Analyse 1 - MISMI, UE M1MI2011, Partie 2

Alain Yger

Institut de Mathématiques, Université Bordeaux 1, Talence 33405, France

E-mail address: Alain.Yger@math.u-bordeaux1.fr

Chapitre 3

Intégration au sens de Riemann

Ce chapitre est dévolu à l'intégration des fonctions numériques. Les deux symboles Σ et $\int$, l'un « romain », l'autre « calligraphique », désignent tous deux une même opération, la *somme* (qui, une fois divisée par le nombre de termes sommés, devient une *moyenne*). Cette opération de *somme* est le fondement de l'opération de *prise de moyenne* ou encore d'*intégration* en analyse, tandis que celle de *différence* (il suffit par exemple de penser à l'expression d'un taux de variations) est au cœur de l'inverse de cette opération d'intégration, à savoir l'opération de *différentiation*. En traitement d'image par exemple, moyenniser une image, c'est en obtenir une version « floue » (*cf.* par exemple la place de l'Étoile la nuit photographiée pendant un temps d'exposition significatif et les traînées lumineuses observées sur la pellicule), tandis que la dériver (horizontalement, verticalement, ou suivant une direction oblique), c'est tâcher d'extraire de l'image les « lignes de rupture » ou de contraste (horizontales, verticales, ou obliques, suivant la direction de différentiation choisie). On présente dans ce chapitre une introduction à l'intégration des fonctions d'une variable réelle (à valeurs réelles ou complexes) au sens de Riemann, c'est-à-dire suivant un maillage du domaine de définition (en l'occurrence ici un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ non réduit à un point). Ultérieurement, vous rencontrerez une autre approche, basée cette fois non plus sur un maillage de l'ensemble de départ, mais sur un maillage de l'ensemble d'arrivée : ce sera le principe de l'intégration des fonctions numériques (à valeurs réelles ou complexes) au sens de Lebesgue.

3.1. Fonctions en escalier sur un segment

Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ non réduit à un point ; une *subdivision* σ du segment $[a,b]$ (on dit aussi *maillage* de $[a,b]$) est par définition une suite finie de $N+1$ ($N \geq 1$) nombres $x_0, ..., x_N$, tels que :

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b.$$

Le *pas* de cette subdivision est le nombre strictement positif :

$$\tau(\sigma) := \sup_{0 \leq j \leq N-1} (x_{j+1} - x_j).$$

Si tous les nombres $x_{j+1} - x_j$, pour $j = 0, ..., N-1$ sont égaux, on dit que le pas de la subdivision σ est *régulier* ; la subdivision (ou le maillage) sont alors dits *réguliers*. Les nombres $x_0 = a, x_1, ..., x_N = b$ sont, eux, appelés les *nœuds* du maillage.

Définition 3.1 (fonctions en escalier sur un segment). Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ non réduit à un point. Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dite *en escalier* s'il existe une subdivision σ de $[a,b]$ telle que la fonction soit constante dans tout intervalle ouvert limité par deux nœuds consécutifs de la subdivision σ. La subdivision σ est alors dite *adaptée* à la fonction en escalier f.

Exemple 3.1. Si N est un entier strictement positif, la fonction

$$f\ : x \in [0,N] \mapsto E(x),$$

où $E(x)$ (partie entière de x) désigne la distance entre le nombre x et l'entier le plus proche de x à sa gauche, est en escalier sur $[0,N]$. Une subdivision adaptée est la subdivision :

$$0 = x_0 < x_1 = 1 < x_2 = 2 < \cdots < x_{N-1} = N-1 < x_N = N.$$

En effet, on a $f(x) = k$ sur $]k, k+1[$ pour $k = 0, ..., N-1$. En revanche, la fonction $x \in [0,N] \mapsto E(x) - x$ n'est pas en escalier sur $[a,b]$.

Remarque 3.1 (discontinuités d'une fonction en escalier réelle). Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ non réduit à un point. On remarque qu'une fonction en escalier $f\ : [a,b] \to \mathbb{R}$ ne possède (au plus) qu'un nombre fini de points de discontinuité sur $]a,b[$; ces points de discontinuité sont en effet à prendre parmi les nœuds (éventuels) d'un maillage adapté σ (différents des extrémités $x_0 = a$ et $x_N = b$). Les extrémités $a = x_0$ et $b = x_N$ du segment $[a,b]$ peuvent être aussi des discontinuités (si $f(a)$ diffère de la valeur constante de f sur $]a, x_1[$ ou si $f(b)$ diffère de la valeur constante de f sur $]x_{N-1}, b[$). *Ainsi le nombre de points de discontinuité d'une fonction en escalier f sur $[a,b]$ est-il toujours majoré par le nombre total de nœuds d'un maillage adapté à f.*

Remarque 3.2 (limites à gauche et à droite d'une fonction en escalier réelle). Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ non réduit à un point. Si $f\ : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction en escalier et que σ est une subdivision de $[a,b]$ adaptée à cette fonction, f est continue en tout point x de $[a,b]$ qui n'est pas un nœud de σ. En chaque nœud x_j de σ différent de a et b, f est constante (égale à A_j^+) sur un intervalle ouvert $]x_j, x_j + \epsilon_+[$ à droite de x_j, ainsi que sur un intervalle ouvert $]x_j - \epsilon_-, x_j[$ à gauche de x_j (où elle vaut A_j^-). La fonction f admet donc une limite à droite (égale à A_j^+) en x_j et une limite à gauche (égale à A_j^-) en x_j. Aux points a et b, f admet respectivement une limite à droite (en a) et une limite à gauche (en b). Une fonction $f\ : [a,b] \to \mathbb{R}$ en escalier sur $[a,b]$ admet donc une limite à droite en a, une limite à gauche en b, et des limites à droite et à gauche en tout point $c \in]a,b[$.

Étant donnée une fonction $f\ : [a,b] \to \mathbb{R}$ en escalier, il existe une unique subdivision $\tilde{\sigma}$ de $[a,b]$, de nœuds $x_0 = a$, $\tilde{x}_1$,...,$\tilde{x}_{\tilde{N}} = b$, telle que, pour tout $j = 1, ..., \tilde{N} - 1$,

$$f((\tilde{x}_j + \tilde{x}_{j-1})/2) \neq f((\tilde{x}_j + \tilde{x}_{j+1})/2).$$

Cette unique subdivision est dite *subdivision adaptée maximale* à la fonction en escalier $f\ : [a,b] \to \mathbb{R}$. C'est la subdivision adaptée dont le pas est le plus grand possible.

Étant donnée une fonction en escalier réelle sur un segment $[a,b]$ non réduit à un point, et une subdivision adaptée $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_N = b$, avec $f \equiv A_j$ sur $]x_j, x_{j+1}[$ pour $j = 0, ..., N-1$, le nombre :

$$\frac{1}{b-a} \sum_{j=0}^{N-1} (x_{j+1} - x_j) A_j = \frac{\sum\limits_{j=0}^{N-1} (x_{j+1} - x_j) A_j}{\sum\limits_{j=0}^{N-1} (x_{j+1} - x_j)} \tag{3.1}$$

s'interprète naturellement comme une *valeur moyenne* de la fonction f sur $[a,b]$. Cette valeur moyenne ne dépend pas de la subdivision adaptée choisie pour la calculer : il suffit, pour voir cela, étant données deux subdivisions σ_1 et σ_2 adaptées à f, de calculer cette valeur moyenne en utilisant la subdivision de $[a,b]$ dont l'ensemble des nœuds est l'union de l'ensemble des nœuds de σ_1 avec celui des nœuds de σ_2.

DÉFINITION 3.2 (intégrale d'une fonction en escalier sur un segment). Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ non réduit à un point. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction en escalier sur $[a,b]$, et que $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_N = b$ est une subdivision adaptée à cette fonction, on appelle *intégrale de f sur $[a,b]$* le nombre (indépendant du choix de la subdivision adaptée) :

$$\int_{[a,b]} f(t)\,dt := \sum_{j=0}^{N-1} (x_{j+1} - x_j)\,A_j, \tag{3.2}$$

où A_j désigne, pour $j = 0, ..., N-1$, la valeur (constante) prise par f sur l'intervalle ouvert $]x_j, x_{j+1}[$. *Autrement dit, l'intégrale de f sur $[a,b]$ est le produit par la longueur $b-a$ du segment $[a,b]$ de la moyenne de f sur $[a,b]$ telle qu'elle a été définie en* (3.1).

REMARQUE 3.3 (indifférence vis-à-vis des valeurs de la fonction aux nœuds d'un maillage adapté). La valeur de l'intégrale (3.2) sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ d'une fonction f réelle en escalier n'est pas affectée si l'on change de manière arbitraire les valeurs de f aux nœuds d'un maillage adapté.

Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions en escalier sur $[a,b]$ et que λ et μ sont deux nombres réels, on constate, en travaillant avec une subdivision adaptée à la fois à f et g (il suffit de prendre une subdivision dont l'ensemble des nœuds est l'union de celui des nœuds d'une subdivision σ_f adaptée à f avec celui des nœuds d'une subdivision σ_g adaptée à g) que la fonction $\lambda f + \mu g$ est encore en escalier sur $[a,b]$ et que :

$$\int_{[a,b]} (\lambda f + \mu g)(t)\,dt = \lambda \int_{[a,b]} f(t)\,dt + \mu \int_{[a,b]} g(t)\,dt. \tag{3.3}$$

Autrement dit, l'opération de prise d'intégrale des fonctions réelles en escalier sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ est une <u>opération $\mathbb{R}$-linéaire</u>.

L'intégrale sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ ($a < b$) d'une fonction en escalier réelle positive ou nulle sur ce segment est, d'après la définition (3.2), un nombre positif ou nul. Par conséquent, si f et g sont deux fonctions en escalier de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, on a :

$$\Big(\forall x \in [a,b],\ f(x) \le g(x)\Big) \Longrightarrow \Big(\int_{[a,b]} f(t)\,dt \le \int_{[a,b]} g(t)\,dt\Big). \tag{3.4}$$

Autrement dit, l'opération de prise d'intégrale des fonctions en escalier sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ est une <u>opération monotone</u>. En particulier, comme $|f| \ge \sup(-f, f)$ sur $[a,b]$, on a, pour toute fonction en escalier sur $[a,b]$:

$$\Big|\int_{[a,b]} f(t)\,dt\Big| \le \int_{[a,b]} |f(t)|\,dt. \tag{3.5}$$

3.2. Intégration des fonctions réelles bornées définies sur un segment

Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et $f\ : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction réelle bornée, ce qui signifie qu'il existe deux constantes réelles m et M telles que :

$$\forall\, x \in [a,b],\ m \leq f(x) \leq M.$$

L'ensemble $E^f_{\leq}$ des fonctions réelles u en escalier sur $[a,b]$ et telles que $u(x) \leq f(x)$ pour tout $x \in [a,b]$ est donc non vide (il contient la fonction constante égale à m sur $[a,b]$). De même, l'ensemble $E^f_{\geq}$ des fonctions réelles v en escalier sur $[a,b]$ et telles que $v(x) \geq f(x)$ pour tout $x \in [a,b]$ est aussi non vide (il contient la fonction constante égale à M sur $[a,b]$). Si $u \in E^f_{\leq}$, on a $u(x) \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in [a,b]$ et, par conséquent, en utilisant l'inégalité (3.4) :

$$\forall\, u \in E^f_{\leq},\ \int_{[a,b]} u(t)\, dt \leq \int_{[a,b]} M\, dt = M(b-a).$$

Notons que, parmi les fonctions $u \in E^f_{\leq}$, figure la fonction constante égale à m, pour laquelle l'intégrale sur $[a,b]$ vaut $m(b-a)$. De la même manière, si $v \in E^f_{\geq}$, on a $m \leq f(x) \leq v(x)$ pour tout $x \in [a,b]$ et, par conséquent, toujours en utilisant l'inégalité (3.4) :

$$\forall\, v \in E^f_{\geq},\ \int_{[a,b]} v(t)\, dt \geq \int_{[a,b]} m\, dt = m(b-a).$$

Notons que, parmi les fonctions $v \in E^f_{\geq}$, figure la fonction constante égale à M, pour laquelle l'intégrale sur $[a,b]$ vaut $M(b-a)$.

Si l'on prétend donner un sens à un nombre qui correspondrait à l'intégrale de la fonction f sur $[a,b]$, deux possibilités s'offrent à nous :

— soit tenter d'évaluer ce nombre « par en dessous », en disant qu'il s'agit de la borne supérieure de l'ensemble

$$\Big\{ \int_{[a,b]} u(t)\, dt\, ;\, u \in E^f_{\leq} \Big\} \subset [(b-a)m, (b-a)M]\ ;$$

— soit tenter de l'évaluer « par dessus », en disant qu'il s'agit de la borne inférieure de l'ensemble

$$\Big\{ \int_{[a,b]} v(t)\, dt\, ;\, v \in E^f_{\geq} \Big\} \subset [(b-a)m, (b-a)M]\ ;$$

Pour qu'un tel nombre existe, encore faut-il que ces calculs soient cohérents. Tout ce que l'on peut assurer, puisque $u \leq f \leq v$ sur $[a,b]$ pour toute fonction $u \in E^f_{\leq}$ et toute fonction v dans $E^f_{\geq}$, est que :

$$\sup \Big\{ \int_{[a,b]} u(t)\, dt\, ;\, u \in E^f_{\leq} \Big\} \leq \inf \Big\{ \int_{[a,b]} v(t)\, dt\, ;\, v \in E^f_{\geq} \Big\}.$$

Mais il n'y a pas toujours égalité entre ces deux nombres, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 3.2 (un exemple posant problème : on ne peut pas toujours définir l'intégrale sur un segment d'une fonction réelle bornée !). Soit f la fonction définie sur $[a,b]$ $(a<b)$ par :

$$\forall\, x \in [a,b],\ f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [a,b]\cap\mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in [a,b]\setminus\mathbb{Q}. \end{cases}$$

Toute fonction de $u \in E^f_{\leq}$ est nécessairement négative en tous les points qui ne sont pas des nœuds d'une subdivision adaptée (car tout intervalle ouvert de $[a,b]$, en particulier tout intervalle ouvert entre deux nœuds d'une subdivision adaptée à u, contient au moins un nombre irrationnel où $f \geq u$ est nulle) ; on a donc

$$\sup\Big\{\int_{[a,b]} u(t)\,dt\,;\ u \in E^f_{\leq}\Big\} \leq 0.$$

D'un autre côté, toute fonction $v \in E^f_{\geq}$ est nécessairement minorée par 1 en tous les points qui ne sont pas des nœuds d'une subdivision adaptée (car tout intervalle ouvert de $[a,b]$, en particulier tout intervalle ouvert entre deux nœuds d'une subdivision adaptée à u, contient au moins un nombre rationnel où $v \geq f \geq 1$) ; on a donc

$$\inf\Big\{\int_{[a,b]} v(t)\,dt\,;\ v \in E^f_{\geq}\Big\} \geq b-a > 0.$$

On voit sur cet exemple qu'il y a incompatibilité entre les deux approches proposées, à savoir l'évaluation de ce qui serait l'intégrale de f « par en dessous » et l'évaluation de ce qui devrait être aussi l'intégrale de f, cette fois « par au dessus ». Cet exemple (par trop « mathématique ») peut certes paraître un tant soit peu artificiel, mais il existe dans la nature nombre de phénomènes matérialisés par des fonctions numériques pour lesquelles on peut deviner qu'un tel problème se pose : pensez par exemple à une fonction positive f de nature *fractale* [1], dont le graphe ressemblerait à un cactus hérissé de piquants ou au bord d'un flocon de neige. Le calcul de l'intégrale « par en dessous » tend intuitivement dans ce cas à donner 0 tandis que le calcul de l'intégrale « par au dessus » semble, lui, tendre à donner un nombre strictement positif (vu le caractère « expansionniste » de la fonction : un flocon de neige tend à occuper un maximum d'espace !).

Ce qui précède nous conduit naturellement à la définition suivante :

DÉFINITION 3.3 (fonction réelle intégrable Riemann). Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est *Riemann-intégrable* (ou encore *intégrable au sens de Riemann* [2]) si et seulement si elle est bornée sur $[a,b]$ et telle que :

$$\sup\Big\{\int_{[a,b]} u(t)\,dt\,;\ u \in E^f_{\leq}\Big\} = \inf\Big\{\int_{[a,b]} v(t)\,dt\,;\ v \in E^f_{\geq}\Big\}. \tag{3.6}$$

Si tel est le cas, on définit alors l'intégrale de f sur $[a,b]$ (au sens de Riemann) par :

$$\int_{[a,b]} f(t)\,dt = \sup\Big\{\int_{[a,b]} u(t)\,dt\,;\ u \in E^f_{\leq}\Big\} = \inf\Big\{\int_{[a,b]} v(t)\,dt\,;\ v \in E^f_{\geq}\Big\}. \tag{3.7}$$

1. En examinant le graphe de pareille fonction avec une loupe, quelque soit le grossissement, on voit apparaître le même graphe.

2. On attribue au géomètre allemand Bernhard Riemann (1826-1866) cette approche de l'intégrale des fonctions numériques, approche qu'il a souvent exploité dans ses travaux dont la finalité était tout autre. Les contributions majeures de Riemann concernent en effet surtout la géométrie. Cette approche de la notion d'intégrale est, on le verra, celle qui se prête le mieux au calcul numérique approché.

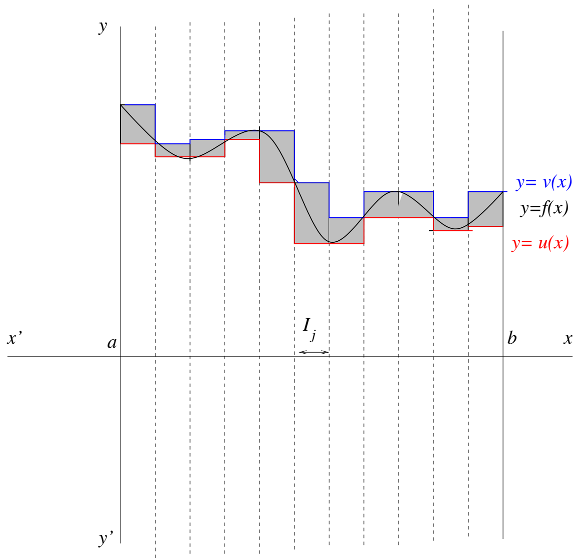

FIGURE 3.1. Illustration du critère d'intégrabilité Riemann

Le critère suivant (qu'illustre la figure 3.1) permet de caractériser si oui ou non une fonction bornée $f\ : [a,b] \to \mathbb{R}$ est Riemann intégrable.

