Universités Bordeaux
Master 1 MIMSE

22/11/2013

PARTIEL PROBABILITÉS

Durée 1h30

PROBLÈME I

Soit $p \in]0,1[$ et X une variable aléatoire de loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ donnée, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, par

$$\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}.$$

Calculer la fonction génératrice de X.

PROBLÈME II

Un appareil comporte six composants indépendants de même modèle, tous nécessaires à son fonctionnement. La densité de la durée de vie T d'un composant est donnée par $f(t) = te^{-t}\mathbb{1}_{t\geqslant 0}$, l'unité de temps étant l'année.

1. Vérifier que f est bien une densité de probabilité.
2. Calculer $\mathbb{E}[T]$.
3. Quelle est la probabilité qu'un composant fonctionne durant au moins six ans à partir de sa mise en marche ? En déduire la probabilité que l'appareil fonctionne durant au moins six ans à partir de sa mise en marche.

PROBLÈME III

On a n boîtes numérotées de 1 à n. La boîte k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit au hasard une boîte, puis une boule dans la boîte. Soit X le numéro de la boîte et Y le numéro de la boule.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y).
2. Déterminer la loi de Y et son espérance.
3. Les variables aléatoires X et Y sont elles indépendantes ?

PROBLÈME IV

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes de densité

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Soit $\theta \in [0, 2\pi[$ un paramètre fixé, on pose $(U, V) = r_\theta(X, Y)$ avec r_θ la rotation dans $\mathbb{R}^2$ de centre O et d'angle θ. On a donc

$$\left\{ \begin{array}{l} U = X \cos\theta - Y \sin\theta \\ V = X \sin\theta + Y \cos\theta \end{array} \right. . \tag{1}$$

1. Déterminer la loi de (X, Y).
2. Déterminer la loi de (U, V). On pourra remarquer que r_θ^{-1} est la rotation dans $\mathbb{R}^2$ de centre O et d'angle $-\theta$.
3. Déterminer la loi de U et la loi de V. U et V sont elles indépendantes ?