

Approximation temporelle et simulation numérique d'EDSRs quadratiques

Adrien Richou

IRMAR, Université de Rennes 1

Paris - Juin 2010

- 1 Introduction
 - EDSRs (markoviennes)
 - EDSRs quadratiques
 - Simulation
- 2 Approximation temporelle d'EDSRs quadratiques
 - Premières idées
 - Estimation temporelle de Z
 - Convergence du schéma
- 3 Résultats numériques

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, $(W_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ un mouvement brownien dans \mathbb{R}^d , $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ sa filtration augmentée, T un réel positif. On considère l'EDS

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s,$$

avec des hypothèses standard sur b et σ , et l'EDSR markovienne

$$Y_t = g(X_T) + \int_t^T f(s, X_s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dW_s.$$

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, $(W_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ un mouvement brownien dans \mathbb{R}^d , $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ sa filtration augmentée, T un réel positif. On considère l'EDS

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s,$$

avec des hypothèses standard sur b et σ , et l'EDSR markovienne

$$Y_t = g(X_T) + \int_t^T f(s, X_s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dW_s.$$

Définition

Une solution de cette EDSR est un couple $(Y_t, Z_t)_{0 \leq t \leq T}$ tel que :

- 1 (Y, Z) est un processus prévisible à valeur dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{1 \times d}$,
- 2 \mathbb{P} - a.s. $t \mapsto Y_t$ est continue et $\int_0^T |f(r, X_r, Y_r, Z_r)| + \|Z_r\|^2 dr < \infty$

Théorème [Pardoux-Peng 1990]

Supposons que f est une fonction lipschitz en y et z , et $\mathbb{E} \left[|g(X_T)|^2 + \int_0^T |f(r, X_r, 0, 0)|^2 dr \right] < \infty$. Alors l'EDSR précédente possède une unique solution telle que

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |Y_t|^2 \right] < \infty, \quad \mathbb{E} \left[\int_0^T |Z_t|^2 dt \right] < \infty.$$

EDSRs quadratiques

Que se passe-t-il lorsque f a une croissance quadratique par rapport à z ?

- lorsque g est bornée : un résultat d'existence et d'unicité a été prouvé par M. Kobylanski [2000] puis généralisé par Lepeltier et San Martín [1998].
- lorsque g est non bornée : un résultat d'existence a été prouvé par P. Briand and Y. Hu [2006]. Concernant l'unicité, des résultats partiels ont été prouvés par P. Briand et Y. Hu [2008], puis par F. Delbaen, Y. Hu et A. R. [2010].

De telles EDSRs ont des applications en finance : cette classe d'équation apparait par exemple dans le contexte des problèmes d'optimisation d'utilité exponentielle (voir notamment Y. Hu, P. Imkeller et M. Müller [2005]).

l'outil des martingales OMB (ou BMO)

Définition

Pour une martingale brownienne $\Phi_t = \int_0^t \phi_s dW_s$, $t \in [0, T]$, on dit que Φ est une martingale OMB si

$$\|\Phi\|_{OMB} = \sup_{\tau \in [0, T]} \mathbb{E} \left[\int_{\tau}^T \phi_s^2 ds \middle| \mathcal{F}_{\tau} \right]^{1/2} < +\infty,$$

où le supremum est pris sur tous les temps d'arrêt à valeur dans $[0, T]$.

l'outil des martingales OMB

Une propriété importante des martingales OMB est donnée par le lemme qui suit.

Lemme

Soit Φ une martingale OMB. On a alors :

- 1 Le processus

$$\mathcal{E}(\Phi)_t = \mathcal{E}_t = \exp \left(\int_0^t \phi_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t |\phi_s|^2 ds \right), \quad 0 \leq t \leq T,$$

est une martingale uniformément intégrable.

- 2 Il existe $p > 1$ tel que $\mathcal{E}_T \in L^p$. Le p maximal vérifiant cette propriété s'exprime à l'aide de la norme OMB de Φ .