PROPOSITION 3.1 (critère d'intégrabilité Riemann). *Soit f une fonction réelle bornée définie sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ ($a < b$). La fonction f est Riemann intégrable sur $[a,b]$ si et seulement si*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \exists u_n \in E^f_{\leq},\ \exists v_n \in E^f_{\geq},\ \text{t.q}\ \lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} (v_n - u_n)(t)\, dt = 0. \tag{3.8}$$

De plus, si tel est le cas, alors, pour toute suite de fonctions en escalier $(w_n)_{n\geq 1}$ telles que $u_n \leq w_n \leq v_n$ sur $[a,b]$ pour tout n assez grand, on a

$$\int_{[a,b]} f(t)\, dt = \lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} w_n(t)\, dt. \tag{3.9}$$

DÉMONSTRATION. On utilise le fait suivant : si A est un ensemble non vide borné de $\mathbb{R}$, alors $\sup A$ et $\inf A$ s'expriment comme limites de suites d'éléments de A : si $n \in \mathbb{N}^*$, il existe en effet toujours un élément $I_n \in A$ tel que l'on ait l'encadrement $\sup A - 1/n < I_n \leq \sup A$ et un élément $J_n \in A$ tel que, cette fois, $\inf A \leq v_n < \inf A + 1/n$. On prend pour A soit l'ensemble des nombres $\int_{[a,b]} u(t)\, dt$ (lorsque $u \in E^f_{\leq}$) pour justifier l'existence de u_n (d'intégrale sur $[a,b]$ le nombre I_n), soit l'ensemble des nombres $\int_{[a,b]} v(t)\, dt$ (lorsque $v \in E^f_{\geq}$) pour justifier l'existence de v_n (d'intégrale sur $[a,b]$ le nombre J_n). La formule (3.9) résulte de la monotonie de l'opération de prise d'intégrale pour les fonctions en escalier (*cf.* l'inégalité 3.4), couplée avec l'utilisation du lemme des gendarmes. $\square$

3.3. Une classe de fonctions réelles intégrables sur un segment

Toute fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ en escalier est intégrable au sens de Riemann. Voici une classe bien plus large de fonctions encore intégrables au sens de Riemann.

DÉFINITION 3.4 (fonction réelle réglée sur un segment de $\mathbb{R}$, première définition). Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ non réduit à un point. Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dite *réglée*[3] si et seulement si l'on peut trouver une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de fonctions en escalier de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} \Big(\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - u_n(x)| \Big) = 0. \tag{3.10}$$

On dit alors qu'une telle suite $(u_n)_{n\geq 1}$ *approche* f *uniformément sur* $[a,b]$ ou encore que f *est limite uniforme de la suite* $(u_n)_{n\geq 1}$ *sur* $[a,b]$.

REMARQUE 3.4. Toute combinaison linéaire à coefficients réels de fonctions réglées de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ est encore réglée.

Voici une caractérisation équivalente des fonctions réglées qui nous sera utile plus loin (dans la preuve de la Proposition 3.5).

PROPOSITION 3.2 (fonctions réelles réglées sur un segment de $\mathbb{R}$ et *oscillation*). *Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est réglée si et seulement si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe une subdivision σ^ϵ de $[a,b]$ telle que, si x_j^ϵ et x_{j+1}^ϵ sont deux nœuds consécutifs quelconques de la subdivision σ^ϵ, on ait*[4]

$$\forall\, \xi, \eta \in]x_j^\epsilon, x_{j+1}^\epsilon[,\ |f(\xi) - f(\eta)| \leq \epsilon. \tag{3.11}$$

DÉMONSTRATION. Supposons que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe une subdivision σ^ϵ de $[a,b]$ telle que l'on ait (3.11) dès que x_j^ϵ et x_{j+1}^ϵ sont deux nœuds consécutifs quelconques de la subdivision σ^ϵ. On définit une fonction en escalier $u_\epsilon : [a,b] \to \mathbb{R}$ (ayant précisément σ^ϵ pour subdivision adaptée) en posant, pour tout $x \in]x_j^\epsilon, x_{j+1}^\epsilon[$, $u_\epsilon(x) = f(\xi_j^\epsilon)$, où ξ_j^ϵ est un point arbitraire de $]x_j^\epsilon, x_{j+1}^\epsilon[$ (aux nœuds de la subdivision σ^ϵ, on prend $u_\epsilon(x_j^\epsilon) = f(x_j^\epsilon)$). On a clairement ainsi, d'après (3.11) :

$$\forall\, x \in [a,b],\ |f(x) - u_\epsilon(x)| \leq \epsilon.$$

La fonction u_ϵ approche donc f à ϵ près de manière uniforme. La fonction f est donc réglée sur $[a,b]$.

Supposons maintenant $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ réglée sur $[a,b]$. On peut construire une subdivision σ^ϵ (adaptée à une fonction en escalier u_ϵ approchant f de manière

---

3. La terminologie ≪ réglée ≫ peut se justifier ainsi : pour tracer le graphe d'une fonction en escalier, on peut s'aider d'une règle disposée parallèlement à l'axe des abscisses, puis que l'on translate ensuite dans la direction de l'axe des ordonnées. Le fait que les fonctions réglées soient les limites uniformes de fonctions en escalier ou encore les fonctions d'oscillation locale arbitrairement petite (voir la Proposition 3.2 plus loin) éclaire ainsi le choix du qualificatif ≪ réglée ≫.

4. La quantité :

$$\sup_{\xi,\eta\in]x_j^\epsilon, x_{j+1}^\epsilon[} |f(\xi) - f(\eta)[$$

s'appelle *oscillation* de la fonction f sur l'intervalle ouvert $]x_j^\epsilon, x_{j+1}^\epsilon[$. La condition (3.11) s'énonce donc encore en disant que l'oscillation de f sur tout intervalle ouvert entre deux nœuds consécutifs quelconques de la subdivision σ^ϵ est majorée par ϵ.

uniforme à ϵ près) de manière à ce que, si x_j^ϵ et x_{j+1}^ϵ sont deux nœuds consécutifs de cette subdivision σ^ϵ, on ait, pour tout $\xi, \eta \in]x_j^\epsilon, x_{j+1}^\epsilon[$,

$$\begin{aligned} |f(\xi) - f(\eta)| &\leq |f(\xi) - u_\epsilon(\xi)| + |u_\epsilon(\xi) - f(\eta)| \\ &= |f(\xi) - u_\epsilon(\xi)| + |u_\epsilon(\eta) - f(\eta)| \\ &\leq 2 \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - u_\epsilon(x)| = 2\epsilon. \end{aligned} \tag{3.12}$$

L'oscillation de f sur tout intervalle ouvert entre deux nœuds consécutifs de la subdivision σ^ϵ ainsi construite est majorée par 2ϵ. Comme ϵ peut être choisi arbitrairement petit, il en est de même pour 2ϵ. La Proposition 3.2 est ainsi complètement démontrée. □

La première grande classe de fonctions réelles réglées sur un segment est celle des fonctions réelles continues sur ce segment. En effet, on a la proposition suivante.

Proposition 3.3. *Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ non réduit à un point. Toute fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ est réglée.*

Démonstration. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction réelle continue sur $[a, b]$. D'après le théorème de Heine (Théorème 2.3), une telle fonction f est uniformément continue sur $[a, b]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe donc $\eta_n > 0$ tel que

$$\forall\, x, y \in [a, b],\ |x - y| \leq \eta_n \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{n}. \tag{3.13}$$

Soit σ_n une subdivision de $[a, b]$ de pas inférieur où égal à η_n et u_n la fonction en escalier (pour laquelle σ_n se trouve être une subdivision adaptée) définie entre deux nœuds consécutifs $x_{n,j}$ et $x_{n,j+1}$ (parmi les $N_n + 1$ nœuds de σ_n) par :

$$\forall\, x \in]x_{n,j}, x_{n,j+1}[,\ u_n(x) = f(\xi_{n,j}),$$

où $\xi_{n,j}$ est un point <u>arbitraire</u> du segment $[x_{n,j}, x_{n,j+1}]$. Pour chaque nœud $x_{n,j}$, $j = 0, ..., N_n$, on pose $u_n(x_{n,j}) = f(x_{n,j})$. On a donc, pour tout $x \in]x_{n,j}, x_{n,j+1}[$ (l'entier j étant ici arbitraire dans $\{0, ..., N_n\}$), en utilisant (3.13) et le fait que le pas de la subdivision σ_n soit inférieur ou égal précisément à η_n,

$$|f(x) - u_n(x)| = |f(x) - f(\xi_{n,j})| \leq \frac{1}{n}. \tag{3.14}$$

Ceci reste vrai si $x = x_{n,j}$ ou $x = x_{n,j+1}$ puisque le membre de gauche de (3.14) est alors nul. La condition (3.10) est donc satisfaite par la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ ainsi construite. La fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est ainsi réglée sur $[a, b]$. □

Proposition 3.4 (toute fonction réelle réglée est Riemann intégrable). *Si f est une fonction réglée de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, la fonction f vérifie le critère* (3.8)*, et, par conséquent, est Riemann-intégrable sur $[a, b]$. De plus, si $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite de fonctions réelles en escalier sur $[a, b]$ qui vérifie la clause* (3.10)*, on a*

$$\int_{[a,b]} f(t)\, dt = \lim_{n \to +\infty} \int_{[a,b]} u_n(t)\, dt. \tag{3.15}$$

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut, par hypothèses, trouver, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une fonction en escalier $u_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall\, x \in [a, b],\ u_n(x) - \frac{1}{n} \leq f(x) \leq u_n(x) + \frac{1}{n}.$$

La fonction en escalier

$$\tilde{u}_n \ : x \in [a,b] \mapsto u_n(x) - \frac{1}{n}$$

est donc dans $E^f_{\leq}$, tandis que la fonction en escalier

$$\tilde{v}_n \ : x \in [a,b] \mapsto u_n(x) + \frac{1}{n}$$

est dans $E^f_{\geq}$. Or, en utilisant le fait que la prise d'intégrale des fonctions en escalier est une opération linéaire (*cf.* (3.3)), on en déduit :

$$0 \leq \int_{[a,b]} (\tilde{v}_n - \tilde{u}_n)(t)\, dt \leq \int_{[a,b]} \frac{2}{n}\, dt = \frac{b-a}{2n}.$$

On a donc bien

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} (v_n - u_n)(t)\, dt = 0.$$

Le critère (3.8) est bien satisfait. La fonction $f \ : [a,b] \to \mathbb{R}$ est bien Riemann-intégrable sur $[a,b]$. De plus, comme

$$\tilde{u}_n \leq u_n \leq \tilde{v}_n \text{ sur } [a,b] \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*,$$

on a

$$\int_{[a,b]} f(t)\, dt = \lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} u_n(t)\, dt$$

d'après la dernière assertion de la Proposition 3.4. □

3.4. Calcul approché de l'intégrale des fonctions réelles continues

Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et $f \ : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$. La fonction f est réglée sur $[a,b]$ (d'après la Proposition 3.3), donc Riemann-intégrable sur $[a,b]$ (d'après la Proposition 3.4). Il est important d'indiquer comment se calcule de manière approchée dans ce cas l'intégrale :

$$\int_a^b f(t)\, dt.$$

Soit $(\sigma_n)_{n\geq 1}$ une suite de subdivisions de $[a,b]$ dont le pas tend vers 0. Soit, pour chaque intervalle ouvert $[x_{n,j}, x_{n,j+1}]$ entre deux nœuds consécutifs parmi les N_n+1 nœuds de la subdivision σ_n, un réel arbitraire $\xi_{n,j}$ appartenant à $[x_{n,j}, x_{n,j+1}]$. Alors (compte tenu de la construction de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ donnée dans la preuve de la Proposition 3.3),

$$\int_{[a,b]} f(t)\, dt = \lim_{n\to+\infty} \left[\sum_{j=0}^{N_n-1} (x_{n,j+1} - x_{n,j}) f(\xi_{n,j}) \right]. \tag{3.16}$$

Les intégrales de fonctions en escalier :

$$\int_{[a,b]} u_n(t)\, dt = \sum_{j=0}^{N_n-1} (x_{n,j+1} - x_{n,j}) f(\xi_{n,j}),\ \ n \in \mathbb{N}^*, \tag{3.17}$$

qui constituent ainsi des versions « approchées » de l'intégrale de la fonction continue f, sont dites *sommes de Riemann* de la fonction continue f.

3.4.1. Un calcul approché : la méthode des rectangles. La *méthode des rectangles* consiste, pour calculer de manière approchée l'intégrale d'une fonction continue $f\ : [a,b] \to \mathbb{R}$, à utiliser la suite de subdivisions régulières $(\sigma_n)_{n\geq 1}$, le pas de σ_n étant $h_n := (b-a)/n$ (le nombre de nœuds est ici $N_n + 1 = n+1$).

Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, pour chaque $j \in \{0, ..., n\}$, on choisit, par souci de faire la part des choses,

$$\xi_{n,j} = \frac{x_{n,j} + x_{n,j+1}}{2} = a + \frac{2j+1}{2n}(b-a), \quad j = 0, ..., n-1.$$

On a alors, avec ce choix, l'approximation de l'intégrale de f, dite *approximation par la méthode des rectangles* :

$$\int_{[a,b]} f(t)\, dt = \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{b-a}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f\Big(a + \frac{2j+1}{2n}(b-a)\Big)\right]. \tag{3.18}$$

La terminologie utilisée (méthode ≪ des rectangles ≫) ici vient du fait que si $n = 1$, l'intégrale approchée figurant à droite de (3.18) :

$$(b-a) f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)$$

s'interprète comme la <u>surface</u> (ou l'<u>aire</u> [5]) du <u>rectangle</u> du plan $\mathbb{R}^2$ dont les sommets seraient les quatre points $(a,0)$, $(b,0)$, $\big(a, f\big((a+b)/2\big)\big)$, $\big(b, f\big((a+b)/2\big)\big)$.

Remarque 3.5 (où la formule approchée (3.18) s'avère être une formule exacte). S'il existe un entier $n = 2^{p_0}$, $p_0 \in \mathbb{N}$, tel que la fonction continue f soit de plus affine sur tout segment joignant deux nœuds consécutifs de la subdivision régulière de pas $(b-a)/2^{p_0}$, alors, on observe que :

$$\int_{[a,b]} f(t)\, dt = \frac{b-a}{2^p} \sum_{j=0}^{2^p - 1} f\Big(a + \frac{2j+1}{2^{p+1}}(b-a)\Big) \quad \forall\, p \geq p_0, \tag{3.19}$$

autrement dit, dans ce cas particulier, la formule approchée (3.18) devient une formule <u>exacte</u> (à savoir la formule (3.19)).

3.4.2. Un autre calcul approché : la méthode des trapèzes. On peut aussi dans la formule approchée (3.16) remplacer $f(\xi_{n,j})$ par

$$t_1 f(\xi_{n,j}^{(1)}) + \cdots + t_m f(\xi_{n,j}^{(m)}),$$

où $t_1, ..., t_m$ sont m nombres positifs de somme 1 arbitrairement fixés et les nombres $\xi_{n,j}^{(k)}$, $k = 1, ..., m$, sont m nombres réels du segment $[x_{n,j}, x_{n,j+1}]$, ce pour tout entier $j = 0, ..., N_n$.

L'exemple le plus important est sans doute celui où, comme dans la sous-section précédente 3.4.1, la subdivision σ_n est régulière et de pas $h_n = (b-a)/n$ (le nombre de nœuds étant toujours $N_n + 1 = n+1$), et où l'on prend $m = 2$, $t_1 = t_2 = 1/2$, $\xi_{n,j}^{(1)} = x_{n,j}$ et $\xi_{n,j}^{(2)} = x_{n,j+1}$ pour $j = 0, ..., n-1$. On obtient alors l'approximation de l'intégrale de f dite *approximation par la méthode des trapèzes* :

$$\int_{[a,b]} f(t)\, dt = \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{b-a}{n} \Big(\frac{f(a)}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} f\Big(a + j\frac{b-a}{n}\Big) + \frac{f(b)}{2}\Big)\right]. \tag{3.20}$$

---

5. Il est important d'observer ici, pour la première fois, l'intime relation entre la notion d'intégrale d'une fonction continue sur un segment et celle de calcul d'aire ou de surface.

La terminologie utilisée ici (méthode « des trapèzes ») vient du fait que si $n = 1$, l'intégrale approchée figurant à droite de (3.20) :

$$\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$$

s'interprète comme la surface du <u>trapèze</u> de sommets les points $(a,0)$, $(b,0)$, $\big(a,f(a)\big)$, $\big(b,f(b)\big)$ du plan $\mathbb{R}^2$.

Remarque 3.6 (où la formule approchée (3.20) s'avère être une formule exacte). S'il existe un entier $n = 2^{p_0}$, $p_0 \in \mathbb{N}$, tel que la fonction continue f soit de plus affine sur tout segment joignant deux nœuds consécutifs de la subdivision régulière de pas $(b-a)/2^{p_0}$, alors, on observe que :

$$\int_{[a,b]} f(t)\,dt = \frac{b-a}{2^p}\Big(\frac{f(a)}{2} + \sum_{j=1}^{2^p-1} f\Big(a+j\frac{b-a}{2^p}\Big) + \frac{f(b)}{2}\Big) \qquad \forall\, p \geq p_0, \tag{3.21}$$

autrement dit, dans ce cas particulier, la formule approchée (3.20) devient une formule <u>exacte</u> (à savoir la formule (3.21)).

3.5. Une seconde caractérisation des fonctions réglées réelles

Il existe une définition équivalente (à celle de la Définition 3.4) pour la notion de fonction réelle réglée sur un segment $[a,b]$. Cette définition nous conduira à proposer (toujours suivant la Proposition 3.4) d'autres classes d'exemples de fonctions réelles Riemann-intégrables sur un segment de $\mathbb{R}$.

