Université de Bordeaux
Master 2 MIMSE 07/11/2014

Partiel
Processus de Markov

Durée 2h00

Questions de cours

1. Donner deux définitions équivalentes d'un processus de Poisson.
2. Donner les définitions d'un temps d'arrêt τ pour une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geqslant 0}$ et de la tribu des évènements antérieurs à τ.

Exercice

1. Soient $0 = T_0 < T_1 < T_2 < ... < T_n < ...$ les temps de saut d'un processus de Poisson $(N_t)_{t \geqslant 0}$. On définit un processus $(N_t^p)_{t \geqslant 0}$ par
$$N_t^p = \sup\{n \in \mathbb{N}, T_{2n} \leqslant t\}.$$
Dessiner une trajectoire de $(N_t)_{t \geqslant 0}$ et la trajectoire de $(N_t^p)_{t \geqslant 0}$ associée. Quelle est la loi du premier temps de saut de $(N_t^p)_{t \geqslant 0}$? $(N_t^p)_{t \geqslant 0}$ est-il un processus de Poisson ?
2. Même question avec $(N_t^i)_{t \geqslant 0}$ défini par
$$N_t^i = \sup\{n \in \mathbb{N}, T_{2n-1} \leqslant t\},$$
avec $T_{-1} = T_0 = 0$.

Problème

Soit $(N_t)_{t \geqslant 0}$ un processus de Poisson d'intensité λ. On appelle T_n l'instant du n-ième saut du processus et on pose $T_0 = 0$.

1. Soient $T > 0$ et $t \in [0, T]$ deux nombres réels.
   (a) Montrer que $(T_1 \leqslant t, N_T = 1) = (N_T - N_t = 0, N_t = 1)$.
   (b) Calculer $\mathbb{P}(T_1 \leqslant t | N_T = 1)$.
   (c) Montrer que, conditionnellement à l'évènement $(N_T = 1)$, T_1 est une variable aléatoire continue et calculer sa densité. Quelle est sa loi ?
2. Soient $0 \leqslant a < b \leqslant T$ trois nombres réels. On pose $I =]a, b]$ et $u = b - a$ la longueur de l'intervalle I. On note X le nombre de sauts du processus $(N_t)_{t \geqslant 0}$ qui se réalisent dans l'intervalle I : X représente le cardinal de $\{n \in \mathbb{N}^*, T_n \in I\}$. De même, on note Y le nombre de sauts du processus $(N_t)_{t \geqslant 0}$ qui se réalisent dans $[0, a] \cup]b, T]$.

(a) En remarquant que $X = N_b - N_a$, montrer que $X \sim \mathcal{P}(\lambda u)$.

(b) Montrer que $Y \sim \mathcal{P}(\lambda(T-u))$ et que Y est indépendante de X.

(c) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, ..., n\}$. Calculer $\mathbb{P}(X = k, X + Y = n)$.

(d) Déduire de la question précédente que la probabilité qu'il y ait exactement k sauts du processus $(N_t)_{t \geqslant 0}$ dans I conditionnellement à l'évènement $(N_T = n)$ vaut

$$C_n^k \left(\frac{u}{T}\right)^k \left(1 - \frac{u}{T}\right)^{n-k}.$$

(e) Soient $Z_1, ..., Z_n$ n variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur l'intervalle $[0, T]$. Montrer que la probabilité calculée à la question précédente est égale à la probabilité qu'exactement k variables parmi les variables $Z_1, ..., Z_n$ prennent leurs valeurs dans I.

3. On suppose que le processus $(N_t)_{t \in [0,T]}$ modélise les buts marqués par les Girondins de Bordeaux au cours d'un match de durée T. X représente dans cette partie le nombre de buts inscrits par l'équipe de Bordeaux dans l'intervalle de temps $[0, t]$ avec $t \in [0, T]$.

   (a) Montrer que $(T_1 \leqslant t) = \overline{(X = 0)}$. En déduire $\mathbb{P}(T_1 \leqslant t | N_T = n)$.

   (b) Calculer $\mathbb{P}(T_n \leqslant t | N_T = n)$.

   (c) On suppose que l'équipe a marqué 3 buts au cours du match. Calculer la probabilité que le premier but ait été marqué lors de la première mi-temps. Calculer la probabilité que les trois buts aient été marqués lors de la première mi-temps.