Théorème (Briand, Confortola [2008], Ankirchner et al. [2007])

On suppose que

$$\begin{aligned}
 |f(t, x, y, z)| &\leq M_f(1 + |y| + |z|^2), \\
 |f(t, x, y, z) - f(t, x', y', z')| &\leq K_{f,x}|x - x'| + K_{f,y}|y - y'| \\
 &\quad + (K_{f,z} + L_{f,z}(|z| + |z'|))|z - z'|, \\
 |g(x)| &\leq M_g.
 \end{aligned}$$

L'EDSR possède une unique solution (Y, Z) telle que Y est un processus mesurable borné et $\mathbb{E}[\int_0^T |Z_s|^2 ds] < +\infty$. La martingale $Z * W$ est une martingale OMB et $\|Z * W\|_{OMB}$ dépend uniquement de T , M_g et M_f . De plus, il existe $r > 1$ tel que $\mathcal{E}(Z * W) \in L^r$.

Proposition (Briand, Confortola (2008), Ankirchner et al. [2007])

Si on note (Y^i, Z^i) la solution de l'EDSR de condition terminale g_i et de générateur f_i , alors nous avons

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, T]} |Y_t^1 - Y_t^2|^2 \right] + \mathbb{E} \left[\int_0^T |Z_s^1 - Z_s^2|^2 ds \right] \\ & \leq \mathbb{E} \left[|g_1(X_T) - g_2(X_T)|^{2q} + \left(\int_0^T |(f_1 - f_2)(s, X_s, Y_s^2, Z_s^2)| ds \right)^{2q} \right]^{1/q}. \end{aligned}$$

avec $1/r + 1/q = 1$ et q tel que $Z^1 * W \in L^q$.

Discrétisation en temps

- Grille de discrétisation uniforme : $(t_k = kh)_{0 \leq k \leq n}$ avec $h := T/n$.
- Approximation de X par un schéma d'Euler :

$$\begin{aligned}
 X_0^n &= x \\
 X_{t_{k+1}}^n &= X_{t_k}^n + hb(t_k, X_{t_k}^n) + \sigma(t_k, X_{t_k}^n)(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}), \quad 0 \leq k \leq n-1.
 \end{aligned}$$

- Approximation rétrograde de (Y, Z) :

$$\begin{aligned}
 Y_{t_n}^n &= g(X_{t_n}^n) \\
 Z_{t_k}^n &= \frac{1}{h} \mathbb{E}_{t_k} [Y_{t_{k+1}}^n (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})], \quad 0 \leq k \leq n-1, \\
 Y_{t_k}^n &= \mathbb{E}_{t_k} [Y_{t_{k+1}}^n] + h \mathbb{E}_{t_k} [f(t_k, X_{t_k}^n, Y_{t_{k+1}}^n, Z_{t_k}^n)], \quad 0 \leq k \leq n-1,
 \end{aligned}$$

avec \mathbb{E}_{t_k} l'espérance conditionnelle sachant \mathcal{F}_{t_k} .

Intuition du schéma

$$Y_{t_k} = Y_{t_{k+1}} + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(s, X_s, Y_s, Z_s) ds - \int_{t_k}^{t_{k+1}} Z_s dW_s.$$

Étape 1 Générateur constant, \tilde{Z}^n donné par le théorème de représentation martingale

$$Y_{t_k}^n = Y_{t_{k+1}}^n + h\mathbb{E}_{t_k}[f(t_k, X_{t_k}^n, Y_{t_{k+1}}^n, Z_{t_k}^n)] - \int_{t_k}^{t_{k+1}} \tilde{Z}_s^n dW_s.$$

Étape 2 Approximation de \tilde{Z}^n par une v.a. \mathcal{F}_{t_k} -mesurable

$$Z_{t_k}^n = \frac{1}{h}\mathbb{E}_{t_k}\left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} \tilde{Z}_s^n ds\right] = \frac{1}{h}\mathbb{E}_{t_k}[Y_{t_{k+1}}^n(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})].$$

Étape 3 On conditionne

$$Y_{t_k}^n = \mathbb{E}_{t_k}[Y_{t_{k+1}}^n] + h\mathbb{E}_{t_k}[f(t_k, X_{t_k}^n, Y_{t_{k+1}}^n, Z_{t_k}^n)].$$

Remarques sur la simulation

- Après la discrétisation en temps, il reste à évaluer les espérances conditionnelles.
- On a une vitesse de convergence.