Proposition 3.5 (fonction réglée, seconde définition). *Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ non réduit à un point. Une fonction $f\ : [a,b] \to \mathbb{R}$ est réglée sur $[a,b]$ si et seulement si elle admet une limite à droite en a, une limite à gauche en b et, pour tout point $c \in]a,b[$, des limites à gauche et à droite au point c.*

Démonstration. Supposons f réglée sur $[a,b]$ (au sens de la Définition 3.4). Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions en escalier sur $[a,b]$ telle que l'on ait (3.10). Soit c un point de $]a,b[$. En ce point, chaque fonction u_n, $n \geq 1$, admet une limite à droite $u_n^+(c)$ et une limite à gauche $u_n^-(c)$ (*cf.* la Remarque 3.2). Montrons que la suite $(u_n^+(c))_{n\geq 1}$ est de Cauchy. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tel que

$$\begin{gathered}\forall\, n \geq N(\epsilon),\ \forall\, p \geq N(\epsilon),\\ \sup_{x\in[a,b]} |u_n(x) - u_p(x)| \leq \sup_{x\in[a,b]} \big(|u_n(x) - f(x)| + |u_p(x) - f(x)|\big) \leq 2\epsilon.\end{gathered} \tag{3.22}$$

On a donc

$$\forall\, n \geq N(\epsilon),\ \forall\, p \geq N(\epsilon),\ \forall\, h \in]0, b-c],\ |u_n(c+h) - u_p(c+h)| \leq 2\epsilon.$$

En faisant tendre h vers 0 par valeurs supérieures, on en déduit :

$$\forall\, n \geq N(\epsilon),\ \forall\, p \geq N(\epsilon),\ |u_n^+(c) - u_p^+(c)| \leq 2\epsilon,$$

ce qui prouve bien que la suite $(u_n^+(c))_{n\geq 1}$ est de Cauchy, donc converge (d'après le Théorème 1.3) vers une limite $l^+(c) \in \mathbb{R}$. Le même raisonnement montre que la suite $(u_n^-(c))_{n\geq 1}$ est de Cauchy, donc converge vers une limite $l^-(c) \in \mathbb{R}$. Montrons que f admet $l^+(c)$ comme limite à droite au point c. Soit $\epsilon > 0$ et $\tilde{N}(\epsilon)$ tel que

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - u_{\tilde{N}(\epsilon)}(x)| \leq \epsilon \quad \text{et} \quad |u^+_{\tilde{N}(\epsilon)}(c) - l^+(c)| \leq \epsilon$$

(un tel entier $\tilde{N}(\epsilon) \geq N(\epsilon)$ existe par hypothèses). On a

$$\begin{aligned}
&\forall\, h \in]0, b-c],\ |f(c+h) - l^+(c)| \leq \\
&\leq \big|f(c+h) - u_{\tilde{N}(\epsilon)}(c+h)\big| + \big|u_{\tilde{N}(\epsilon)}(c+h) - u^+_{\tilde{N}(\epsilon)}(c)\big| \\
&\qquad + \big|u^+_{\tilde{N}(\epsilon)}(c) - l^+(c)\big| \\
&\leq 2\epsilon + \big|u_{\tilde{N}(\epsilon)}(c+h) - u^+_{\tilde{N}(\epsilon)}(c)\big|.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Mais, puisque $u^+_{\tilde{N}(\epsilon)}(c)$ est la limite à droite en c de la fonction en escalier $u_{\tilde{N}(\epsilon)}$, il existe $\eta = \eta(\epsilon) > 0$ tel que

$$h \in]0, \eta(\epsilon)] \Longrightarrow \Big(\big|u_{\tilde{N}(\epsilon)}(c+h) - u^+_{\tilde{N}(\epsilon)}(c)\big| \leq \epsilon\Big).$$

On a donc ainsi :

$$h \in]0, \eta(\epsilon)] \Longrightarrow \Big(|f(c+h) - l^+(c)| \leq 3\epsilon\Big).$$

Ceci montre que f admet $l^+(c)$ comme limite à droite en c. On montrerait de même que f admet $l^-(c)$ comme limite à gauche en c. Au point a, f admet (suivant le même raisonnement) pour limite à droite $l^+(a)$ (la limite, lorsque n tend vers l'infini, de la suite convergente car de Cauchy $(u_n^+(a))_{n\geq 1}$). Au point b, f admet (toujours suivant le même raisonnement) pour limite à gauche $l^-(b)$ (la limite, lorsque n tend vers l'infini, de la suite convergente car de Cauchy $(u_n^-(b))_{n\geq 1}$). On vient donc ainsi de démontrer que, si f est réglée sur $[a,b]$, elle admet une limite à droite en a, une limite à gauche en b, des limites à droite et à gauche en tout point $c \in]a,b[$.

Supposons, réciproquement, que la fonction $f\ : [a,b] \to \mathbb{R}$ ait une limite à droite en a, une limite à gauche en b, des limites à droite et à gauche en tout point $c \in]a,b[$. Si f n'était pas réglée sur $[a,b]$, il existerait (d'après la Proposition 3.2) $\delta > 0$ tel que, pour toute subdivision σ^0 de $I_0 = [a,b]$, il existe au moins deux éléments $\xi^{\sigma_0} < \eta^{\sigma_0}$ appartenant tous deux à l'un des intervalles ouverts entre deux nœuds consécutifs de σ_0, tels que

$$|f(\xi^{\sigma_0}) - f(\eta^{\sigma_0})| \geq \delta.$$

L'un ou l'autre des deux intervalles $[a,(a+b)/2]$ ou $[a,(a+b)/2]$ (que l'on note I_1) hérite alors de la propriété suivante : pour toute subdivision σ^1 de I_1, il existe deux éléments $\xi^{\sigma_1} < \eta^{\sigma_1}$ appartenant tous deux à l'un des intervalles ouverts entre deux nœuds consécutifs de σ_1 tels que

$$|f(\xi^{\sigma_1}) - f(\eta^{\sigma_1})| \geq \delta.$$

On reprend ensuite le raisonnement à partir cette fois de I_1 au lieu de I_0. On construit ainsi une suite de segments emboîtés $I_0 = [a,b] \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$. D'après le fait que $\mathbb{R}$ vérifie la propriété des segments emboités (Proposition 1.5), l'intersection de tous les segments I_k, $k \in \mathbb{N}$ (dont la longueur tend vers 0) contient un unique point $c \in [a,b]$. En ce point c, f admet une limite à gauche et une limite à droite (si $c \in]a,b[$), seulement une limite à droite si $c = a$, ou seulement une limite à gauche si $c = b$. Alors, si ξ^{σ_k} et η^{σ_k} sont du même côté de c dans I_k pour k assez grand (ce qui doit être la configuration au vu de la construction des I_k), la clause

$$|f(\xi^{\sigma_k}) - f(\eta^{\sigma_k})| \geq \delta$$

contredit le fait que f ait une limite du côté où se trouvent les deux points ξ^{σ_k} et η^{σ_k} par rapport au point c. L'hypothèse faite sur f (à savoir que f n'est pas réglée sur $[a,b]$) conduit donc à une contradiction. Nous avons ainsi prouvé par l'absurde que si f a une limite à droite en a, une limite à gauche en b, des limites à droite et à gauche en tout point $c \in]a, b[$, alors f est réglée sur $[a, b]$. Ceci achève la preuve de la Proposition 3.5. $\square$

Toute fonction monotone sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ admet une limite à gauche et à droite en tout point $c \in [a, b]$ (seulement à gauche si $c = a$, à droite si $c = b$). Elle est donc réglée d'après la Proposition 3.5. Nous déduisons ainsi de la Proposition 3.4 la proposition suivante :

Proposition 3.6. *Toute fonction monotone $f\ : [a, b] \to \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable sur $[a, b]$. Plus généralement, toute différence $f - g$ de deux fonctions monotones $f\ : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $g\ : [a, b] \to \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable sur $[a, b]$.*

3.6. La classe des fonctions Riemann-intégrables

La classe des fonctions réelles Riemann-intégrables est stable par un certain nombre d'opérations usuelles classiques.

Proposition 3.7 (linéarité de la prise d'intégrable au sens de Riemann). *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $g\ : [a, b] \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions réelles Riemann-intégrables sur $[a, b]$, il en est de même de toute combinaison linéaire $\lambda f + \mu g$, où λ et μ sont des nombres réels, et l'on a de plus la formule :*

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)\, dt = \lambda \int_a^b f(t)\, dt + \mu \int_a^b f(t)\, dt. \tag{3.24}$$

Démonstration. Comme le sont les fonctions f et g, la fonction $\lambda f + \mu g$ est bornée sur $[a, b]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $u_n \in E^f_{\leq}$, $v_n \in E^f_{\geq}$, $\tilde{u}_n \in E^g_{\leq}$, $\tilde{v}_n \in E_{\geq g}$, telles que

$$\int_a^b ((v_n(t) - u_n(t))\, dt \leq \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \int_a^b (\tilde{v}_n(t) - \tilde{u}_n(t))\, dt \leq \frac{1}{n}. \tag{3.25}$$

Si $\lambda \geq 0$ et $\mu \geq 0$, on a

$$\lambda u_n + \mu \tilde{u}_n \leq \lambda f + \mu g \leq \lambda \tilde{u}_n + \mu \tilde{v}_n$$

et

$$\int_a^b \big((\lambda v_n + \mu \tilde{v}_n) - (\lambda u_n + \mu \tilde{u}_n)\big)(t)\, dt \leq \frac{\lambda + \mu}{n}.$$

La fonction $\lambda f + \mu g$ obéit donc au critère d'intégrabilité de la Proposition 3.1 et son intégrale se calcule par la formule (3.24) du fait de la linéarité de la prise d'intégrale sur les fonctions en escalier. On remarque ensuite que, si f est Riemann-intégrable, il en est de même de $-f$: il suffit en effet dans ce cas d'utiliser l'encadrement $-v_n \leq -f \leq -u_n$; l'intégrale de $-f$ est l'opposée de l'intégrale de f. Les constantes λ et μ peuvent par conséquent être choisies de signe quelconque. $\square$

Proposition 3.8 (stabilité par prise de sup ou d'inf). *Si $f\ : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $g\ : [a, b] \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions Riemann-intégrables sur le segment $[a, b]$, il en est de même des deux fonctions* $\sup(f, g)$ *et* $\inf(f, g)$.

Démonstration. Il suffit de prouver ce résultat pour la prise de sup (on remplace ensuite f et g par leurs opposées et on utilise le fait que l'on a l'égalité $\inf(f, g) = -\sup(-f, -g)$). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On reprend les fonctions en escalier $u_n, \tilde{u}_n, v_n, \tilde{v}_n$ utilisées dans la preuve de la Proposition 3.7. On introduit les deux fonctions en escalier $U_n := \sup(u_n, \tilde{u}_n)$ et $V_n := \sup(v_n, \tilde{v}_n)$. On dispose ainsi de l'encadrement $U_n \leq \sup(f,g) \leq V_n$ sur $[a,b]$. D'autre part :

$$V_n - U_n \leq V_n - U_n + \inf(v_n, \tilde{v}_n) - \inf(u_n, \tilde{u}_n) = (v_n + \tilde{v}_n) - (u_n + \tilde{u}_n)$$

puisque la fonction $\inf(v_n, \tilde{v}_n) - \inf(u_n, \tilde{u}_n)$ est positive et que la somme du sup et de l'inf de deux fonctions numériques est égale à la somme de ces deux fonctions. Il vient donc, du fait de la monotonie de la prise d'intégrale pour les fonctions en escalier (inégalité (3.4)) et de la linéarité de cette même opération :

$$\int_a^b (V_n(t) - U_n(t))\, dt \leq \int_a^b (v_n(t) - u_n(t))\, dt + \int_a^b (\tilde{v}_n(t) - \tilde{u}_n(t))\, dt \leq \frac{2}{n}.$$

(on utilise les inégalités (3.25)). La fonction $\sup(f,g)$ satisfait donc bien au critère d'intégrabilité de la Proposition 3.1 et l'on a :

$$\int_a^b \sup\big(f(t), g(t)\big)\, dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b U_n(t)\, dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b V_n(t)\, dt.$$

□

Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable sur $[a,b]$, il en est donc de même (d'après la Proposition 3.8) des deux fonctions positives $f^+ = \sup(f,0)$ et $f^- = \sup(-f,0)$ dont la différence $f^+ - f^-$ permet la reconstitution de la fonction $f = f^+ - f^-$. La fonction $|f| = f^+ + f^- = \sup(f,-f)$ est donc aussi Riemann-intégrable sur $[a,b]$ lorsque f l'est.

L'opération de prise d'intégrale de Riemann des fonctions réelles sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ est, comme dans le cas de la prise d'intégrale des fonctions en escalier, une *opération monotone*, ce qui signifie que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sont Riemann-intégrables sur $[a,b]$, on a :

$$\Big(\forall\, x \in [a,b],\ f(x) \leq g(x)\Big) \Longrightarrow \Big(\int_{[a,b]} f(t)\, dt \leq \int_{[a,b]} g(t)\, dt\Big). \tag{3.26}$$

Il en résulte donc que, si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable, on a encore l'inégalité importante :

$$\Big|\int_{[a,b]} f(t)\, dt\Big| \leq \int_{[a,b]} |f(t)|\, dt. \tag{3.27}$$

Remarque 3.7 (Attention !). Si f est une fonction Riemann-intégrable positive sur $[a,b]$, on a $\int_{[a,b]} f(t)\, dt \geq 0$. Par contre, il faut prendre garde au fait que $\int_{[a,b]} f(t)\, dt = 0$ n'implique pas en général que $f \equiv 0$ sur $[a,b]$. Par exemple, la fonction définie sur $[0,1]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 1/q \text{ si } x = p/q \text{ avec } p \text{ et } q \text{ premiers entre eux} \\ 0 \text{ si } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

est réglée sur $[0,1]$ et sa limite à gauche et à droite en tout point est nulle (puisque les nombres irrationnels sont denses dans $[0,1]$). Elle est donc Riemann-intégrable sur $[0,1]$ d'après la Proposition 3.4 et l'on a $\int_{[0,1]} f(t)\, dt = 0$. Mais la fonction f n'est pourtant pas identiquement nulle sur $[0,1]$.

Concernant le produit de deux fonctions réelles Riemann-intégrables sur un segment $[a,b]$, on dispose du résultat suivant :

Proposition 3.9 (intégrabilité d'un produit). *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions réelles Riemann-intégrables sur $[a,b]$, il en est de même de leur produit fg et l'on a les inégalités*

$$\Big(\int_a^b (fg)(t)\,dt\Big)^2 \leq \int_a^b f^2(t)\,dt \times \int_a^b g^2(t)\,dt \tag{3.28}$$

(dite de Cauchy-Schwarz[6] *ou de Hölder*[7]*), et*

$$\sqrt{\int_a^b (f+g)^2(t)\,dt} \leq \sqrt{\int_a^b f^2(t)\,dt} + \sqrt{\int_a^b g^2(t)\,dt} \tag{3.29}$$

(dite de Minkowski[8]*).*

Démonstration. On montre dans un premier temps que f^2 est encore Riemann-intégrable sur $[a,b]$ lorsque f l'est. Il en sera de même pour g^2 lorsque g l'est, donc aussi pour

$$fg = \frac{1}{4}\big((f+g)^2 - (f-g)^2)\big)$$

lorsque f et g le sont toutes les deux.

Occupons nous donc de f^2 et supposons dans un premier temps $f \geq 0$ sur $[a,b]$. On reprend les fonctions en escalier u_n, v_n utilisées dans la preuve de la Proposition 3.7. On pose $w_n = \inf(v_n, M) \in E^f_{\geq}$, où $M := \sup_{[a,b]} f$. On remarque que $u_n^2 \leq f^2 \leq w_n^2$ et que

$$w_n^2 - u_n^2 = (w_n - u_n)(w_n + u_n) \leq 2M(w_n - u_n) \leq 2M(v_n - u_n).$$

On a donc, du fait des inégalités (3.25) :

$$\int_a^b \big(w_n^2(t) - u_n^2(t)\big)\,dt \leq 2M \int_a^b \big(v_n(t) - u_n(t)\big)\,dt \leq \frac{2M}{n}.$$

Si f n'est pas positive, on exprime f sous la forme de différence de deux fonctions positives $f = f^+ - f^-$ et l'on remarque que $f^2 = (f^+)^2 + (f^-)^2$ car le produit f^+f^- est identiquement nul sur $[a,b]$ vu que $f^+ = \sup(f,0)$ et $f^- = \sup(-f,0)$. Le carré d'une fonction Riemann-intégrable sur $[a,b]$ est encore Riemann-intégrable sur $[a,b]$, ce qui achève la preuve de la première assertion de la proposition.

Pour obtenir l'inégalité de Cauchy-Schwarz (3.28), on observe que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^b (f+\lambda g)^2(t)\,dt = \lambda^2 \int_a^b g^2(t)\,dt + 2\lambda \int_a^b (fg)(t)\,dt + \int_a^b f^2(t)\,dt \geq 0.$$

Ceci implique que le discriminant réduit du trinôme

$$X^2 \int_a^b g^2(t)\,dt + 2X \int_a^b (fg)(t)\,dt + \int_a^b f^2(t)\,dt$$

doit être négatif ou nul, ce qui fournit exactement l'inégalité (3.28).

6. Au nom de Cauchy (déjà croisé dans cours), se greffe ici celui du mathématicien de Silésie Hermann Schwarz (1843-1921), bâtisseur de ponts entre analyse et géométrie.

7. Otto Hölder, mathématicien allemand, spécialiste d'Analyse (1859-1937).

8. Hermann Minkowski (1864-1909), mathématicien et physicien lituanien : il s'intéressa à la géométrie (en particulier en relation avec la notion de convexité), mais aussi à la théorie (géométrique) des nombres, aux réseaux euclidiens, et à la relativité, ...

Reste à prouver l'inégalité de Minkowski (3.29). On a, en utilisant l'inégalité (3.28),

$$\begin{aligned}\int_a^b (f+g)^2(t)\,dt &= \int_a^b f^2(t)\,dt + \int_a^b g^2(t)\,dt + 2\int_a^b (fg)(t)\,dt \\ &\leq \int_a^b f^2(t)\,dt + \int_a^b g^2(t)\,dt + 2\sqrt{\int_a^b f^2(t)\,dt}\sqrt{\int_a^b g^2(t)\,dt} \\ &= \left(\sqrt{\int_a^b f^2(t)\,dt} + \sqrt{\int_a^b g^2(t)\,dt}\right)^2,\end{aligned}$$

d'où l'inégalité de Minkowski en extrayant les racines carrées des deux membres. □

Remarque 3.8 (les inégalités de Cauchy-Schwarz et Minkowski dans le cadre du calcul vectoriel). Dans le cadre du calcul vectoriel dans $\mathbb{R}^N$ (correspondant au cadre des fonctions réelles définies sur un ensemble fini à N éléments), les inégalités de Cauchy-Schwarz et Minkowski deviennent respectivement :

$$\begin{aligned}&\forall\,\vec{V},\ \vec{W}\in\mathbb{R}^N,\ |\langle\vec{V},\vec{W}\rangle| \leq \|\vec{V}\|\times\|\vec{W}\| \\ &\forall\,\vec{V},\ \vec{W}\in\mathbb{R}^N,\ \|\vec{V}+\vec{W}\| \leq \|\vec{V}\|+\|\vec{W}\|,\end{aligned}$$

où $\langle\ ,\ \rangle$ désigne le produit scalaire euclidien et $\|\ \|$ la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^N$.

