MASTER 2, 2014

23/01/2015

TERMINAL CORRECTION

Problème :

1) $$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}49 & 0{,}49 & 0 & 0{,}02 \\ 0{,}8 & 0 & 0 & 0{,}18 & 0{,}02 \\ 0{,}7 & 0 & 0 & 0{,}28 & 0{,}02 \\ 0{,}99 & 0 & 0 & 0 & 0{,}01 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2) $$\mathbb{E}(Y) = \int_{\mathbb{R}} y f_Y(y)\,dy = \int_0^{+\infty} y \lambda e^{-\lambda y}\,dy \overset{IPP}{=} \left[-y e^{-\lambda y}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda y}\,dy$$

$$= 0 + \left[\frac{-e^{-\lambda y}}{\lambda}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$

On sait que conditionnellement à $(X_0 = x)$, T_1 suit une loi exponentielle. Comme son espérance est l'inverse de son paramètre, d'après l'énoncé on a

$T_1 \sim \mathcal{E}(1/100)$ conditionnellement à $(X_0 = 1)$.

$T_1 \sim \mathcal{E}(1/2)$ ———— $(X_0 = 2)$

$T_1 \sim \mathcal{E}(1)$ ———— $(X_0 = 3)$

$T_1 \sim \mathcal{E}(1)$ ———— $(X_0 = 4)$

L'état 5 est un état absorbant donc $T_1 = +\infty$ conditionnellement à $(X_0 = 5)$.

3) $$Q = \begin{pmatrix} -1/100 & \frac{0,49}{100} & \frac{0,49}{100} & 0 & \frac{0,02}{100} \\ \frac{0,8}{2} & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{0,18}{2} & \frac{0,02}{2} \\ 0,7 & 0 & -1 & 0,28 & 0,02 \\ 0,99 & 0 & 0 & -1 & 0,01 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4) $\{5\}$ est seul dans sa classe fermée donc récurrente. 5 est un état absorbant.

$1 \to 2 \to 4 \to 1 \to 3 \to 1$ donc $\{1,2,3,4\}$ sont dans la même classe qui est transiente car $1 \to 5$.

5) → On note h_i^5 la probabilité d'atteindre 5 partant de i.

Comme $\{1,2,3,4\}$ est une classe transiente et $\{5\}$ est ~~récurrent~~ absorbant, $h_i^5 = 1$ pour tous les $i \in \{1,2,\dots,5\}$.

→ On note h_i^4 la probabilité d'atteindre 4 partant de i.

On a $h_4^4 = 1$. De plus $\{5\}$ est absorbant donc $h_5^4 = 0$.

D'après le cours, les h_i sont solution du système (plus petite solution positive):

$$\begin{cases} \sum Q_{xy} h_y^4 = 0 & \forall x \neq 4 \\ h_4^4 = 1 \end{cases}$$

On doit résoudre le système

$$\begin{cases} h_1^4 = 0,49\, h_2^4 + 0,49\, h_3^4 \\ h_2^4 = 0,8\, h_1^4 + 0,18 \\ h_3^4 = 0,7\, h_1^4 + 0,23 \end{cases} \iff \begin{cases} h_1^4 = 0,49\left(0,15\, h_1^4 + 0,41\right) \\ h_2^4 = 0,8\, h_1^4 + 0,18 \\ h_3^4 = 0,7\, h_1^4 + 0,23 \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_1^4 = \dfrac{0{,}49 \times 0{,}41}{1 - 0{,}49 \times 0{,}15} \\ h_2^4 = 0{,}8 \times h_1^4 + 0{,}18 \\ h_3^4 = 0{,}7 h_1^4 + 0{,}23 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{h_1^4 \simeq 0{,}217} \\ h_2^4 \simeq 0{,}353 \\ h_3^4 \simeq 0{,}382 \end{cases}$$

II) 1) $$Q = \begin{pmatrix} -1/100 & \dfrac{0{,}5}{100} & \dfrac{0{,}5}{100} & 0 \\ \dfrac{0{,}8}{2} & -1/2 & 0 & \dfrac{0{,}2}{2} \\ 0{,}7 & 0 & -1 & 0{,}3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2) $1 \to 2 \to 4 \to 1 \to 3 \to \underline{1}$: On a une seule classe récurrente irréductible.

3) On est dans le cas irréductible récurrent positif (E est fini) donc il existe une unique mesure de probabilité invariante ν. On a $\nu Q = 0$.

$$\begin{cases} \nu Q = 0 \\ \nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{\nu_1}{100} + \dfrac{0{,}8}{2}\nu_2 + 0{,}7\nu_3 + \nu_4 = 0 \\ \dfrac{0{,}5}{100}\nu_1 - \dfrac{\nu_2}{2} = 0 \\ \dfrac{0{,}5}{100}\nu_1 - \nu_3 = 0 \\ \dfrac{0{,}2}{2}\nu_2 + 0{,}3\nu_3 - \nu_4 = 0 \\ \nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \nu_2 = \nu_1/100 \\ \nu_3 = 0{,}5\,\nu_1/100 \\ \nu_4 = 0{,}25\,\nu_1/100 \\ \nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \nu_1 = \dfrac{100}{101{,}75} \\ \nu_2 = \dfrac{1}{101{,}75} \\ \nu_3 = \dfrac{0{,}5}{101{,}75} \\ \nu_4 = \dfrac{0{,}25}{101{,}75} \end{cases}$$

4/ Soit $f: E \to \mathbb{R}$. Pour ~~être~~ obtenir un billet de 20 euros, il faut être dans les états 1 ou 2. D'après le théorème de convergence vers la loi limite $\begin{cases} P_{11}(t) \to \nu_1 \\ P_{12}(t) \to \nu_2 \end{cases}$ donc $P(X_t \in \{1,2\} | X_0 = 1) \to \nu_1 + \nu_2 = \frac{107}{109,75}$

Exercice

1) On a $\alpha + \nu x + \lambda x = 0$, donc $\alpha = -(\nu+\lambda)x$

2) Si $Z_n = x$, $Z_{n+1} \in \{x+1, x-1\}$ donc $Z_{n+1} \leq Z_n + 1$

Ainsi, $Z_n \leq n + Z_0 = 10 + n$

et $q_{Z_n} = -Q_{Z_n Z_n} = (\nu+\lambda) Z_n \leq (\lambda+\nu)(10+n)$

Il y a non explosion ssi $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{q_{Z_n}} = +\infty$ p.s.

Or $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{q_{Z_n}} \geq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(\lambda+\nu)(10+n)} = +\infty$ (série divergente)

Donc il y a non explosion.

3) $\mathbb{N}^*$ classe transiente. $\{0\}$ état absorbant.

4) D'après le cours, $(\mu(t))$ vérifie l'équation de Fokker-Planck

$$\frac{\partial \mu_x(t)}{\partial t} = \sum_{y \in E} \mu_y(t) Q_{yx} \quad t > 0, x \in E$$

on a donc $\begin{cases} \frac{\partial \mu_n(t)}{\partial t} = -(\nu+\lambda) n \mu_n(t) + \nu(n+1)\mu_{n+1}(t) + \lambda(n-1)\mu_{n-1}(t) & \text{si } n \in \mathbb{N}^* \\ \frac{\partial \mu_0(t)}{\partial t} = ~~\text{xxx}~~ \nu \mu_1(t) \end{cases}$

5) Si $\lambda \leq \nu$, $\mu_0(t) \to 1$. Si $\lambda > \nu$ $\mu_0(t) \to \left(\frac{\nu}{\lambda}\right)^{X_0} = \left(\frac{\nu}{\lambda}\right)^{10}$.