Théorème (Gobet, Lemor, Warin [2005])

Supposons que g et f sont des fonctions lipschitz en x, y, z et t . On définit l'erreur d'approximation par

$$e(n) = \sup_{0 \leq k \leq n} \mathbb{E} |Y_{t_k}^n - Y_{t_k}|^2 + \mathbb{E} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} |Z_{t_k}^n - Z_t|^2 dt.$$

Alors $e(n) = O(1/n)$.

Références concernant la simulation d'EDSRs

- J. Zhang [2002]
- B. Bouchard, N. Touzi [2004]
- E. Gobet, J.P. Lemor, X. Warin [2005]
- F. Delarue, S. Menozzi [2006]

Une autre idée consiste à utiliser l'approximation de Picard

- C. Bender, R. Denk [2007]
- C. Labart, E. Gobet [2010]

ou bien encore l'approximation du brownien par une marche aléatoire

- P. Briand, B. Delyon, J. Mémin [2001]
- P. Cheridito, M. Stadje [Preprint]

But

le but de notre travail est de définir une discrétisation temporelle pour les EDSRs quadratiques et d'obtenir une « bonne » vitesse de convergence pour ce schéma.

La transformation exponentielle

lorsque le générateur est de la forme

$$f(t, x, y, z) = l(t, x, y) + a(t, z) + \frac{\gamma}{2} |z|^2,$$

avec a et l des fonctions lipschitz et a homogène par rapport à z , il est possible d'utiliser une transformation exponentielle (ou transformation de Cole-Hopf) : $(e^{\gamma Y}, \gamma e^{\gamma Y} Z)$ est la solution d'une EDSR dont le générateur est à croissance linéaire. Voir par exemple P. Imkeller, G. dos Reis et J. Zhang [2010].

g lipschitz

Proposition

Si g est une fonction lipschitz de constante de lipschitz K_g et σ ne dépend pas de x , alors, $\forall t \in [0, T]$,

$$|Z_t| \leq C(1 + K_g).$$

Dans cette situation le générateur est une fonction lipschitz en z , et donc il est possible d'utiliser l'approximation temporelle classique.

Si g est α -Hölder, on a une approximation uniforme explicite par des fonctions lipschitz g_N de g avec $K_{g_N} = N$. On fait alors une approximation de (Y, Z) par la solution (Y^N, Z^N) de l'EDSR

$$Y_t^N = g_N(X_T) + \int_t^T f(s, X_s, Y_s^N, Z_s^N) ds - \int_t^T Z_s^N dW_s.$$

- Grace aux outils des martingales OMB, on a une estimation de l'erreur pour cette approximation : $CN^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}}$.
- On a également une estimation de l'erreur pour l'approximation temporelle de notre EDSR à croissance linéaire : $Ce^{CN^2} n^{-1}$.

Finalement, en prenant $N = (\frac{C}{\varepsilon} \log n)^{1/2}$ avec ε petit, l'estimation de l'erreur globale devient

$$C_\varepsilon (\log n)^{\frac{-\alpha}{2(1-\alpha)}}.$$

EDSR quadratique tronquée

Une autre idée consiste à considérer une approximation de (Y, Z) par la solution (Y^N, Z^N) de l'EDSR tronquée

$$Y_t^N = g(X_T) + \int_t^T f(s, X_s, Y_s^N, h_N(Z_s^N)) ds - \int_t^T Z_s^N dW_s,$$

où $h_N : \mathbb{R}^{1 \times d} \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times d}$ est une modification régulière de la projection sur la boule euclidienne de centre 0 et de rayon N . Une estimation de l'erreur est obtenue par P. Imkeller et G. dos Reis [2009], mais le même problème de vitesse apparaît.