On étend naturellement la notion de fonction réelle Riemann-intégrable au cadre des fonctions à valeurs complexes *via* la définition suivante :

Définition 3.5 (fonctions Riemann-intégrables complexes). Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ non réduit à un point. *Une fonction* $f\ :[a,b]\to\mathbb{C}$ *est dite Riemann-intégrable sur* $[a,b]$ si et seulement si les deux fonctions réelles $\mathrm{Re}\,f$ et $\mathrm{Im}\,f$ le sont. L'intégrale de Riemann de la fonction f sur $[a,b]$ est alors définie par :

$$\int_a^b f(t)\,dt := \int_a^b \mathrm{Re}\,f(t)\,dt + i\int_a^b \mathrm{Im}\,f(t)\,dt.$$

On observe alors que si $f\ :[a,b]\to\mathbb{C}$ et $g\ :[a,b]\to\mathbb{C}$ sont deux fonctions Riemann-intégrables sur le segment $[a,b]$ (au sens de la Définition 3.5), alors, quelque soient les nombres complexes λ et μ, la fonction $\lambda f+\mu g$ est encore Riemann-intégrable sur $[a,b]$ et l'on a :

$$\int_a^b (\lambda f+\mu g)(t)\,dt = \lambda\int_a^b f(t)\,dt + \mu\int_a^b g(t)\,dt. \tag{3.30}$$

On a d'autre part la Proposition suivante :

Proposition 3.10. *Si* $f\ :[a,b]\to\mathbb{C}$ *est Riemann-intégrable sur* $[a,b]$ *et si* $|f|\ :[a,b]\to\mathbb{R}$ *l'est aussi, alors on a l'inégalité*

$$\Big|\int_a^b f(t)\,dt\Big| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt. \tag{3.31}$$

Démonstration. Si l'on a

$$\int_a^b f(t)\,dt = 0,$$

alors l'inégalité (3.31) est vérifiée (le membre de gauche est nul, tandis que le membre de droite est positif). Sinon, posons :

$$e^{i\theta} := \frac{\int_a^b f(t)\,dt}{\left|\int_a^b f(t)\,dt\right|}.$$

On a donc

$$\begin{aligned}\Big|\int_a^b f(t)\,dt\Big| &= \mathrm{Re}\Big(\int_a^b f(t)e^{-i\theta}\,dt\Big) = \int_a^b \mathrm{Re}(fe^{-i\theta})(t)\,dt \\ &\leq \int_a^b (\mathrm{Re}(fe^{-i\theta}))^+(t)\,dt \leq \int_a^b |f(t)|\,dt\end{aligned}$$

en utilisant la monotonie de la prise d'intégrale de Riemann des fonctions réelles (inégalité (3.26)). □

Remarque 3.9 (f Riemann-intégrable $\Longrightarrow$ $|f|$ Riemann-intégrable). L'hypothèse suivant laquelle $|f|$ est Riemann-intégrable dans la Proposition 3.10 est en fait redondante : en effet si $f\,:[a,b]\to\mathbb{C}$ est Riemann-intégrable sur $[a,b]$, alors

$$|f| = \sup_{\theta\in[0,2\pi]} (\cos\theta\,\mathrm{Re}\,f + \sin\theta\,\mathrm{Im}\,f)$$

l'est également. Pour voir cela, on procède comme dans les preuves des Propositions 3.7 ou 3.8. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, soient $u_n\in E_{\leq}^{\mathrm{Re}\,f}$, $v_n\in E_{\geq}^{\mathrm{Re}\,f}$, $\tilde{u}_n\in E_{\leq}^{\mathrm{Im}\,f}$, $\tilde{v}_n\in E_{\geq}^{\mathrm{Im}\,f}$, telles que

$$\int_{[a,b]} (v_n(t)-u_n(t))\,dt \leq \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \int_{[a,b]} (\tilde{v}_n(t)-\tilde{u}_n(t))\,dt \leq \frac{1}{n}.$$

Pour chaque $\theta\in\mathbb{R}$, on introduit les fonctions en escalier :

$$U_{\theta,n} = \cos\theta\begin{cases} u_n \text{ si } \cos\theta\geq 0\\ v_n \text{ si } \cos\theta<0\end{cases} + \sin\theta\begin{cases}\tilde{u}_n \text{ si } \sin\theta\geq 0\\ \tilde{v}_n \text{ si } \sin\theta<0\end{cases} \in E_{\leq}^{\cos\theta\,\mathrm{Re}\,f+\sin\theta\,\mathrm{Im}\,f}$$

$$V_{\theta,n} = \cos\theta\begin{cases} v_n \text{ si } \cos\theta\geq 0\\ u_n \text{ si } \cos\theta<0\end{cases} + \sin\theta\begin{cases}\tilde{v}_n \text{ si } \sin\theta\geq 0\\ \tilde{u}_n \text{ si } \sin\theta<0\end{cases} \in E_{\geq}^{\cos\theta\,\mathrm{Re}\,f+\sin\theta\,\mathrm{Im}\,f}.$$

On note que les subdivisions adaptées maximales de ces fonctions en escalier $U_{\theta,n}$ et $V_{\theta,n}$ ne dépendent que de n (et non de θ). Les fonctions $\tilde{U}_n := \sup_{\theta\in[0,2\pi]} U_{\theta,n}$ et $\tilde{V}_n := \sup_{\theta\in[0,2\pi]} V_{\theta,n}$ sont respectivement dans $E_{\leq}^{|f|}$ et $E_{\geq}^{|f|}$ et l'on vérifie que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{[a,b]} \big(\tilde{V}_n(t)-\tilde{U}_n(t)\big)\,dt = 0.$$

Nous laissons ici de côté les détails.

Une propriété importante partagée par la classe des fonctions complexes Riemann-intégrables sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ est la *relation de Chasles*[9].

9. Michel Chasles (1793-1880), mathématicien français de XIX-ième siècle, manipula cette relation (connue avant lui) surtout dans le contexte du calcul vectoriel (*cf.* l'apprentissage du calcul vectoriel en Seconde, Première et Terminale). La version ≪ calcul intégral ≫ dont il est question ici, en est une autre version.

Proposition 3.11 (relation de Chasles). *Si* $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ *est une fonction Riemann-intégrable sur* $[a,b]$ *et* $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$ *un segment de* $[a,b]$*, la fonction* $f_{|[\alpha,\beta]} : [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ *(restriction de* f *au segment* $[\alpha,\beta]$*) est Riemann-intégrable sur le segment « restreint »* $[\alpha,\beta]$*. De plus, si*

$$\sigma : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$$

est un maillage de $[a,b]$ *à* $N+1$ *nœuds (*$N \in \mathbb{N}^*$*), on a alors la formule (dite relation de Chasles) :*

$$\int_{[a,b]} f(t)\,dt = \sum_{j=0}^{N-1} \int_{[x_j,x_{j+1}]} f(t)\,dt. \tag{3.32}$$

Démonstration. Il suffit de prouver ce résultat lorsque $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable sur $[a,b]$, mais réelle. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $u_n \in E^f_{\leq}$ et $v_n \in E^f_{\geq}$ sont telles que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} \big(v_n(t) - u_n(t)\big)\,dt = 0,$$

les restrictions de u_n et v_n au segment $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$ sont des fonctions en escalier sur $[\alpha,\beta]$ et l'on a

$$0 \leq \limsup_{n\to+\infty} \int_{[\alpha,\beta]} \big(v_n(t) - u_n(t)\big)\,dt \leq \lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} \big(v_n(t) - u_n(t)\big)\,dt = 0.$$

Comme

$$(u_n)_{|[\alpha,\beta]} \leq f_{|[\alpha,\beta]} \leq (v_n)_{|[\alpha,\beta]},$$

la fonction $f_{|[\alpha,\beta]} : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ satisfait au critère 3.1 dès que la fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y satisfait. Ceci prouve la première assertion de la proposition. La seconde assertion résulte de la formule (3.9) et du fait que la relation de Chasles (3.32) est vraie pour une fonction $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ en escalier (pour calculer l'intégrale, on utilise alors une subdivision adaptée dont l'ensemble des nœuds contient, entre autres, tous les points du maillage σ donné). □

3.7. Critères d'intégrabilité par comparaison

Le critère 3.1 de Riemann-intégrabilité réelle *via* l'encadrement par les fonctions en escalier se présente en fait comme un cas particulier du critère moins contraignant suivant :

Proposition 3.12 (critère de Riemann-intégrabilité « assoupli »). *Soit* $[a,b]$ *un segment de* $\mathbb{R}$ *non réduit à un point. Une fonction* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *est Riemann-intégrable sur* $[a,b]$ *si et seulement si, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*, il existe des fonctions Riemann-intégrables (sur* $[a,b]$*)* $f_{n,1} : [a,b] \to \mathbb{R}$ *et* $f_{n,2} : [a,b] \to \mathbb{R}$ *telles que :*

— *d'une part, on ait, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*, l'encadrement :*

$$\forall\, x \in [a,b],\ \ f_{n,1}(x) \leq f(x) \leq f_{n,2}(x)\ ; \tag{3.33}$$

— *d'autre part :*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} (f_{n,2} - f_{n,1})(t)\,dt = 0. \tag{3.34}$$

Si tel est le cas, on dispose des formules approchées :

$$\int_{[a,b]} f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty}\int_{[a,b]} f_{n,1}(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty}\int_{[a,b]} f_{n,2}(t)\,dt. \tag{3.35}$$

DÉMONSTRATION. Si f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$, on peut, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, trouver $f_{n,1}=u_n\in E^f_\le$ et $f_{n,2}=v_n\in E^f_\ge$, de manière à ce que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{[a,b]}(f_{n,2}-f_{n,1})(t)\,dt=0.$$

Cela résulte du critère donné à la Proposition 3.1. Comme toute fonction en escalier sur $[a,b]$ (donc en particulier $f_{n,1}=u_n$ ou $f_{n,2}=v_n$) est Riemann-intégrable sur ce segment, les deux suites $(f_{n,1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(f_{n,2})_{n\in\mathbb{N}^*}$ satisfont aux conditions requises. Réciproquement, supposons qu'il existe deux suites $(f_{n,1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(f_{n,2})_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions réelles Riemann-intégrables sur $[a,b]$ telles que les conditions (3.33) et (3.34) soient remplies. Pour chaque $n\in\mathbb{N}^*$, on peut trouver une fonction $u_{n,1}\in E^{f_{n,1}}_\le$ telle que

$$0\le\int_{[a,b]} f_{n,1}(t)\,dt-\int_{[a,b]} u_{n,1}(t)\,dt\le\frac{1}{n}\ ;$$

cela résulte du critère donné à la Proposition 3.1 (avec la formule (3.9)) appliqué à la fonction Riemann-intégrable (sur $[a,b]$) $f_{n,1}$. De même, pour chaque $n\in\mathbb{N}^*$, on peut trouver cette fois une fonction $v_{n,2}\in E^{f_{n,2}}_\ge$ telle que

$$0\le\int_{[a,b]} v_{n,2}(t)\,dt-\int_{[a,b]} f_{n,2}(t)\,dt\le\frac{1}{n}\ ;$$

cela résulte encore du critère donné à la Proposition 3.1 (avec la formule (3.9)), appliqué cette fois à la fonction Riemann-intégrable (sur $[a,b]$) $f_{n,2}$. On constate que

$$0\le\int_{[a,b]}(v_{n,2}-u_{n,1})(t)\,dt\le\frac{1}{n}+\int_{[a,b]}(f_{n,2}-f_{n,1})(t)\,dt+\frac{1}{n}=o\,(1)\quad(n\to+\infty).$$

Comme $u_{n,1}\in E^f_\le$ car $u_{n,1}\le f_{n,1}\le f$ sur $[a,b]$ et que $v_{n,2}\in E^f_\ge$ car $v_{n,2}\ge f_{n,2}\ge f$ sur $[a,b]$, le critère 3.1 est satisfait pour la fonction $f\ :[a,b]\to\mathbb{R}$, et cette fonction est par conséquent Riemann-intégrable sur $[a,b]$. L'assertion réciproque est bien démontrée. Quant aux formules approchées (3.35), elles résultent de la formule approchée (3.9) donnée dans la Proposition 3.1, couplée avec la démarche utilisée pour ramener la preuve de la Proposition 3.12 à l'application du critère donné par cette même Proposition 3.1. □

Les fonctions Riemann-intégrables réelles sur un segment $[a,b]$ ne sont en général pas continues sur ce segment (il existe sur ce segment des fonctions réelles réglées, donc Riemann intégrables d'après la Proposition 3.4, mais non continues, par exemple des fonctions monotones mais non continues). On peut néanmoins énoncer un critère plus ≪ régularisant ≫ que ne l'est le critère 3.1 (bien que réglées, les fonctions en escalier intervenant dans pareil critère sont irrégulières, car présentant des points de discontinuité aux nœuds des maillages adaptés). Il est important du point de vue pratique de disposer d'un critère ≪ régularisant ≫ car les fonctions régulières s'avèrent plus naturelles à modéliser : d'ailleurs l'écran d'ordinateur affiche des graphes de

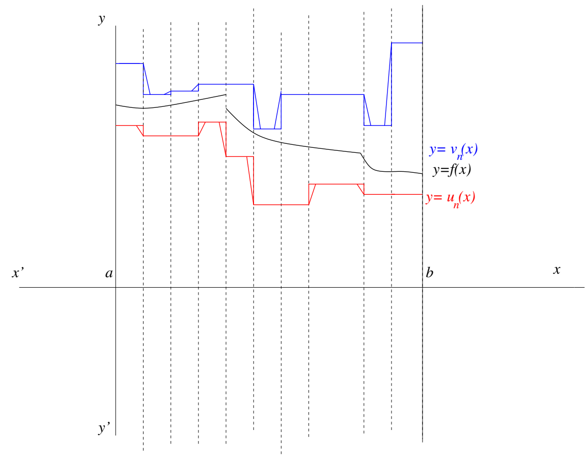

FIGURE 3.2. Le critère de Riemann-intégrabilité « régularisant »

fonctions continues affines par morceaux car il opère les « jonctions » aux nœuds éventuels des maillages (où pourraient se présenter des irrégularités éventuelles).

PROPOSITION 3.13 (critère de Riemann-intégrabilité « régularisant »). *Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ non réduit à un point. Une fonction $f\ :[a,b]\to\mathbb{R}$ est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ si et seulement si, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, il existe des fonctions continues*[10] $\varphi_{n,1}\ :[a,b]\to\mathbb{R}$ *et* $\varphi_{n,2}\ :[a,b]\to\mathbb{R}$ *telles que :*

— *d'une part, on ait, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, l'encadrement :*

$$\forall\, x\in[a,b],\ \ \varphi_{n,1}(x)\leq f(x)\leq\varphi_{n,2}(x)\ ; \tag{3.36}$$

— *d'autre part :*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{[a,b]}(\varphi_{n,2}-\varphi_{n,1})(t)\,dt=0. \tag{3.37}$$

DÉMONSTRATION. S'il existe deux suites de fonctions continues $(\varphi_{n,1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\varphi_{n,2})_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, de manière à ce que les clauses (3.36) et (3.37) soient remplies, les clauses du critère assoupli donné par la Proposition 3.12 sont satisfaites (on prend $f_{n,1}=\varphi_{n,1}$ et $f_{n,2}=\varphi_{n,2}$), et f est donc Riemann-intégrable sur $[a,b]$.

Prouvons maintenant la réciproque. Si $f\ :[a,b]\to\mathbb{R}$ est Riemann-intégrable sur le segment $[a,b]$, alors, il existe, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ (d'après le critère donné à la Proposition 3.1), des fonctions en escalier $u_n\in E^f_{\leq}$ et $v_n\in E^f_{\geq}$ telles que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{[a,b]}(v_n-u_n)(t)\,dt=0. \tag{3.38}$$

On remplace u_n par une fonction continue affine par morceaux $\varphi_{n,1}$ qui lui est inférieure et l'« approxime » comme suggéré sur la figure 3.2 ; le procédé (intuitivement très simple) consiste à « rogner » les angles par « en dessous ». On remplace de même v_n par une fonction continue affine par morceaux $\varphi_{n,2}$ qui lui est supérieure et l'« approxime » comme suggéré sur la figure 3.2 ; le procédé consiste cette fois

10. On peut aussi préciser si l'on veut : continues affines par morceaux.

toujours à « rogner » les angles, mais cette fois par au dessus. Il est possible (voir la figure 3.2) de choisir $\varphi_{n,1}$ et $\varphi_{n,2}$ de manière à ce que

$$\int_{[a,b]} (u_n - \varphi_{n,1})(t)\, dt \leq \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \int_{[a,b]} (\varphi_{n,2} - v_n)(t)\, dt \leq \frac{1}{n}.$$

On constate alors, du fait de (3.38), que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} (\varphi_{n,2} - \varphi_{n,1})(t)\, dt = 0.$$

Comme $\varphi_{n,1} \leq u_n \leq f \leq v_n \leq \varphi_{n,2}$ sur $[a,b]$, l'assertion réciproque est bien démontrée. □

Les deux critères donnés par les Propositions 3.12 et 3.13 permettent de caractériser les fonctions réelles Riemann-intégrables sur $[a,b]$ parmi les fonctions bornées sur $[a,b]$. Auparavant, il nous faut donner la définition suivante :

Définition 3.6 (sous-ensembles négligeables [11] de $\mathbb{R}$). Un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ est dit *négligeable* si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe une suite de segments $([a_{\epsilon,k}, b_{\epsilon,k}])_{k\in\mathbb{N}^*}$ telle que l'on ait

$$A \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} [a_{\epsilon,k}, b_{\epsilon,k}] \quad \text{et} \quad \sum_{k\in\mathbb{N}^*} (b_{\epsilon,k} - a_{\epsilon,k}) \leq \epsilon. \tag{3.39}$$

Armés de cette définition, nous pouvons énoncer l'important résultat suivant, permettant de mieux comprendre (en la caractérisant) ce qu'est la classe des fonctions complexes intégrables Riemann sur un segment de $\mathbb{R}$ (et surtout comment elle diffère de la classe des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$).

Theorème 3.1 (caractérisation de l'intégrabilité au sens de Riemann). *Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ non réduit à un point. Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ si et seulement si f est bornée et le sous-ensemble*

$$A := \{x \in [a,b]\,;\, f \text{ discontinue en } x\}$$

est négligeable.

Démonstration. Il suffit de prouver ce critère pour les fonctions à valeurs réelles (compte tenu de la définition 3.5).

Nous nous contenterons ici de montrer que si f est réelle bornée et si son ensemble de points de discontinuité est fini, alors f satisfait au critère de la Proposition 3.12. Soit $m \leq f \leq M$ une telle fonction et $n \in \mathbb{N}^*$. Pour chacun des K points x_k, $k = 1, ..., K$, de discontinuité de f, on considère un segment $I(x_k, n)$ de longueur strictement inférieure à $1/n$ ne contenant aucun autre point de discontinuité. On pose

$$f_{n,1} := m \sum_{k=1}^{K} \chi_{I(x_k,n)} + f\chi_{[a,b]\setminus\bigcup_j I(x_k,n)},\ \ f_{n,2} := M \sum_{k=1}^{K} \chi_{I(x_k,n)} + f\chi_{[a,b]\setminus\bigcup_j I(x_k,n)}.$$

11. Ou encore « de mesure nulle ».

Ces deux fonctions sont Riemann-intégrables sur $[a,b]$ (comme somme de fonctions Riemann-intégrables) et l'on a $f_{n,1} \leq f \leq f_{n,2}$, ainsi que :

$$\int_{[a,b]} (f_{n,2} - f_{n,1})(t)\, dt = (M-m) \sum_{k=1}^{K} \mathrm{long}\,(I(x_k, n)) \leq K \frac{M-m}{n}.$$

On a donc

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} (f_{n,2} - f_{n,1})(t)\, dt = 0.$$

Les conditions (3.33) et (3.34) sont donc satisfaites et le critère d'intégrabilité de la Proposition 3.12 s'applique. Si l'ensemble des points de discontinuité de f n'est plus fini, mais seulement négligeable, une preuve similaire peut être conduite. Nous la présenterons en annexe dans la section 3.10.

L'assertion réciproque repose sur le critère régularisant de la Proprosition 3.13, mais est plus délicate. Nous l'admettrons ici. Nous démontrerons dans la section 3.8 le Théorème de Darboux (Théorème 3.2, dont cette assertion réciproque peut aussi être envisagée comme un corollaire). Une preuve de la démonstration de cette assertion réciproque sera donnée en annexe (dans la section 3.10). □

Exemple 3.3 (fonctions Riemann-intégrables non réglées). Le Théorème 3.1 assure l'existence de fonctions Riemann-intégrables non réglées. Par exemple, la fonction

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/|x|) & \text{si } x \in [-1,1] \setminus \{0\} \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

de l'exemple 2.3 admet une discontinuité de seconde espèce à l'origine et n'est donc pas réglée sur $[-1,1]$. Par contre, elle est Riemann-intégrable sur $[-1,1]$ car bornée et continue en tout point différent de 0.

