}$ car $T_1\sim\mathcal{E}(\lambda)$

Donc $P(\min(T_1,t)\leq x) = 1-P(\min(T_1,t)>x)$

$= \begin{cases} 1-e^{-\lambda x} & \text{si } 0\leq x<t \\ 1 & \text{si } x\geq t \\ 0 & \text{si } x\leq 0 \end{cases}$

Donc $G_t$ a la même loi que $\min(T_1,t)$ (même fonction de répartition)

7) On a $P(G_t<x,\ D_t\leq y) = P(G_t<x)\,P(D_t\leq y)$ d'après les calculs précédents donc $G_t \perp\!\!\!\perp D_t$.

8) $\mathbb{E}[G_t] = \mathbb{E}[\min(T_1,t)] = \int_0^{+\infty}(x\wedge t)\,f_{T_1}(x)\,dx = \int_0^t x\lambda e^{-\lambda x}dx + \int_t^{+\infty} t\lambda e^{-\lambda x}dx$

$\overset{IPP}{=} -te^{-\lambda t} + \int_0^t e^{-\lambda x}dx + t\left[-e^{-\lambda x}\right]_t^{+\infty} = \left[-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\right]_0^t + te^{-\lambda t} - te^{-\lambda t}$

$= \frac{1}{\lambda}(1-e^{-\lambda t})$

Donc $\mathbb{E}[G_t+D_t] = \mathbb{E}[G_t]+\mathbb{E}[D_t] = \frac{1}{\lambda}(1-e^{-\lambda t}) + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}(2-e^{-\lambda t}) > \frac{1}{\lambda}$

$G_t+D_t$ étant une durée inter-saut, on aurait pu s'attendre à avoir $\mathbb{E}[G_t+D_t]=\frac{1}{\lambda}$.