Une estimation de Z

Théorème (Delbaen, Hu, Bao [2010], R. [Preprint])

Supposons que b est différentiable par rapport à x et σ est différentiable par rapport à t et ne dépend pas de x . On suppose également qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall \eta \in \mathbb{R}^d$

$$\left| {}^t\eta\sigma(s)[{}^t\sigma(s){}^t\nabla b(s, x) - {}^t\sigma'(s)]\eta \right| \leq \lambda |{}^t\eta\sigma(s)|^2. \quad (2.1)$$

Enfin, supposons que g est semi-continue inférieurement (ou supérieurement). Alors, $\forall t \in [0, T[$,

$$|Z_t| \leq C_1 + C_2(T - t)^{-1/2}.$$

Esquisse de la preuve (1/2)

Supposons que

- f ne dépend pas de x et y ,
- g est C^1 en x et f est C^1 en z .

Alors Y et Z sont différentiable par rapport à x , la condition initiale de X , et

$$\begin{aligned}\nabla Y_t &= \nabla g(X_T) \nabla X_T + \int_t^T \nabla_z f \nabla Z_s ds - \int_t^T \nabla Z_s dW_s \\ &= \nabla g(X_T) \nabla X_T - \int_t^T \nabla Z_s d\tilde{W}_s.\end{aligned}$$

c'est-à-dire ∇Y est une \mathbb{Q} -martingale.

Esquisse de la preuve (2/2)

- $Z_t = \nabla Y_t (\nabla X_t)^{-1} \sigma(t)$ (calcul de Malliavin).
- L'application de la formule d'Itô au processus $|e^{\lambda t} \nabla Y_t (\nabla X_t)^{-1} \sigma(t)|^2$ montre que $|e^{\lambda t} Z_t|^2$ est une \mathbb{Q} -sous-martingale.
-

$$e^{2\lambda t} |Z_t|^2 (T-t) \leq \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\int_t^T e^{2\lambda s} |Z_s|^2 ds \middle| \mathcal{F}_t \right] \leq e^{2\lambda T} \|Z\|_{OMB(\mathbb{Q})}.$$

Remarque

Ce type d'estimation est déjà connu pour les EDSRs dont le générateur est à croissance linéaire (conséquence de la formule de Bismut-Elworthy). Dans notre cas σ ne dépend pas de x mais nous n'avons pas besoin de supposer que σ est inversible.

Comment utiliser cette estimation sur Z ?

Dans le cas lipschitz, pour obtenir une borne sur l'erreur

$$\sup_{0 \leq k \leq n} \mathbb{E} \left[|Y_{t_k}^n - Y_{t_k}|^2 \right]$$

on montre une estimation du type

$$\mathbb{E} \left[|Y_{t_k}^n - Y_{t_k}|^2 \right] \leq (1 + Ch + K_{f,Z}^2 h) \mathbb{E} \left[|Y_{t_{k+1}}^n - Y_{t_{k+1}}|^2 \right] + h^2$$

et ensuite on utilise le lemme de Gronwall discret.

Comment utiliser cette estimation sur Z ?

Dans notre cas nous avons

$$\mathbb{E} \left[\left| Y_{t_k}^n - Y_{t_k} \right|^2 \right] \leq (1 + C(t_k - t_{k+1}) + K \frac{t_{k+1} - t_k}{T - t_{k+1}}) \mathbb{E} \left[\left| Y_{t_{k+1}}^n - Y_{t_{k+1}} \right|^2 \right] + h^2$$

Ainsi, l'idée est de trouver une grille de discrétisation telle que $\frac{t_{k+1} - t_k}{T - t_{k+1}}$ ne dépend pas de n :

On définit les n premiers temps de discrétisation par

$$t_k = T \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{T} \right)^{k/(n-1)} \right).$$

ε est un paramètre : $t_{n-1} = T - \varepsilon$. On pose $\varepsilon := T/n^a$ avec a un nouveau paramètre.