3.8. Intégration Riemann et sommes de Darboux

Une autre caractérisation importante de l'intégrabilité au sens de Riemann (pour les fonctions réelles sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$) rejoint les résultats d'approximation fournis (dans le cas des fonctions continues) par la formule des rectangles (3.18) (*cf.* la sous-section 3.4.1) ou la formule des trapèzes (3.20) (*cf.* la sous-section 3.4.2). Il nous faut auparavant introduire (pour une fonction réelle bornée sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$) les notions de *sommes de Darboux* (respectivement *inférieure* et *supérieure*) attachées à une subdivision σ de $[a,b]$.

Définition 3.7 (sommes de Darboux [12] d'une fonction réelle bornée, attachées à une subdivision). Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction réelle bornée, et σ une subdivision de $[a,b]$ à $N+1$ nœuds $x_0 = a$, x_1,...,$x_N = b$. On appelle :

12. On doit leur introduction au mathématicien français (analyste et géomètre différentiel) Gaston Darboux (1842-1917). L'introduction des sommes de Darboux est postérieure à celle (par B. Riemann) des *sommes de Riemann* (3.17) que nous avons défini (pour les fonctions continues) en préambule à la section 3.4 et sur lesquelles nous reviendrons (*cf.* la Définition 3.8 plus loin).

— *somme de Darboux inférieure* de f sur $[a,b]$ (relativement à la subdivision σ) la quantité :

$$s[f;\sigma] := \sum_{j=0}^{N-1} (x_{j+1} - x_j) \inf_{[x_j, x_{j+1}]} f \ ; \tag{3.40}$$

— *somme de Darboux supérieure* de f sur $[a,b]$ (relativement à la subdivision σ) la quantité :

$$S[f;\sigma] := \sum_{j=0}^{N-1} (x_{j+1} - x_j) \sup_{[x_j, x_{j+1}]} f \ ; \tag{3.41}$$

REMARQUE 3.10. Nous avons convenu dans les définitions (3.40) et (3.41) de prendre chaque fois l'inf ou le sup sur les segments fermés $[x_j, x_{j+1}]$, $j = 0, ..., N-1$, entre deux nœuds consécutifs de la subdivision σ. On aurait pu tout aussi prendre ces inf ou sup sur les segments ouverts $]x_j, x_{j+1}[$; les valeurs de $s[f;\sigma]$ et $S[f;\sigma]$ s'en trouveraient bien sûr modifiées, mais l'énoncé du théorème de Darboux (Théorème 3.2 ci-dessous) demeurerait valide.

Armés de la définition des sommes de Darboux (Définition 3.7), nous pouvons énoncer le théorème suivant, fournissant une nouvelle caractérisation (en même temps que la possibilité d'un calcul approché) de l'intégrabilité au sens de Riemann des fonctions réelles bornées sur un segment de $\mathbb{R}$.

THEORÈME 3.2 (théorème de Darboux). *Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction réelle bornée sur $[a,b]$. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) la fonction f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$;

(2) on a, si $\Sigma([a,b])$ désigne l'ensemble de toutes les subdivisions de $[a,b]$,

$$\sup_{\sigma \in \Sigma([a,b])} s[f;\sigma] = \inf_{\sigma \in \Sigma([a,b])} S[f;\sigma] \ ; \tag{3.42}$$

(3) on a :

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \delta = \delta(\epsilon) > 0 \ t.q.\ \forall\, \sigma \in \Sigma([a,b]),\ \Big(\tau(\sigma) \leq \delta\Big) \Longrightarrow \Big(S[f;\sigma] - s[f;\sigma] \leq \epsilon\Big). \tag{3.43}$$

De plus, si l'une de ces trois conditions ci-dessus est remplie, alors, pour toute suite $(\sigma_n)_{n \geq \mathbb{N}}$ de subdivisions de $[a,b]$ telle que $\lim_{n \to +\infty} \tau(\sigma_n) = 0$, on dispose de l'une ou l'autre des méthodes suivantes pour calculer de manière approchée l'intégrale (au sens de Riemann) de f sur $[a,b]$:

$$\int_{[a,b]} f(t)\, dt = \lim_{n \to +\infty} s[f;\sigma_n] = \lim_{n \to +\infty} S[f;\sigma_n]. \tag{3.44}$$

DÉMONSTRATION. Prouvons tout d'abord (1) $\Longrightarrow$ (2). Si f vérifie (1), il existe, pour tout $\epsilon > 0$, deux fonctions en escalier $u \in E^f_{\leq}$ et $v \in E^f_{\geq}$, telles que

$$\int_{[a,b]} (v-u)(t)\, dt \leq \epsilon$$

(cela résulte de la Proposition (3.1)). Soit σ une subdivision adaptée aux deux fonctions en escalier u et v, de nœuds x_j, $j = 0, ..., N$. Pour chaque $j = 0, ..., N-1$, on introduit des points y_j et z_j tels que :

$$x_j < y_j < z_j < x_{j+1} \quad \text{et} \quad \max(y_j - x_j, x_{j+1} - z_j) \leq \frac{\epsilon}{4N \sup_{[a,b]} |f|}.$$

En introduisant les nœuds auxiliaires $y_1, z_1, ..., y_{N-1}, z_{N-1}$ (en plus des nœuds existants $x_0, ..., x_N$), on définit une nouvelle subdivision $\tilde{\sigma}$ de $[a, b]$, ayant cette fois $N + 1 + 2N = 3N + 1$ nœuds. On calcule les sommes de Darboux $s[f; \tilde{\sigma}]$ et $S[f; \tilde{\sigma}]$ en distinguant deux catégories de segments :

— les segments (dits « latéraux ») de la forme soit $[x_j, y_j]$ ou bien $[z_j, x_{j+1}]$ (pour $j = 0, ..., N-1$), pour lesquels la somme des contributions aux sommes de Darboux $s[f; \tilde{\sigma}]$ ou $S[f; \tilde{\sigma}]$ est au plus égale à

$$2N\epsilon \times \frac{\sup_{[a,b]} |f|}{4N \sup_{[a,b]} |f|} \leq \epsilon/2 \ ;$$

— les segments (dits « médians ») de la forme $[y_j, z_j]$, $j = 0, ..., N-1$, pour lesquels la somme des contributions aux deux sommes de Darboux (inférieure ou supérieure) se trouve dans le segment

$$\Big[\int_{[a,b]} u(t)\, dt - \frac{\epsilon}{2} \, , \, \int_{[a,b]} v(t)\, dt \Big]$$

puisque (du fait que $[y_j, z_j] \subset]x_j, x_{j+1}[$ et que σ est adaptée aux fonctions en escalier u et v), on a :

$$u \leq \inf_{[y_j, z_j]} f \leq \sup_{[y_j, z_j]} f \leq v \text{ sur } [y_j, z_j] \quad \forall\, j = 0, ..., N-1.$$

Il en résulte :

$$S[f; \tilde{\sigma}] - s[f; \tilde{\sigma}] \leq \Big(\int_{[a,b]} (v - u)(t)\, dt + \frac{\epsilon}{2} \Big) + \frac{\epsilon}{2} \leq 2\epsilon.$$

On en déduit que l'assertion (2) est vraie (puisque $\epsilon > 0$ peut être choisi arbitrairement).

Prouvons maintenant (2) $\Longrightarrow$ (1). Si f est telle que l'assertion (2) soit vraie, il existe, pour tout $\epsilon > 0$, une subdivision $\sigma \in \Sigma([a, b])$ telle que $S[f; \sigma] - s[f; \sigma] \leq \epsilon$. Soient $x_0 = a, ..., x_N = b$ les $N + 1$ nœuds de cette subdivision. On peut interpréter $s[f; \sigma]$ comme l'intégrale de la fonction $u \in E^f_{\leq}$ égale sur $]x_j, x_{j+1}[$ à $\inf_{[x_j, x_{j+1}]} f$ pour tout $j = 0, ..., N-1$ (et valant $\inf_{[a,b]} f$ aux nœuds x_j). On peut de même interpréter $S[f; \sigma]$ comme l'intégrale de la fonction $v \in E^f_{\geq}$ égale sur $]x_j, x_{j+1}[$ à $\sup_{[x_j, x_{j+1}]} f$ pour tout $j = 0, ..., N-1$ (et valant $\sup_{[a,b]} f$ aux nœuds x_j). On a $\int_{[a,b]} (v - u)(t)\, dt \leq \epsilon$. La fonction f satisfait au critère de la Proposition 3.1. Elle est donc Riemann-intégrable sur $[a, b]$.

Il est immédiat de remarquer que (3) $\Longrightarrow$ (2). Il reste donc, pour conclure au fait que les trois assertions (1), (2), (3) sont équivalentes, à prouver que (2) $\Longrightarrow$ (3). Soit $\epsilon > 0$. Si l'assertion (2) est vraie, il existe une subdivision σ_ϵ de $[a, b]$ (à $N_\epsilon + 1 = N + 1$ nœuds) telle que $S[f; \sigma_\epsilon] - s[f; \sigma_\epsilon] \leq \epsilon/2$. Posons $\delta(\epsilon) := \epsilon/(4N \sup_{[a,b]} |f|)$. Soit σ une subdivision de $[a, b]$ de pas $\tau(\sigma) \leq \delta(\epsilon)$, ayant pour nœuds $y_0, ..., y_M$. Pour calculer $S[f; \sigma] - s[f; \sigma]$, on commence par séparer en deux paquets l'ensemble des segments $[y_j, y_{j+1}]$ (pour $j = 0, ..., M-1$) :

— ceux qui contiennent un des nœuds x_j de la subdivision σ_ϵ (paquet 1) ;

— ceux qui ne contiennent aucun nœud x_j de la subdivision σ_ϵ (paquet 2).

La contribution à $S[f;\sigma] - s[f;\sigma]$ des segments du premier paquet fournit une somme de termes majorée par :

$$2 \sup_{[a,b]} |f| \times N \times \delta(\epsilon) = 2 \sup_{[a,b]} |f| \times N \times \frac{\epsilon}{4N \sup_{[a,b]} |f|} \leq \epsilon/2.$$

Comme chaque segment $[y_j, y_{j+1}]$ $(j = 0, ..., M-1)$ du second paquet est strictement compris entre deux nœuds consécutifs de la subdivision σ_ϵ, la contribution à $S[f;\sigma] - s[f;\sigma]$ des segments du second paquet fournit une somme de termes majorée par $S[f;\sigma_\epsilon] - s[f;\sigma_\epsilon] \leq \epsilon/2$. Au final, en additionnant les contributions des deux paquets, on trouve que $S[f;\sigma] - s[f;\sigma] \leq \epsilon/2 + \epsilon/2$ dès que $\tau(\sigma) \leq \delta(\epsilon)$. La condition (3) est donc bien remplie.

L'assertion finale du théorème (concernant le calcul approché de l'intégrale de f sur $[a,b]$ lorsque l'une des conditions équivalentes (1), (2), ou (3) est remplie) résulte de la formule (3.9) donnée dans la Proposition 3.1 : on prend pour w_n soit la fonction en escalier $u_n \in E^f_\leq$ dont l'intégrale est égale à $s[f;\sigma_n]$, soit la fonction en escalier $v_n \in E^f_\geq$ dont l'intégrale est égale à $S[f;\sigma_n]$ (*cf.* la preuve de (2) $\Longrightarrow$ (1)). $\square$

Si f est une fonction réelle bornée sur un segment $[a,b]$ (non réduit à un point) et $\sigma \in \Sigma([a,b])$. Choisissons, pour chaque segment $[x_j, x_{j+1}]$ entre deux nœuds consécutifs de σ, un point $\xi_j \in [x_j, x_{j+1}]$. On a :

$$\inf_{[x_j,x_{j+1}]} f \leq f(\xi_j) \leq \sup_{[x_j,x_{j+1}]} f \quad \forall\, j = 0, ..., N-1.$$

Il en résulte :

$$\operatorname{sr}[f;(\xi_j)_j;\sigma] := \sum_{j=0}^{N-1} (x_{j+1} - x_j)\, f(\xi_j) \in \big[s[f;\sigma], S[f;\sigma]\big]. \tag{3.45}$$

Cette remarque nous conduit à introduire la définition suivante (déjà introduite dans ce cours lorsque f était une fonction continue, *cf.* (3.17), section 3.4) :

Définition 3.8 (sommes de Riemann, d'une fonction complexe bornée sur un segment). Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$, $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction complexe bornée, et σ une subdivision de $[a,b]$ à $N+1$ nœuds $x_0 = a$, x_1,...,$x_N = b$. On appelle *somme de Riemann* de f (assujettie à la subdivision σ) toute expression

$$\operatorname{sr}[f;(\xi_j)_j;\sigma] := \sum_{j=0}^{N-1} (x_{j+1} - x_j)\, f(\xi_j), \tag{3.46}$$

où, pour chaque $j \in \{0, ..., N-1\}$, ξ_j désigne un point arbitraire du segment $[x_j, x_{j+1}]$ entre les deux nœuds consécutifs x_j et x_{j+1} de la subdivision σ.

Remarque 3.11 (des sommes dont l'évaluation s'avère plus « explicite »). Les sommes de Riemann (3.46) s'avèrent plus « explicites » à évaluer que les sommes de Darboux car, au contraire de ces dernières, leur évaluation n'implique pas de calcul préliminaire de sup ou d'inf de la fonction f sur les segments $[x_j, x_{j+1}]$, $j = 0, ..., N-1$, joignant deux nœuds consécutifs de la subdivision σ. On note aussi qu'une expression du type (3.46) garde un sens lorsque f est à valeurs complexes, ce qui n'est pas le cas pour les expressions (3.40) ou (3.41) définissant les sommes de Darboux inférieure $s[f;\sigma]$ ou supérieure $S[f;\sigma]$.

Le théorème de Darboux (Théorème 3.2) se décline en termes de sommes de Riemann sous la forme du résultat suivant, valable (c'est l'un de ses avantages, outre le fait que les sommes de Riemann s'avèrent d'une évaluation plus aisée que les sommes de Darboux, *cf.* la remarque 3.11) cette fois pour les fonctions à valeurs complexes et non plus seulement réelles.

THEORÈME 3.3 (calcul approché de l'intégrale *via* les sommes de Riemann). *Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et $f\ : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction complexe bornée. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) la fonction f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$;

(2) il existe un nombre complexe I tel que :

(3.47)
$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 \quad t.q. \quad \forall \sigma \in \Sigma([a,b])\ (\textit{de noeuds } x_j,\ j = 0,...,N),$$
$$\Big(\tau(\sigma) \leq \delta\Big) \Longrightarrow \Big(\forall \xi_j \in [x_j, x_{j+1}],\ j = 0,...,N-1,\ \big|\mathrm{sr}\,[f;(\xi_j)_j;\sigma] - I\big| \leq \epsilon\Big)\ ;$$

autrement dit, toutes les sommes de Riemann de la fonction f peuvent être rendues arbitrairement proches du nombre complexe I (et par conséquent arbitrairement proches les unes des autres) pourvu que le pas de la subdivision à laquelle elles sont assujetties soit choisi suffisamment petit.

Si l'une des deux assertions équivalentes (1) ou (2) est vraie, alors les deux le sont et l'on a :

$$I = \int_{[a,b]} f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{sr}\,[f;(\xi_{n,j})_j;\sigma_n], \tag{3.48}$$

où $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne n'importe quelle suite de subdivisions de $[a,b]$ dont le pas tend vers 0.

EXEMPLE 3.4. C'est la formule (3.48) qui est en général exploitée aux fins du calcul explicite de l'intégrale $\int_{[a,b]} f(t)\,dt$, lorsque f est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$. Dans le cas particulier où $f\ : [a,b] \to \mathbb{C}$ est continue, c'est sur cette formule que reposent la formule (3.18) des rectangles ou la formule (3.20) des trapèzes. Incidemment, cette même formule (3.48) permet de calculer des limites. Par exemple, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=n}^{k=2n} \frac{1}{2k+1} = \sum_{k=n}^{k=2n-1} \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{4n+1} = \frac{1}{2n} \sum_{k=n}^{k=2n-1} \frac{1}{\frac{2k+1}{2n}} + \frac{1}{4n+1}.$$

Soit $[a,b] = [1,2]$, $f\ : x \in [1,2] \mapsto 1/x$, σ_n la subdivision régulière de $[1,2]$ de pas constant $1/n$; pour chaque segment $[x_{n,j}, x_{n,j+1}]$, on note $\xi_{n,j}$ le milieu du segment $[x_j, x_{j+1}]$. On observe que :

$$\mathrm{sr}\,[f;(\xi_{n,j})_j;\sigma_n] = \frac{1}{n}\Big(\frac{1}{\frac{2n+1}{2n}} + \frac{1}{\frac{2(n+1)+1}{2n}} + \cdots + \frac{1}{\frac{2(2n-1)+1}{2n}}\Big) = 2\sum_{k=n}^{k=2n-1} \frac{1}{2k+1}.$$

Il résulte alors de la formule (3.48) que :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{2k+1} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{k=2n-1} \frac{1}{2k+1} = \frac{1}{2}\int_{[1,2]} \frac{dt}{t} = \frac{\ln 2}{2}$$

(la dernière égalité sera justifiée dans la section suivante). Notons que, puisque $t \mapsto 1/t$ est continue sur $[1,2]$, le résultat utilisé ici (en l'occurrence la formule (3.48)) est en fait un cas particulier de la formule des rectangles (3.18).

DÉMONSTRATION. Il suffit de démontrer le résultat lorsque f est une fonction réelle bornée (on l'applique ensuite, lorsque f est une fonction complexe bornée, aux deux fonctions $\mathrm{Re}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$). On suppose donc ici f réelle bornée.

Le fait que (1) $\Longrightarrow$ (2) résulte du théorème de Darboux (Théorème 3.2) et du fait que l'on ait, pour les sommes de Riemann d'une fonction réelle, l'encadrement (3.45). Notons que si (1) (et donc (2)) est vraie, alors le fait que l'on ait la formule d'approximation (3.48) résulte des deux formules d'approximation (3.44), couplées avec le lemme des gendarmes.

