Exercice 1. Soit $(N_t)_{t\geqslant 1}$ un processus de Poisson d'intensité λ. Montrer que $(N_t)_{t\geqslant 1}$ est un processus de Markov à valeurs dans $\mathbb{N}$ de matrice de transition

$$P_{xy}(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{y-x}}{(y-x)!}\mathbb{1}_{\{y\geqslant x\}}.$$

Donner son générateur infinitésimal.

Exercice 2. Soit $(N_t)_{t\geqslant 1}$ un processus de Poisson d'intensité λ et X_0 une variable aléatoire indépendante de $(N_t)_{t\geqslant 1}$ à valeurs dans $E = \{-1, 1\}$. Pour tout t positif on pose

$$X_t = (-1)^{N_t} X_0.$$

Montrer que $(X_t)_{t\geqslant 1}$ est un processus de Markov et calculer ses matrices de transition. Donner son générateur infinitésimal. Ce processus s'appelle *processus du télégraphe*.

Exercice 3. [Révisions] Pour chacune des matrices suivantes,

1. Montrer que c'est une matrice stochastique, ou compléter les valeurs manquantes de la matrice pour obtenir une matrice stochastique.
2. Tracer le graphe correspondant.
3. Donner les classes communicantes.
4. Donner les classes fermées, les états absorbants, les états récurrents et transients et dire si la matrice est irréductible.

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} ? & 0 & 1/12 & 1/4 & 1/3 \\ 0 & ? & 0 & 0 & 1/4 \\ 1/3 & 1/12 & ? & 0 & 1/12 \\ 0 & 1/6 & 1/4 & ? & 1/6 \\ 0 & 2/3 & 0 & 0 & ? \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} ? & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & ? & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & ? & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & ? & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & ? & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ? \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. Pour chacune des matrices suivantes :

1. Montrer que c'est un générateur infinitésimal.
2. Tracer le graphe correspondant et donner les classes communicantes et leur nature.

$$
A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix},
$$

$$
C = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Exercice 5. Soit $(X_t)_{t\geqslant 0}$ un processus markovien de saut et $(\mathcal{F}_t^X)$ sa filtration naturelle. Montrer que ses temps de saut T_n et le temps R_x de retour en x sont des temps d'arrêt.

Exercice 6. Soient deux processus de Poisson indépendants $(N_t)_{t\geqslant 0}$ et $(N'_t)_{t\geqslant 0}$ de paramètres respectifs λ et μ. On note (T_n) les temps de saut du processus $(N_t)_{t\geqslant 0}$. On pose $M_n = N'_{T_n} - N'_{T_{n-1}}$ pour tout $n \geqslant 1$.

1. Dessiner une réalisation possible des trajectoires de $(N_t)_{t\geqslant 0}$ et $(N'_t)_{t\geqslant 0}$, et pour n fixé donner la valeur de M_n correspondant.
2. Quelles sont les valeurs que peut prendre M_n ?
3. Montrer que $\mathbb{P}(M_{n+1} = k) = \mathbb{P}(M_1 = k)$ et que la loi de M_n ne dépend pas de n.
4. Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre α. Montrer que pour tout entier k on a $\mathbb{E}[X^k] = \alpha^{-k}k!$.
5. En déduire la loi de M_1.