Comment utiliser cette estimation sur Z ?

Lemme

$$\prod_{i=0}^{n-2} \left(1 + C(t_{i+1} - t_i) + K \frac{t_{i+1} - t_i}{T - t_{i+1}} \right) \leq Cn^{aK}.$$

Notre algorithme (1/2)

Pour des raisons techniques, nous devons d'abord approcher l'EDSR quadratique initiale par une nouvelle EDSR. Soit $(Y_t^{N,\varepsilon}, Z_t^{N,\varepsilon})$ la solution de l'EDSR

$$Y_t^{N,\varepsilon} = g_N(X_T) + \int_t^T f^\varepsilon(s, X_s, Y_s^{N,\varepsilon}, Z_s^{N,\varepsilon}) ds - \int_t^T Z_s^{N,\varepsilon} dW_s. \quad (2.2)$$

avec

$$f^\varepsilon(s, x, y, z) := \mathbb{1}_{s < T-\varepsilon} f(s, x, y, z) + \mathbb{1}_{s \geq T-\varepsilon} f(s, x, y, 0),$$

et g_N une approximation N -lipschitz de g .

Notre algorithme (2/2)

Soit $\rho_s : \mathbb{R}^{1 \times d} \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times d}$ la projection sur la boule

$$B\left(0, C_z + \frac{C'_z}{(T-s)^{1/2}}\right).$$

On note $(Y^{N,\varepsilon,n}, Z^{N,\varepsilon,n})$ l'approximation temporelle de $(Y^{N,\varepsilon}, Z^{N,\varepsilon})$. Ce couple est obtenu par une légère modification de l'approximation classique :

$$Y_{t_n}^{N,\varepsilon,n} = g_N(X_{t_n}^n)$$

$$Z_{t_k}^{N,\varepsilon,n} = \rho_{t_{k+1}}\left(\frac{1}{h_k} \mathbb{E}_{t_k}[Y_{t_{k+1}}^{N,\varepsilon,n}(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})]\right), \quad 0 \leq k \leq n-1,$$

$$Y_{t_k}^{N,\varepsilon,n} = \mathbb{E}_{t_k}[Y_{t_{k+1}}^{N,\varepsilon,n}] + h_k \mathbb{E}_{t_k}[f^\varepsilon(t_k, X_{t_k}^n, Y_{t_{k+1}}^{N,\varepsilon,n}, Z_{t_k}^{N,\varepsilon,n})], \quad 0 \leq k \leq n-1$$

Une première vitesse de convergence

Théorème

Rappelons que $\varepsilon = T/n^a$. On pose $N = n^b$. On suppose que g est α -Hölder. Alors on peut choisir judicieusement a et b afin que, pour tout $\eta > 0$, il existe une constante $C_\eta > 0$ qui vérifie

$$\sup_{0 \leq k \leq n} \mathbb{E} \left[\left| Y_{t_k}^{N, \varepsilon, n} - Y_{t_k} \right|^2 \right] + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E} \left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} \left| Z_{t_k}^{N, \varepsilon, n} - Z_t \right|^2 dt \right] \leq \frac{C_\eta}{n^p},$$

avec

$$p = \frac{2\alpha}{(2 - \alpha)(2 + K(1 + \eta)) - 2 + 2\alpha}.$$

K est une constante explicite. Elle dépend des constantes qui apparaissent dans les hypothèses sur g et f .