Il reste donc à prouver l'implication (2) $\Longrightarrow$ (1). Supposons que f soit une fonction réelle bornée sur $[a,b]$ et telle que l'assertion (2) soit valide (pour un certain nombre complexe I). Soit $\epsilon > 0$ et σ une subdivision de $[a,b]$ de pas inférieur ou égal à $\delta(\epsilon/4)$, ayant pour nœuds les points x_j, $j = 0, ..., N$. D'après la définition de $\inf_{[x_j,x_{j+1}]} f$ (lorsque $j \in \{0, ..., N-1\}$), il existe, pour chaque tel indice j, un nombre $\xi_j \in [x_j, x_{j+1}]$ tel que

$$0 \le f(\xi_j) - \inf_{[x_j,x_{j+1}]} f \le \frac{\epsilon}{4(b-a)}.$$

On a donc, pour ce choix des ξ_j, $j = 0, ..., N-1$,

$$0 \le \mathrm{sr}\,[f;(\xi_j)_j;\sigma] - s[f;\sigma] \le \frac{\epsilon}{4(b-a)} \times \sum_{j=0}^{N-1} (x_{j+1} - x_j) = \epsilon/4. \tag{3.49}$$

De même, d'après la définition de $\sup_{[x_j,x_{j+1}]} f$ (lorsque $j \in \{0, ..., N-1\}$), il existe, pour chaque tel indice j, un nombre $\tilde{\xi}_j \in [x_j, x_{j+1}]$ tel que

$$0 \le \sup_{[x_j,x_{j+1}]} f - f(\tilde{\xi}_j) \le \frac{\epsilon}{4(b-a)}.$$

On a donc, pour ce choix des $\tilde{\xi}_j$, $j = 0, ..., N-1$,

$$0 \le S[f;\sigma] - \mathrm{sr}\,[f;(\xi_j)_j;\sigma] \le \frac{\epsilon}{4(b-a)} \times \sum_{j=0}^{N-1} (x_{j+1} - x_j) = \epsilon/4. \tag{3.50}$$

Compte-tenu de ce que

$$\big|\mathrm{sr}\,[f;(\xi_j)_j;\sigma] - \mathrm{sr}\,[f;(\tilde{\xi}_j)_j;\sigma]\big| \le \big|\mathrm{sr}\,[f;(\xi_j)_j;\sigma] - I\big| + \big|I - \mathrm{sr}\,[f;(\tilde{\xi}_j)_j;\sigma]\big| \le \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \frac{\epsilon}{2},$$

on déduit de (3.49) et (3.50)

$$\big|S[f;\sigma] - s[f;\sigma]\big| \le \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \epsilon.$$

L'assertion (3) du théorème de Darboux (Théorème 3.2) est alors satisfaite par la fonction f. On déduit donc du Théorème 3.2 (équivalence entre (3) et (1) dans l'énoncé du Théorème 3.2) que f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$. La preuve de (2) $\Longrightarrow$ (1) est ainsi achevée. $\square$

3.9. Intégration-Riemann et formules de la moyenne

3.9.1. La relation entre la prise d'intégrale au sens de Riemann et la primitivisation. Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et $f\ :[a,b]\to\mathbb{C}$ une fonction Riemann-intégrable sur $[a,b]$. Il résulte de la Proposition 3.11 que, si x et y sont des points distincts quelconques de $[a,b]$, la fonction f est Riemann-intégrable sur le sous-segment de $[a,b]$ d'extrémités x et y. On convient alors de poser :

$$\forall\, x,y\in[a,b],\ \int_x^y f(t)\,dt = \begin{cases} \int_{[x,y]} f(t)\,dt \quad \text{si} \quad a\le x<y\le b\\ -\int_{[x,y]} f(t)\,dt \quad \text{si} \quad a\le y<x\le b\\ 0 \quad \text{si} \quad x=y. \end{cases} \tag{3.51}$$

Il résulte alors de la relation de Chasles (*cf.* (3.32), Proposition 3.11) qu'avec les conventions (3.51),

$$\forall\, x,y,z\in[a,b],\quad \int_x^z f(t)\,dt = \int_x^y f(t)\,dt + \int_y^z f(t)\,dt. \tag{3.52}$$

La relation (3.52) correspond ainsi à une formulation algébrique de la relation de Chasles (3.32).

L'important résultat suivant, vu en Terminale, relie le calcul de l'intégrale au sens de Riemann à la « primitivisation » des fonctions continues.

Proposition 3.14 (intégration au sens de Riemann et primitivisation). *Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, $f\ :[a,b]\to\mathbb{C}$ une fonction Riemann-intégrable sur $[a,b]$. La fonction*

$$F\ : x\in[a,b]\longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$$

est continue sur $[a,b]$. De plus, si f est continue en un point $x_0\in[a,b]$, F est dérivable[13] *au point x_0 et on a $F'(x_0)=f(x_0)$.*

Démonstration. On observe, si $x\in[a,b]$, en utilisant la relation de Chasles sous forme algébrique (3.52)) que

$$F(x+h)-F(x) = \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

pour tout h tel que $x+h\in[a,b]$. On a donc

$$|F(x+h)-F(x)| \le \Big|\int_x^{x+h} |f(t)|\,dt\Big| \le |h|\,\sup_{[a,b]}|f|$$

(en utilisant l'inégalité (3.31)). On en déduit la continuité de F au point x, donc en tout point de $[a,b]$. Si maintenant $x=x_0$ est un point de continuité de f et si h est tel que $x_0+h\in[a,b]$ et $h\neq 0$, on a aussi

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0) = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} \big(f(t)-f(x_0)\big)\,dt.$$

13. Seulement à droite si $x_0=a$, à gauche si $x_0=b$.

On en déduit, du fait de l'inégalité (3.31) (*cf.* la Proposition 3.10) :
(3.53)
$$\Big|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}-f(x_0)\Big| \leq \frac{1}{|h|}\times|h|\times \sup_{|x-x_0|\leq |h|}|f(x)| = \sup_{|x-x_0|\leq|h|}|f(x)|.$$
Si f est continue en x_0, on a
$$\lim_{h\to 0}\big(\sup_{|x-x_0|\leq|h|}|f(x)|\big)=0.$$
En reportant dans (3.53), il vient
$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}}\Big(\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}-f(x_0)\Big)=0.$$
La fonction F est donc bien dérivable au point x_0 (seulement à droite si $x_0=a$, seulement à gauche si $x_0=b$), de nombre dérivé $F'(x_0)=f(x_0)$ (*cf.* la Définition 2.10). □

Ce résultat a deux corollaires très importants.

— Le premier est le *Théorème Fondamental de l'Analyse*, déjà mentionné dans ce cours (Théorème 2.9), qui stipule que si g est une fonction de classe C^1 sur un segment $[a,b]$ (non réduit à un point), alors :

(3.54)
$$g(b)-g(a)=\int_{[a,b]} g'(t)\,dt.$$

Le membre de gauche de cette formule peut être considéré comme l'« *intégrale de g sur le bord orienté de* $[a,b]$ », ce bord orienté étant assimilé à un « dipôle », où l'origine a serait comptée négativement $(-)$, et l'extrémité b positivement $(+)$. C'est sous cette forme qu'il conviendra de repenser le théorème fondamental de l'analyse (formulé ici en dimension 1) lorsqu'il s'agira de passer aux dimensions supérieures (où il deviendra une formule clef autant en physique qu'en mathématiques, à savoir la *formule de Stokes*).

— Le second est de fait un cas particulier de la formule (3.54), qui mérite qu'on le formule sous forme d'une proposition, tant il s'avère un outil pratique essentiel :

Proposition 3.15 (formule d'intégration par parties). *Soit* $[a,b]$ *un segment de* $\mathbb{R}$ *non réduit à un point et* g_1,g_2 *deux fonctions de classe* C^1 *sur* $[a,b]$. *On a alors la formule :*

(3.55)
$$\int_{[a,b]} g_1(t)\,g_2'(t)\,dt = g_1(b)g_2(b)-g_1(a)g_2(a)-\int_{[a,b]} g_1'(t)\,g_2(t)\,dt.$$

Démonstration. On applique la formule (3.54) à la fonction $g=g_1g_2$, elle aussi de classe C^1 sur $[a,b]$. □

Remarque 3.12 (un formidable outil pratique). Les applications de la formule d'intégration par parties sont légion. C'est la seule formule dont on dispose permettant de calculer explicitement des primitives sous forme d'expressions impliquant des fonctions connues (fractions rationnelles, logarithme, exponentielle, fonctions trigonométriques circulaires ou hyperboliques et leurs inverses). C'est sur elle que repose par exemple le calcul de primitive en termes de telles fonctions « simples [14] » tel qu'il est mis en œuvre dans les logiciels de calcul symbolique comme `MAPLE`. Il faut cependant avoir conscience que les fonctions pour lesquelles on dispose de telles primitives exprimables à partir de fonctions « simples » constituent un infime vivier dans la famille de toutes les fonctions numériques [15]. Le seul moyen de calculer des primitives dans la plupart des cas reste l'approche numérique (approchée) suivant les méthodes basées sur l'utilisation du Théorème de Darboux (Théorème 3.2, formule (3.44)) ou le calcul approché *via* les sommes de Riemann (Théorème 3.3, formule (3.48)), dont les formules des rectangles (3.18) et des trapèzes (3.20) sont des cas particuliers. La « pratique » de la formule d'intégration par parties sera développée dans les séances de TD.

Une conséquence du Théorème Fondamental de l'Analyse (Théorème 2.9) est le résultat suivant :

PROPOSITION 3.16 (changement de variables dans le calcul de primitives). *Soit $[\alpha,\beta]$ et $[a,b]$ deux intervalles de $\mathbb{R}$, $\varphi\ : [\alpha,\beta]\to[a,b]$ une fonction de classe C^1. Alors, pour toute fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$, on a :*

$$\forall\, u\in[\alpha,\beta],\quad \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(u)} f(\xi)\,d\xi=\int_\alpha^u f(\varphi(\tau))\,\varphi'(\tau)\,d\tau. \tag{3.56}$$

DÉMONSTRATION. Soit F une primitive de f sur $[a,b]$, par exemple la fonction

$$x\in[a,b]\mapsto\int_{\varphi(\alpha)}^x f(\xi)\,d\xi$$

(*cf.* la Proposition 3.14). On observe (en invoquant la règle de Leibniz sur la dérivation des fonctions composées, voir par exemple [**Ymis**], chapitre 3) que la fonction

$$t\in[\alpha,\beta]\mapsto F(\varphi(t))$$

est une primitive de $(f\circ\varphi)\times\varphi'$ sur $[\alpha,\beta]$. On a donc

$$F(\varphi(u))-F(\varphi(\alpha))=\int_\alpha^u (f\circ\varphi)(\tau)\,\varphi'(\tau)\,d\tau$$

d'après le Théorème fondamental de l'Analyse (formule (3.54)). C'est bien la formule (3.56) attendue. □

Comme le suggère la Proposition 3.14, les opérations de prise de primitive et d'intégration au sens de Riemann sont intimement liées. À ne pas confondre avec la formule de changement de variables (3.56) dans l'opération de prise de primitive, on dispose aussi d'une formule de changement de variables dans l'opération de prise d'intégrale au sens de Riemann.

---

14. On dit aussi, « de la classe de Liouville », car c'est le mathématicien français Joseph Liouville (1809-1882) qui a formalisé une telle classe de fonctions.

15. Une fonction si importante que la fonction de Gauß $x\in\mathbb{R}\mapsto(1/\sqrt{2\pi})e^{-x^2/2}$, densité de la loi normale centrée réduite, fonction essentielle tant en mathématiques (probabilités et statistique) qu'en physique (physique quantique, par exemple) ou qu'en informatique (traitement d'images, théorie de l'information), entre justement dans la catégorie des fonctions sans primitive exprimable à partir de fonctions « simples ».

PROPOSITION 3.17 (changement de variables dans le calcul d'intégrales au sens de Riemann). *Soit* $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ *une application de classe* C^1 *réalisant une bijection entre les deux segments* $[\alpha,\beta]$ *et* $[a,b]$*, telle que* φ' *ne s'annule pas sur* $[\alpha,\beta]$ [16]. *Une fonction* $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ *est Riemann-intégrable sur* $[a,b]$ *si et seulement si la fonction*

$$t \in [\alpha,\beta] \longmapsto f(\varphi(t))\,|\varphi'(t)|$$

est Riemann-intégrable sur $[\alpha,\beta]$*. Si tel est le cas, on dispose d'autre part de la formule de changement de variables suivante :*

$$\int_{[a,b]} f(\xi)\,d\xi = \int_{[\alpha,\beta]} f(\varphi(\tau))\,|\varphi'(\tau)|\,d\tau. \tag{3.57}$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de prouver cette proposition lorsque f est une fonction de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ (on raisonne sinon avec les deux fonctions réelles $\mathrm{Re}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$). On suppose pour fixer les idées que $\varphi' > 0$ sur $[\alpha,\beta]$, ce qui implique que la fonction φ est strictement croissante (*cf.* la Proposition 2.12) et que $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$. Supposons f Riemann-intégrable sur $[a,b]$ et soient, pour $n \in \mathbb{N}^*$ (*cf.* la Proposition 3.1) deux fonctions $u_n \in E^f_{\leq}$ et $v_n \in E^f_{\geq}$ telles que $\int_{\mathbb{R}} (v_n - u_n)(\xi)\,d\xi \leq 1/n$. Les fonctions $u_n \circ \varphi$ et $v_n \circ \varphi$ sont deux fonctions réelles en escalier sur $[\alpha,\beta]$, donc Riemann-intégrables sur ce segment. Comme φ' est une fonction continue (donc Riemann-intégrable) sur $[\alpha,\beta]$, il résulte de la Proposition 3.9 que les deux fonctions $t \in [\alpha,\beta] \mapsto u_n(\varphi(\tau))\,\varphi'(\tau)$ et $t \in [\alpha,\beta] \mapsto v_n(\varphi(\tau))\,\varphi'(\tau)$ sont également Riemann-intégrables sur $[\alpha,\beta]$. Or, on observe en utilisant la relation de Chasles ((3.32), Proposition 3.11, pour une subdivision adaptée à u_n et v_n) et la Proposition 3.16 que

(3.58)

$$\int_{[\alpha,\beta]} u_n(\varphi(\tau))\,\varphi'(\tau)\,d\tau = \int_\alpha^\beta u_n(\varphi(\tau))\,\varphi'(\tau)\,d\tau = \int_a^b u_n(\xi)\,d\xi = \int_{[a,b]} u_n(\xi)\,d\xi$$
$$\int_{[\alpha,\beta]} v_n(\varphi(\tau))\,\varphi'(\tau)\,d\tau = \int_\alpha^\beta v_n(\varphi(\tau))\,\varphi'(\tau)\,d\tau = \int_a^b v_n(\xi)\,d\xi = \int_{[a,b]} v_n(\xi)\,d\xi.$$

Comme

$$\forall\, \tau \in [\alpha,\beta],\ u_n(\varphi(\tau))\,\varphi'(\tau) \leq f(\varphi(\tau))\,\varphi'(\tau) \leq v_n(\varphi(\tau))\,\varphi'(\tau)$$

et que (d'après les formules (3.58))

$$\int_{[\alpha,\beta]} (u_n - v_n)(\varphi(\tau))\,\varphi'(\tau)\,d\tau = \int_{[a,b]} (v_n - u_n)(\xi)\,d\xi \leq \frac{1}{n},$$

nous sommes en situation d'appliquer le critère « assoupli » de la Proposition 3.12 pour conclure que la fonction

$$\tau \in [\alpha,\beta] \mapsto f(\varphi(\tau))\,\varphi'(\tau) \tag{3.59}$$

est Riemann-intégrable sur $[\alpha,\beta]$. On a ainsi prouvé que, si f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$, la fonction (3.59) est Riemann-intégrable sur $[\alpha,\beta]$. La dernière assertion de la Proposition 3.12 (formules approchées (3.35)) assure aussi d'ailleurs dans ce

---

16. Ceci équivaut (d'après la Proposition 2.12, combinée avec la Proposition 2.3) à dire que φ réalise une bijection de classe C^1 entre les segments $[\alpha,\beta]$ et $[a,b]$, telle que l'application réciproque $\varphi^{-1} : [a,b] \to [\alpha,\beta]$ soit encore de classe C^1. Une telle application $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ est dite réaliser un *difféomorphisme de classe* C^1 (ou encore C^1 *difféomorphisme*) entre les deux segments $[\alpha,\beta]$ et $[a,b]$.

cas la validité de la formule (3.57). Comme φ réalise un difféomorphisme de classe C^1 entre $[\alpha,\beta]$ et $[a,b]$ et que $(\varphi^{-1})'(\xi) = 1/\varphi'\big(\varphi^{-1}(\xi)\big)$ pour tout $\xi \in [a,b]$ (*cf.* la Proposition 2.12), on observe que si la fonction (3.59) est Riemann-intégrable sur $[\alpha,\beta]$, la fonction f est bien Riemann-intégrable sur $[a,b]$ (et la formule (3.57) valide). La Proposition 3.17 est ainsi complètement démontrée. $\square$

Remarque 3.13 (Attention à ne pas confondre les formules (3.56) et (3.57) !). Les formules (3.56) et (3.57) sont de nature très différente : la première est une formule concernant le calcul de primitives, tandis que la seconde concerne le calcul d'intégrales au sens de Riemann. S'il est possible dans la Proposition 3.17 de s'affranchir de l'hypothèse « $\varphi' \neq 0$ *sur* $[\alpha,\beta]$ », il est en revanche <u>impossible</u> de s'affranchir de l'hypothèse « φ *bijective entre* $[\alpha,\beta]$ *et* $[a,b]$ » : par exemple, si $\varphi : x \in [-1,1] \to x^2 \in [0,1]$ et $f\ : x \in [0,1] \mapsto 1$, on a

$$\int_{[0,1]} d\xi = 1 \neq \int_{[-1,1]} |\varphi'(\tau)|\, d\tau = \int_{[-1,1]} 2|\tau|\, d\tau = 2.$$

3.9.2. Les formules de la moyenne. Les deux formules de la moyenne (3.61) et (3.62) ou (3.63) (sous des hypothèses adéquates à préciser, *cf.* les énoncés complets des Propositions 3.18 et 3.19), que l'on attribue à l'analyste et géomètre français Pierre Bonnet (1819-1892), fournissent des informations importantes permettant non d'évaluer (ce qui n'est bien souvent possible que numériquement) mais simplement d'<u>encadrer</u> (ce qui s'avère souvent bien utile si on ne sait pas la calculer) l'intégrale (au sens de Riemann) du produit de deux fonctions réelles (dont l'une au moins est positive ou nulle). C'est avec ces deux formules de la moyenne que se conclura ce tour d'horizon de la théorie de l'intégration des fonctions numériques au sens de Riemann. On renvoie aux TD et aux cours d'Analyse ultérieurs (L2 et L3) pour des applications ce ces deux formules.

Proposition 3.18 (première formule de la moyenne). *Soit* $[a,b]$ *un segment de* $\mathbb{R}$ *non réduit à un point et* $f\ : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g\ : [a,b] \to \mathbb{R}$ *deux fonctions Riemann-intégrables sur* $[a,b]$*, telles que :*

— *il existe deux constantes réelles* $m \leq M$ *telles que*

$$\forall\, t \in [a,b], \quad m \leq f(t) \leq M\ ;$$

— *on a* $g(t) \geq 0$ *pour tout* $t \in [a,b]$.