Une vitesse de convergence meilleure

Théorème

Si, de plus, b est borné, alors on peut choisir K aussi petit que l'on souhaite :

$$\sup_{0 \leq k \leq n} \mathbb{E} \left[\left| Y_{t_k}^{N,\varepsilon,n} - Y_{t_k} \right|^2 \right] + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E} \left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} \left| Z_{t_k}^{N,\varepsilon,n} - Z_t \right|^2 dt \right] \leq \frac{C_\eta}{n^{\alpha-\eta}},$$

Idée de la preuve

- $K = CC_2^2$ avec

$$|Z_t| \leq C_1 + \frac{C_2}{(T-t)^{1/2}}.$$

- $C_2 = C\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\int_t^T |Z_s|^2 ds \middle| \mathcal{F}_t \right]^{1/2}$.
- On montre que

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\int_t^T |Z_s|^2 ds \middle| \mathcal{F}_t \right] \xrightarrow{t \rightarrow T} 0.$$

Exemple traité

L'exemple traité est donné par

- $d = 1, T = 1,$
- $b = 0, \sigma = 1,$
- $g(x) = \sqrt{x \wedge 1} \mathbb{1}_{x>0},$
- $f(x, y, z) = \frac{|z|^2}{2}.$

Cet exemple a pour solution explicite

$$Y_0 = \mathbb{E} \left[e^{g(W_1)} \right] \simeq 0.4659.$$

Exemple traité

L'exemple traité est donné par

- $d = 1, T = 1,$
- $b = 0, \sigma = 1,$
- $g(x) = \sqrt{x \wedge 1} \mathbb{1}_{x>0},$
- $f(x, y, z) = \frac{|z|^2}{2}.$

Cet exemple a pour solution explicite

$$Y_0 = \mathbb{E} \left[e^{g(W_1)} \right] \simeq 0.4659.$$

Les espérances conditionnelles sont approchées par leur projection sur la base des hypercubes de côté δ . Ces projections sont estimées par une méthode des moindres carrés en simulant dans un premier temps M réalisations de X^n . On prend

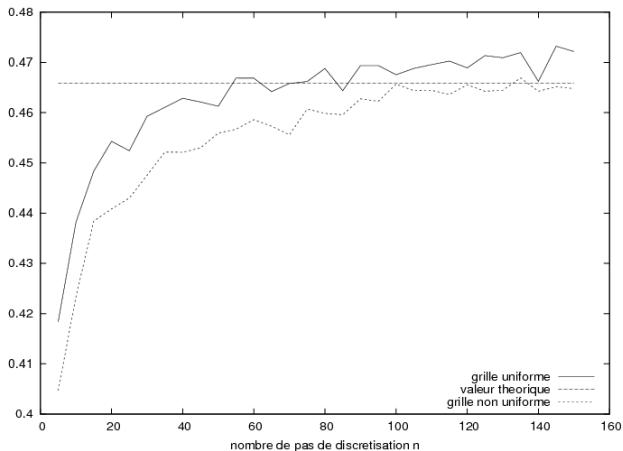
- $M = 100000$
- $\delta = 0.05.$

Influence de la projection

Sans projection de Z , l'algorithme « explose » dès $n = 15$.

Influence de la grille de discrétisation

On prend $K = 0, 1$ ($p \simeq 0, 47$).



Références (1/2)



P. Briand and F. Confortola.

BSDEs with stochastic Lipschitz condition and quadratic PDEs in Hilbert spaces.

Stochastic Process. Appl., 118(5) :818–838, 2008.



P. Imkeller and G. dos Reis.

Path regularity and explicit convergence rate for bsde with truncated quadratic growth.

Stochastic Process. Appl., In Press, Corrected Proof, 2009.



F. Delbaen, Y. Hu, and X. Bao.

Backward SDEs with superquadratic growth.

To appear in *Probab. Theory Related Fields*, 2009.

Références (2/2)



A. R.,

Numerical simulation of BSDEs with drivers of quadratic growth.

[arXiv :1001.0401v2](https://arxiv.org/abs/1001.0401v2)