La fonction $fg\ : [a,b] \to \mathbb{R}$ *est Riemann-intégrable sur* $[a,b]$ *et l'on a l'encadrement :*

$$m \int_{[a,b]} g(t)\, dt \leq \int_{[a,b]} f(t)\, g(t)\, dt \leq M \int_{[a,b]} g(t)\, dt. \tag{3.60}$$

Si de plus la fonction $f\ : [a,b] \to \mathbb{R}$ *est continue, on dispose de la formule plus précise :*

$$\exists\, c \in [a,b] \quad \int_{[a,b]} f(t)\, g(t)\, dt = f(c) \int_{[a,b]} g(t)\, dt. \tag{3.61}$$

Démonstration. Le fait que la fonction fg soit Riemann-intégrable sur $[a,b]$ lorsque f et g le sont résulte de la Proposition 3.9. Le fait que la prise d'intégrale au sens de Riemann des fonctions réelles (sur un segment de $\mathbb{R}$) soit une opération monotone (se pliant donc à l'inégalité (3.26)) implique, puisque $mg \leq fg \leq Mg$ sur $[a,b]$, que l'on a l'inégalité (3.60). Si $f\ : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, il résulte du Théorème 2.2 que, pour tout $\xi \in [\inf_{[a,b]} f, \sup_{[a,b]} f]$, il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \xi$. Distinguons alors deux cas (lorsque f est de plus supposée continue sur $[a,b]$) :

— si $\int_{[a,b]} g(t)\,dt > 0$, il résulte de l'encadrement (3.60) que
$$\frac{\int_{[a,b]} f(t)\,g(t)\,dt}{\int_{[a,b]} g(t)\,dt} \in \big[\inf_{[a,b]} f, \sup_{[a,b]} f\big] \ ;$$
d'après ce qui précède, on peut donc affirmer, si f est continue sur $[a,b]$, l'existence de $c \in [a,b]$ tel que
$$\frac{\int_{[a,b]} f(t)\,g(t)\,dt}{\int_{[a,b]} g(t)\,dt} = f(c),$$
d'où (3.61) ;

— si $\int_{[a,b]} g(t)\,dt = 0$, il résulte de l'encadrement (3.60) que l'on a également $\int_{[a,b]} f(t)g(t)\,dt = 0$; alors l'assertion (3.61) est vraie (on peut en effet prendre dans ce cas pour c n'importe quel point de $[a,b]$).

La seconde assertion de la Proposition 3.18 (dans le cas particulier où $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue) est donc bien valide. $\square$

Remarque 3.14. Lorsque $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable positive (d'intégrale strictement positive) et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, on peut écrire la formule (3.61) sous la forme
$$f(c) = \int_{[a,b]} f(t)\,\frac{g(t)}{\int_{[a,b]} g(\tau)\,d\tau}\,dt$$
et interpréter alors le nombre $f(c)$ comme une valeur moyenne de la fonction f sur le segment $[a,b]$, le calcul de moyenne étant pondéré par les valeurs de la « densité » g sur $[a,b]$. Cette remarque justifie la terminologie « *première formule de la moyenne* » utilisée ici.

Proposition 3.19 (seconde formule de la moyenne). *Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions Riemann-intégrables sur $[a,b]$. La fonction fg est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ et, si la fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est monotone, alors :*
$$\exists\, c \in [a,b] \quad t.q. \quad \int_{[a,b]} f(t)g(t)\,dt = f(a)\int_{[a,c]} g(t)\,dt + f(b)\int_{[c,b]} g(t)\,dt. \tag{3.62}$$
De plus, si f est positive décroissante sur $[a,b]$, on a :
$$\exists\, c \in [a,b] \quad t.q. \quad \int_{[a,b]} f(t)g(t)\,dt = f(a)\int_{[a,c]} g(t)\,dt. \tag{3.63}$$

Démonstration. Le fait que fg soit Riemann-intégrable sur $[a,b]$ résulte encore de la Proposition 3.9. On peut se contenter de prouver la formule (3.62) si f est décroissante (sinon, on remplace f par $-f$), ce que l'on supposera. Quitte à remplacer f par $x \in [a,b] \mapsto f(x) - f(b)$, on peut aussi supposer $f \geq 0$ sur $[a,b]$: en effet, les formules (3.62) (ou (3.63), ce qui revient au même dans ce cas particulier) pour la fonction $f - f(b)$ (nulle en b) s'écrivent :
$$\exists\, c \in [a,b] \quad \text{t.q.} \quad \int_{[a,b]} (f(t) - f(b))g(t)\,dt = \big(f(a) - f(b)\big)\int_{[a,c]} g(t)\,dt,$$

ce qui se lit encore sous la forme (3.62) si l'on invoque la relation de Chasles (3.32) (*cf.* la Proposition 3.11). On supposera donc f et g Riemann-intégrables sur $[a,b]$, et $f \geq 0$ décroissante sur $[a,b]$, et l'on se contentera de prouver l'assertion (3.63).

Introduisons pour cela les deux fonctions auxiliaires :

$$G\ : x \in [a,b] \mapsto \int_{[a,x]} g(t)\,dt \quad \text{et} \quad K\ : x \in [a,b] \mapsto \int_{[a,x]} |g(t)|\,dt.$$

Comme g est une fonction bornée (car Riemann-intégrable) et que l'on a

$$\max\big(|G(x+h)-G(x)|, |K(x+h)-K(x)|\big) \leq \Big|\int_x^{x+h} |g(t)|\,dt\Big| \leq |h| \sup_{[a,b]} |g|$$

du fait de l'inégalité (3.27), les fonctions G et K sont continues (donc uniformément continues d'après le théorème de Heine, Théorème 2.3) sur $[a,b]$. D'après le Théorème 2.2, la fonction continue $G\ : [a,b] \to \mathbb{R}$ est bornée sur $[a,b]$ et atteint ses bornes $m_G := \inf_{[a,b]} G$ et $M_G := \sup_{[a,b]} G$ sur ce segment $[a,b]$.

Soit $(\sigma_n)_{n\geq 0}$ une suite de subdivisions de $[a,b]$ dont le pas tend vers 0 et $x_{n,j}$, $j = 0,\dots,N_n$ les N_n+1 nœuds de la subdivision σ_n. Notons

$$\begin{aligned} I_n &:= \sum_{j=0}^{N_n-1} \int_{x_{n,j}}^{x_{n,j+1}} f(x_{n,j})\,g(t)\,dt = \sum_{j=0}^{N_n-1} f(x_{n,j})\,(G(x_{n,j+1}) - G(x_{n,j}))\\ &= \sum_{j=0}^{N_n-1} \big(f(x_{n,j}) - f(x_{n,j+1})\big)\,G(x_{n,j+1}) + f(b)\,G(b) \end{aligned}$$

(pour passer ici de la seconde égalité à la troisième, on utilise à la fois le fait que $G(x_{n,0}) = G(a) = 0$ et une réécriture de la somme que l'on pourrait qualifier de « *formule d'intégration par parties discrète* », ou encore de *procédé sommatoire d'Abel*). Comme $m_G \leq G \leq M_G$ sur $[a,b]$ et que f est décroissante (donc que tous les nombres $f(x_{n,j}) - f(x_{n,j+1})$, $j = 0,\dots,N_n-1$, sont positifs ou nuls), on a l'encadrement :

$$\begin{aligned} &\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad m_G\, f(a) = m_G\Big(\sum_{j=0}^{N_n-1}\big(f(x_{n,j}) - f(x_{n,j+1})\big) + f(b)\Big) \leq I_n\\ &\leq M_G\Big(\sum_{j=0}^{N_n-1}\big(f(x_{n,j}) - f(x_{n,j+1})\big) + f(b)\Big) = M_G\, f(a). \end{aligned} \tag{3.64}$$

Or

$$\begin{aligned} \Big|I_n - \int_{[a,b]} f(t)g(t)\,dt\Big| &= \Big|\sum_{j=0}^{N_n-1}\int_{x_{n,j}}^{x_{n,j+1}} \big(f(x_{n,j}) - f(t)\big)\,g(t)\,dt\Big|\\ &\leq \sum_{j=0}^{N_n-1}\int_{x_{n,j}}^{x_{n,j+1}} \big(f(x_{n,j}) - f(t)\big)\,|g(t)|\,dt\\ &\leq \big(f(b) - f(a)\big) \sup_{0\leq j\leq N_n-1} \int_{x_{n,j}}^{x_{n,j+1}} |g(t)|\,dt\\ &\leq \big(f(b) - f(a)\big) \sup_{0\leq j\leq N_n-1} \big(K(x_{n,j+1}) - K(x_{n,j})\big). \end{aligned}$$

Du fait que la fonction K est uniformément continue sur $[a,b]$ et que le pas de la subdivision σ_n tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(\sup_{0\le j\le N_n-1}\big(K(x_{n,j+1})-K(x_{n,j})\big)\Big)=0,$$

d'où l'on déduit, compte-tenu des inégalités précédentes,

$$\lim_{n\to+\infty} I_n=\int_{[a,b]} f(t)\,g(t)\,dt.$$

En passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ dans l'encadrement (3.64), il vient donc l'encadrement « limite » :

$$m_G\,f(a)\le \int_{[a,b]} f(t)\,g(t)\,dt\le M_G\,f(a).$$

Si $f(a)\neq 0$, on déduit du Théorème 2.2 qu'il existe $c\in[a,b]$ tel que

$$\frac{\int_{[a,b]} f(t)\,g(t)\,dt}{f(a)}=G(c)=\int_{[a,c]} g(t)\,dt.$$

On a donc dans ce cas :

$$\exists\, c\in[a,b]\quad\text{t.q.}\quad \int_{[a,b]} f(t)\,g(t)\,dt=f(a)\int_{[a,c]} g(t)\,dt, \tag{3.65}$$

ce qui est bien la formule (3.63) souhaitée. Si $f(a)=0$, la fonction positive décroissante f est identiquement nulle sur $[a,b]$ et on a a

$$\int_{[a,b]} f(t)\,g(t)\,dt=f(a)=0$$

dans ce cas, auquel cas l'assertion (3.63) est toujours valable car l'on peut prendre alors c arbitraire dans $[a,b]$. L'assertion (3.63) (lorsque f est positive décroissante) est donc bien prouvée dans tous les cas de figure. La seconde formule de la moyenne est ainsi démontrée. $\square$

3.10. Annexe : une preuve du critère d'intégrabilité (Théorème 3.1)

Afin d'unifier le contenu des cours dispensés dans les deux séries, nous présentons dans cette section une preuve du Théorème 3.1.

Rappelons ici l'énoncé de ce résultat majeur (qu'il suffit, comme on l'a déjà vu, de savoir démontrer lorsque f est une fonction réelle) :

« *Soit* $[a,b]$ *un segment de* $\mathbb{R}$ *non réduit à un point. Une fonction* $f\ :[a,b]\to\mathbb{C}$ *est Riemann-intégrable sur* $[a,b]$ *si et seulement si* f *est bornée et le sous-sensemble*

$$A:=\{x\in[a,b]\,;\ f\ \textit{discontinue en}\ x\}$$

est négligeable ».

Nous aurons besoin pour cela d'introduire la notion d'*oscillation d'une fonction en un point*, complétant ainsi celle d'oscillation d'une fonction réelle bornée sur un intervalle ouvert introduite dans l'énoncé de la Proposition 3.2. On doit cette notion au mathématicien (analyste) allemand Paul-Gustav du Bois-Reymond (1831-1889).

Définition 3.9 (oscillation d'une fonction (bornée) en un point). Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et $x_0 \in I$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle bornée. On définit l'*oscillation de f au point x_0* par

$$\operatorname{osc}(f, x_0) := \lim_{n\to+\infty} \Big(\sup_{I\cap[x_0-1/n, x_0+1/n]} f - \inf_{I\cap[x_0-1/n,x_0+1/n]} f\Big) \tag{3.66}$$

(la suite concernée au membre de droite étant une suite positive décroissante, donc convergente vers une limite positive ou nulle).

Remarque 3.15 (oscillation ponctuelle et points de discontinuité d'une fonction réelle bornée sur un intervalle de $\mathbb{R}$). Il résulte de la Définition 3.9 que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction f réelle bornée de I dans $\mathbb{R}$ s'exprime aussi :

$$\operatorname{discont}[f; I] = \bigcup_{p\in\mathbb{N}^*} \Big\{x \in I\,;\, \operatorname{osc}(f, x) \geq \frac{1}{p}\Big\}. \tag{3.67}$$

Théorème 3.1, preuve de l'implication réciproque. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction réelle Riemann-intégrable sur $[a, b]$. Notre objectif est ici de montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f sur $[a, b]$ est négligeable au sens de la Définition 3.6. Pour cela, nous allons prouver que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble

$$A_p := \Big\{x \in I\,;\, \operatorname{osc}(f, x) \geq \frac{1}{p}\Big\} \tag{3.68}$$

est négligeable. Il en résultera que l'union de tous les ensembles A_p, $p \in \mathbb{N}^*$ (c'est-à-dire, d'après (3.67), l'ensemble des points de discontinuité de f) sera également négligeable : en effet, supposons qu'il existe, pour chaque tel $p \in \mathbb{N}^*$, pour tout ϵ strictement positif, une suite de segments $\big([a_{\epsilon/2^p,k}, b_{\epsilon/2^p,k}]\big)_{k\in\mathbb{N}^*}$, dont l'union contient A_p et dont la somme des longueurs est au plus égale à $\epsilon/2^p$ (ce qui signifie que A_p est négligeable) ; l'union de tous les segments $[a_{\epsilon/2^p,k}, b_{\epsilon/2^p,k}]$ (pour k et p parcourant $\mathbb{N}^*$) contient donc l'union de tous les ensembles A_p pour $p \in \mathbb{N}^*$, tandis que la somme des longueurs de tous ces segments est au plus égale à la somme $\epsilon(1/2 + 1/4 + \cdots) = \epsilon$.

Soit donc $p \in \mathbb{N}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit σ_n la subdivision de $[a, b]$ de pas régulier égal à $(b-a)/n$. Désignons par M_n le nombre de segments $[x_{n,j}, x_{n,j+1}]$ entre deux nœuds consécutifs de cette subdivision σ_n, tels que $[x_{n,j}, x_{n,j+1}]\cap A_p \neq \emptyset$. Pour chaque tel segment $I_{n,j}$, il existe un point $\xi_{n,j} \in I_{n,j} \cap A_p$ et l'on a donc :

$$\sup_{I_{n,j}} f - \inf_{I_{n,j}} f \geq \operatorname{osc}(f, \xi_{n,j}) \geq \frac{1}{p}.$$

On a donc, en introduisant les sommes de Darboux :

$$S[f; \sigma_n] - s[f; \sigma_n] \geq \sum_j (x_{n,j+1} - x_{n,j})\, \frac{1}{p} = M_n \frac{b-a}{n} \frac{1}{p}. \tag{3.69}$$

Soit $\epsilon > 0$ arbitraire. Pour $n \geq n(p, \epsilon)$ assez grand, on sait, d'après le Théorème de Darboux (Théorème 3.2, voir (3.43)), que

$$S[f; \sigma_n] - s[f; \sigma_n] \leq \frac{\epsilon}{p}.$$

Pour $n \geq n(\epsilon, p)$, on a donc, compte tenu de (3.69) :

$$\frac{\epsilon}{p} \geq S[f; \sigma_n] - s[f; \sigma_n] \geq M_n \frac{b-a}{n}\frac{1}{p},$$

d'où :

$$M_n \frac{b-a}{n} \leq \epsilon.$$

L'union de tous les segments $[x_{n,j}, x_{n,j+1}]$ qui rencontrent A_p est donc de longueur au plus égale à ϵ dès que $n \geq n(\epsilon, p)$. Il en résulte bien, puisque ϵ est arbitraire, que A_p est négligeable. Il en est de même de l'ensemble $\bigcup_{p \in \mathbb{N}^*} A_p$. L'ensemble des points de discontinuité de f est donc négligeable lorsque la fonction réelle f est supposée Riemann-intégrable sur le segment $[a, b]$. $\square$

Théorème 3.1, preuve de l'implication directe. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction réelle bornée sur $[a, b]$ ($m \leq f \leq M$), telle que l'ensemble des points de discontinuité de f soit négligeable. Nous nous proposons de prouver ici qu'alors f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$. Puisque l'ensemble des points de discontinuité de f est union des ensembles A_p, $p \in \mathbb{N}^*$, définis en (3.68), chaque tel ensemble A_p, $p \in \mathbb{N}^*$, est par conséquent négligeable. Pour chaque $\epsilon > 0$, il est donc possible de construire une suite de segments $(I_{p,\epsilon,k})_{k \in \mathbb{N}^*}$, que l'on peut même supposer disjoints, dont l'union contient A_p, et dont la somme des longueurs ne dépasse pas $\epsilon/(2(M-m)$ (*cf.* la Définition 3.6). Mieux : en examinant la suite $(\bigcup_{k=1}^{K} I_{p,\epsilon,k})_{K \in \mathbb{N}^*}$, suite croissante de sous-ensembles fermés de $[a, b]$ dont la suite des bornes inférieures converge en décroissant vers une limite $\alpha \geq a$ et la suite des bornes supérieures converge en croissant vers une limite $\beta \leq b$, on observe même qu'il est possible de construire, lorsque $\epsilon < 2(M-m)(b-a)$, une union <u>finie</u> de $M_{p,\epsilon} \geq 2$ segments $[a_{p,\epsilon,k}, b_{p,\epsilon,k}]$, consécutifs et disjoints, le premier d'origine a, le dernier d'extrémité b, tels que :

— d'une part l'ensemble A_p soit inclus dans l'union des segments $[a_{p,\epsilon,k}, b_{p,\epsilon,k}]$, $k = 0, ..., M_{p,\epsilon} - 1$;

— d'autre part, on ait :

$$\sum_{k=0}^{M_{p,\epsilon}-1} (b_{p,\epsilon,k} - a_{p,\epsilon,k}) \leq \frac{\epsilon}{2(M-m)}.$$

Tous les segments $[b_{p,\epsilon,k}, a_{p,\epsilon,k+1}]$, pour k variant de $k = 0$ à $k = M_{p,\epsilon} - 2$, sont donc inclus dans le complémentaire de A_p. En tout point x d'un tel segment, on a par conséquent $\operatorname{osc}(f, x) \leq 1/p$, ce qui implique (du fait de la définition (3.66) de l'oscillation locale en un point x) qu'il existe un segment $[x - \eta_x, x + \eta_x]$ (avec $\eta_x > 0$) contenant ce point x et tel que :

$$\sup_{[x-\eta_x, x+\eta_x]} f - \inf_{[x-\eta_x, x+\eta_x]} f \leq \frac{2}{p}.$$

On en déduit qu'il existe, pour chaque $k = 0, ..., M_{p,\epsilon} - 2$, une subdivision du segment $[b_{p,\epsilon,k}, a_{p,\epsilon,k+1}]$, telle que sur chaque segment entre deux nœuds consécutifs de cette subdivision, l'oscillation de f sur ce segment soit majorée par $2/p$. On note maintenant $\sigma_{p,\epsilon}$ la subdivision de $[a, b]$ dont les nœuds sont les points $a_{p,\epsilon,k}$ et $b_{p,\epsilon,k}$, pour k variant de 0 à $M_{p,\epsilon} - 1$. La contribution à la différence des sommes de Darboux $S[f; \sigma_{p,\epsilon}] - s[f; \sigma_{p,\epsilon}]$ des segments $[a_{p,\epsilon,k}, b_{p,\epsilon,k}]$, $k = 0, ..., M_{p,\epsilon} - 1$, est majorée par

$$(M-m) \sum_{k=0}^{M_{p,\epsilon}-1} (b_{p,\epsilon,k} - a_{p,\epsilon,k}) \leq (M-m) \times \frac{\epsilon}{2(M-m)} = \frac{\epsilon}{2}.$$

La contribution à la même différence des sommes de Darboux $S[f;\sigma_{p,\epsilon}] - s[f;\sigma_{p,\epsilon}]$ des segments cette fois $[b_{p,\epsilon,k}, a_{p,\epsilon,k+1}]$, $k = 0, ..., M_{p,\epsilon} - 2$, est, elle, majorée par

$$\frac{2}{p} \sum_{k=0}^{M_{p,\epsilon}-2} (a_{p,\epsilon,k+1} - b_{p,\epsilon,k}) \leq \frac{2}{p} \times (b-a).$$

Si l'on choisit p suffisamment grand (tel que $2(b-a)/p \leq \epsilon/2$), on voit donc que

$$S[f;\sigma_{p,\epsilon}] - s[f;\sigma_{p,\epsilon}] \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Puisque tout ceci est possible avec un choix de $\epsilon > 0$ arbitraire, il résulte de l'implication (2) $\Longrightarrow$ (1) dans le théorème de Darboux (Théorème 3.2) que f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$, ce que l'on voulait ici démontrer. $\square$

Ceci achève la preuve complète du Théorème 3.1, admis jusque là, et clôt ce chapitre dédié à une présentation de l'intégration au sens de Riemann.

Il s'avérera utile ultérieurement, à ceux qui envisagent de continuer dans un cursus « Mathématiques », de confronter cette approche avec celle développée par Henri Lebesgue et Émile Borel au début du XX-ième siècle, fondée, elle, non plus sur le maillage de l'ensemble de départ $[a,b]$, mais cette fois sur un maillage de l'ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$ (penser par exemple aux cartes en relief et aux lignes de niveau). Cette approche « moderne » à la théorie de l'intégration sera présentée en L3. L'approche de Riemann reste cependant la plus « en phase » avec le calcul scientifique. Les théorèmes de Darboux et de Riemann (Théorèmes 3.2 et 3.3) demeurent en effet les seuls outils efficaces pour effectuer des calculs approchés d'intégrales dans la plupart des situations concrètes.

FIN DU COURS

Annexe A

Une liste d'exercices de TD (2011-2012, 2012-2013, 2013-2014)

I. Exercices en relation avec le chapitre 1 des notes de cours [1]

Exercice A.1 (suites arithmétiques, suites géométriques).

(1) Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite arithmétique de raison 2, telle que $u_5 = 7$. Calculer u_{100}.

(2) Quelle est la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique ?

(3) Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite géométrique de raison q strictement positive, telle que $u_3 = 2$ et $u_7 = 18$. Calculer u_{20}.

(4) Quelle est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique ?

Exercice A.2 (suites réelles, extrait du DM 1, 2011-2012). Montrer à l'aide de la définition que la suite de terme général $u_n = 3n/(4n+2)$ (pour $n \geq 0$) converge et calculer sa limite. Les réponses doivent être justifiées.

Exercice A.3 (opérations sur les limites de suites réelles, extrait du DM 1, 2011-2012). La suite de terme général u_n (pour n suffisamment grand), dans chaque cas suivant, est-elle divergente ? convergente ? Calculer sa limite le cas échéant :

$$u_n = \frac{4n^5}{6n^7 - 5n^3 + n^2 - 4} \ ; \qquad u_n = \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{n^2+1} \ ;$$
$$u_n = \frac{1}{n\left(\sqrt{n^2+2} - n\right)} \ ; \qquad u_n = (-1)^n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \ ;$$
$$u_n = \frac{2n - \sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^2+3} - n} \ ; \qquad u_n = n^{1/n} \ ; \quad u_n = \sin(n).$$

Les réponses doivent être justifiées.

Exercice A.4 (opérations sur les limites de suites réelles, extrait du DM 1 2012-2013). Déterminer la limite, si celle-ci existe, des suites suivantes (données

1. On rappelle que les notations log et ln désignent la même fonction, à savoir le logarithme népérien ; la notation ln (plutôt que log) sera privilégiée dans cette liste, conformément à ce qui a été fait dans les notes de cours.

par l'expression de leur terme général) :

$$a_n = \frac{3^n - (-2)^n}{3^n + (-2)^n} \quad n \geq 0 \quad ; \quad b_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}, \quad n \geq 0$$

$$c_n = \frac{n - \sqrt{n^2+1}}{n + \sqrt{n^2-1}}, \quad n \geq 1 \quad ; \quad d_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k, \quad n \geq 0$$

$$p_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n \geq 1 \quad ; \quad q_n = \frac{\sin n}{n + (-1)^{n+1}}, \quad n \geq 1$$

$$r_n = \frac{n - (-1)^n}{n + (-1)^n}, \quad n \geq 2 \quad ; \quad s_n = \frac{e^n}{n^n}, \quad n \geq 1$$

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{\ln k}{k}}, \quad n \geq 1 \quad ; \quad v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos k}{k}, \quad n \geq 1$$

$$w_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k, \quad n \geq 1.$$

Exercice A.5 (suites réelles, extrait du DM 1, 2011-2012).

(1) Étudier la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = (u_n - 3)^2/4$ pour tout $n \geq 0$.

(2) Même question lorsque $u_0 > 0$.

Les réponses doivent être justifiées.

Exercice A.6 (suites réelles, extrait du DM 1, 2012-2013). En utilisant la définition de la limite d'une suite, montrer que la suite $u_n = \dfrac{5n+3}{3n+5}$ converge et calculer sa limite.

Exercice A.7 (suites réelles, extrait du DM 1, 2012-2013). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k^2+1}.$$

Montrer que pour tout $n \geq 1$ on a

$$S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{4}$$

En déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$.

Exercice A.8 (suites réelles, extrait du DM 1, 2012-2013). Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite de nombres réels définie par les relations suivantes : $u_0 \in]0,1]$ et

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{(u_n)^2}{4}, \qquad \forall\, n \geq 1.$$

(1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $0 < u_n \leq 1$.

(2) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est monotone. En déduire qu'elle est convergente.

(3) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

Exercice A.9 (suites réelles). On considère les suites de terme général respectivement

$$\frac{2+\cos n}{n}, \quad (2+\cos n)\, n, \quad (-1)^n\,(2+\cos n)\, n, \quad \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

pour $n \geq 1$.

(1) Les suites ci-dessus sont-elles bornées ?

(2) Sont-elles convergentes ?

Exercice A.10 (suites réelles). Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $u_n = \frac{1}{n} + e^{-n}$.

(1) Déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

(2) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est bornée.

Exercice A.11 (suites réelles). Pour tout entier positif n, on pose $u_n = \frac{3n+1}{2n+5}$. Montrer, en revenant à la définition, que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers $3/2$.

Exercice A.12 (suites réelles). On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{6+u_n} \quad \forall\, n \geq 0. \end{cases}$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge.

Exercice A.13 (suites réelles). Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 \in]1,+\infty[\\ u_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}(u_n^2+7u_n)} - 1 \quad \forall\, n \geq 0. \end{cases}$$

On distinguera les cas $u_0 < 2$, $u_0 = 2$ et $u_0 > 2$.

Exercice A.14 (suites réelles). On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n\,\pi + \frac{1}{n}$.

(1) La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est-elle bornée ?

(2) La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est-elle convergente ?

(3) Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par $v_n = \sin(u_n)$ converge vers 0.

Exercice A.15 (suites réelles). Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite de nombres réels définie par la condition initiale $u_1 = 1$ et la relation de récurrence

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{2}.$$

(1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n < 2$.

(2) Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

(3) En déduire que $(u_n)_{n\geq 1}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice A.16 (suites réelles (extrait du DM1 2013-2014)). Soit $a > 0$ et soit $(u_n)_n \geq 1$ la suite de nombres réels définie par $u_0 > 0$ et

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(u_n + \frac{a}{u_n}\Big), \qquad n \geq 0.$$

(1) Montrer que

$$u_{n+1}^2 - a = \frac{(u_n^2-a)^2}{4u_n^2}.$$

(2) Montrer que pour tout $n \geq 1$ on a $u_n \geq \sqrt{a}$ et que la suite est décroissante.

(3) En déduire que la suite est convergente et déterminer sa limite.

(4) En utilisant la relation $u_{n+1}^2 - a = (u_{n+1} - \sqrt{a})(u_{n+1} + \sqrt{a})$, donner une majoration de $u_{n+1} - \sqrt{a}$ en fonction de $u_n - \sqrt{a}$.

(5) Si $u_1 - \sqrt{a} \leq k$ et pour $n \geq 1$, montrer que

$$u_n - \sqrt{a} \leq 2\sqrt{a}\Big(\frac{k}{2\sqrt{a}}\Big)^{2^{n-1}}.$$

(6) Application : calculer $\sqrt{10}$ avec une précision de 8 chiffres après la virgule, en prenant $u_0 = 3$.

Exercice A.17 (suites réelles (extrait du DM1 2013-2014)). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{k^3+1}$$

Montrer pour tout $n \geq 1$ on a

$$S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{10}$$

En déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$.

Exercice A.18 (suites réelles, calculs de limites (extrait du DM1 2013-2014)). Déterminer la limite, si celle-ci existe, des suites suivantes :

$$a_n = \frac{4^n - (-2)^n}{4^n + (-2)^n}, \quad b_n = \frac{n - \sqrt{2n^2+1}}{n + \sqrt{2n^2-1}}, \quad c_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k,$$

$$p_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n, \quad q_n = \frac{\cos n}{n + (-1)^{n+1}}, \quad r_n = \frac{\sqrt{n} - (-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n},$$

$$U_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{\ln k}{k}}, \quad V_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{2}{k}\right)^k.$$

Exercice A.19 (lemme des gendarmes). Soit $(H_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

(1) En utilisant une intégrale, montrer, pour tout $n \geq 1$, l'inégalité double

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$$

(2) En déduire que $\ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n) + 1$.

(3) Déterminer la limite de H_n.

(4) Montrer que la suite de terme général $u_n := H_n - \ln(n)$ converge (indication : on montrera que $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante).

Exercice A.20 (suites réelles adjacentes).

(1) Démontrer qu'une suite réelle $(u_n)_{n\geq 0}$ converge si et seulement si $(u_{2n})_{n\geq 0}$ et $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ convergent vers une même limite.

(2) Pour $n \geq 1$, on pose

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge (indication : on pourra montrer que les suites $(u_{2n})_{n\geq 0}$ et $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ sont adjacentes).

Exercice A.21 (suites réelles adjacentes). Soient $0 < a < b$, soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ les deux suites définies par

$$u_0 = a, \quad v_0 = b, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Montrer que ces suites sont adjacentes.

Exercice A.22 (suites réelles adjacentes). On considère les deux suites de terme général

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}, \quad v_n = u_n + \frac{1}{n!\,n} \quad (n \geq 1).$$

(1) Montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes. Elles convergent donc vers une même limite, notée e.

(2) Montrer que e est irrationnel.

Exercice A.23 (suites complexes, définition de la limite d'une suite).

(1) Montrer que si la suite de nombres complexes $(u_n)_{n\geq 0}$ converge alors la limite est unique.

(2) Montrer qu'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de nombres complexes est convergente si et seulement si les deux sous-suites $(u_{2n})_{n\geq 0}$ et $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ sont convergentes vers la même limite (voir aussi l'exercice A.20, question 1).

(3) Étudier la convergence des suites $(u_n)_n$ de terme général

$$u_n = (-1)^n, \; u_n = i^n \; (n \geq 0), \quad u_n = \sum_{1\leq k\leq n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \; (n \geq 1).$$

(4) Montrer que $(1/\sqrt{n})_{n\geq 1}$ converge vers 0 en utilisant la définition de la limite.

Exercice A.24 (suites complexes). Etudier la convergence des suites de terme général z_n ci-dessous.

$$z_n = 4 + ni, \quad z_n = \frac{n}{n+3i} - \frac{ni}{n+1}, \quad z_n = \frac{n^2 i^n}{n^3+1}, \quad z_n = (-1)^n e^{in\pi}$$

$$z_n = e^{ni\frac{\pi}{4}}, \quad z_n = \frac{(1+i)^n}{2^n} \quad (n \geq 0) \quad z_n = e^{(-1)^n \frac{i\pi}{n}} \quad (n \geq 1).$$

Exercice A.25 (suites complexes, moyenne de Cesàro). Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres complexes. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$c_n = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n}.$$

On dit que $(u_n)_{n\geq 1}$ converge au sens de Cesàro si la suite $(c_n)_{n\geq 1}$ converge.

(1) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1} = ((-1)^n)_{n\geq 1}$ converge au sens de Cesàro vers une limite que l'on déterminera.

(2) Montrer que si $(u_n)_{n\geq 1}$ convergente vers l alors $(c_n)_{n\geq 1}$ est également convergente de limite l.

Exercice A.26 (suites de Cauchy).

(1) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de terme général $u_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$ n'est pas une suite de Cauchy.

(2) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de terme général $u_n = \frac{2+(-1)^n}{n}$ est de Cauchy.

(3) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de terme général $u_n = \sum_{1\leq k\leq n} \frac{1}{k}$ n'est pas une suite de Cauchy. Que peut-on dire de cette suite $(u_n)_{n\geq 1}$ lorsque $n \to +\infty$?

(4) Montrer qu'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ vérifiant $|u_{n+1} - u_n| \leq 2^{-n}$ pour tout $n \geq 0$ est de Cauchy.

Exercice A.27 (suites de Cauchy). Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2+\frac{1}{k})^k}.$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy. En déduire qu'elle converge.

Exercice A.28 (suites de Cauchy). Soit f une application de $[0,1]$ dans lui-même telle qu'il existe un nombre réel positif $0 < k < 1$ tel que

$$\forall x, y \in [0,1]\,,\ |f(x) - f(y)| \leq k\,|x - y|\,.$$

Soit $a \in [0,1]$. On considère la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ définie par $x_0 = a$, et $x_n = f(x_{n-1})$ pour tout $n \geq 1$.

(1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_{n+1} - x_n| \leq k^n\,|x_1 - x_0|$ et conclure que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy.

(2) Montrer que $l = \lim_{n\to+\infty} x_n$ est l'unique point fixe de la fonction f.

Exercice A.29 (suites de Cauchy). Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres complexes telle que

$$\forall\, p \in \mathbb{N},\ \forall\, q \in \mathbb{N},\ |u_{p+q} - u_p - u_q| \leq 1.$$

(1) Montrer que

$$\forall\, q \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ |u_{kq} - k u_q| \leq k - 1.$$

(2) Montrer que, pour tout entier $r \geq 0$, on a $|u_{kq+r} - u_{kq}| \leq |u_r| + 1$.

(3) En déduire que si k et r désignent respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de n par l'entier $q > 0$, on a

$$\left| u_n - \frac{n}{q}\, u_q \right| \leq \frac{r}{q}\,|u_q| + |u_r| + k.$$

(4) En déduire que la suite $(u_n/n)_{n\geq 1}$ est convergente.

Exercice A.30 (borne supérieure, borne inférieure). Calculer $\sup\{u_p,\ p\geq n\}$, $\inf\{u_p,\ p \geq n\}$, $\overline{\lim}_{n\to+\infty}\, u_n$ et $\underline{\lim}_{n\to+\infty}\, u_n$ pour les suites $(u_n)_n$ suivantes :

(1) $u_n = (-1)^n$ (pour $n \geq 0$) ;

(2) $u_n = (-1)^n \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$ (pour $n \geq 1$) ;

(3) $u_n = \left(2 + \frac{(-1)^n}{n}\right) \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$ (pour $n \geq 1$) ;

(4) $u_n = n^{(-1)^n}$ (pour $n \geq 1$).

Exercice A.31 (borne supérieure, borne inférieure). Soit p un nombre réel strictement positif. On pose :

$$A = \left\{\frac{1}{1+|x|}\right\} ; |x| < p\}, \ B = \left\{\frac{1}{1+|x|} ; |x| > p\right\}.$$

(1) Déterminer $\max A$ et $\sup A$.

(2) Déterminer $\sup B$. L'ensemble B admet-il un maximum ?

II. Exercices en relation avec le chapitre 2 des notes de cours

Exercice A.32 (limites d'une fonction réelle). Soit la fonction $f \ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$. Calculer les limites :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x), \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad \lim_{x \to -\infty} (f(x) + x).$$

Exercice A.33 (limites d'une fonction réelle). En revenant à la définition, démontrer :

$$\lim_{x \to 1} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 2.$$

Exercice A.34 (continuité des fonctions réelles). Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Montrer que f est continue au point x_0 si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n \geq 0}$ de points de I qui converge vers x_0, on a

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Exercice A.35 (continuité des fonctions réelles). Étudier la continuité au point x_0 de $\mathbb{R}$ de la fonction $f \ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x - x\ln(|x|) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

(on discutera suivant la valeur de x_0).

Exercice A.36 (continuité des fonctions réelles).

(1) Montrer que la fonction indicatrice $\chi_{\mathbb{Q}}$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

est discontinue en tout point de $\mathbb{R}$.

(2) Déterminer la nature des points de discontinuité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\,\chi_{\mathbb{Q}}(x)$.

Exercice A.37 (continuité des fonctions réelles). Montrer que deux fonctions réelles continues sur $\mathbb{R}$ qui coïncident sur $\mathbb{Q}$ coïncident en fait sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Exercice A.38 (continuité des fonctions réelles). Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles telle que

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x) + f(y).$$

(1) Calculer $f(0)$.

(2) Pour $p \in \mathbb{N}^*$ et pour $r \in \mathbb{Q}$, calculer $f(p)$, $f(1/p)$, $f(r)$ en fonction de $f(1)$.

(3) On suppose de plus que f est continue sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe alors $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax.$$

(4) En utilisant ce qui précède, déterminer toutes les fonctions $f\ :]0,\infty[\to \mathbb{R}$, continues sur $]0,+\infty[$ et telles que

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, y \in \mathbb{R},\ f(xy) = f(x) + f(y)$$

(on pourra considérer pour ce faire la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto f(e^x)$).

(5) Soit $g\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, y \in \mathbb{R},\ g(xy) = x\, g(y) + y\, g(x).$$

(a) Calculer $g(1)$, puis $g(-1)$, et en déduire que g est impaire (c'est-à-dire que $g(x) = -g(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$).

(b) Pour $x > 0$, on pose $h(x) = g(x)/x$.
— Exprimer $h(xy)$ en fonction de $h(x)$ et de $h(y)$;
— en déduire l'expression de la fonction g.

Exercice A.39 (continuité des fonctions réelles). Soit $f\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et telle que

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(2x) = f(x).$$

Montrer que f est constante sur $\mathbb{R}$.

Exercice A.40 (continuité des fonctions réelles). Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) = \inf \big\{|x-t|\,;\, t \in]0,1]\big\}.$$

(1) Montrer que f est bien définie en tout point de $\mathbb{R}$.

(2) Montrer

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, y \in \mathbb{R},\ |f(x) - f(y)| < |x-y|.$$

(3) En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}$.

(4) Déterminer l'expression de f sur chacun des intervalles : $]-\infty,0]$, $]0,1]$, $]1,+\infty[$.

Exercice A.41 (continuité des fonctions réelles). Soit f à valeurs réelles définie sur le segment $[a,b]$ (non réduit à un singleton) et $J = [c,d]$ avec $a < c < d < b$. Les deux assertions suivantes sont elles équivalentes ?

— (i) : la restriction $f_{|J}$ de f au segment J est continue (en tant que fonction de J dans $\mathbb{R}$) ;

— (ii) : la fonction $f\ : I \to \mathbb{R}$ est continue sur le segment J

(si ce n'est pas le cas, donner un contre-exemple).

Exercice A.42 (continuité des fonctions réelles). On considère la fonction $f\ : [0,\infty[\to\mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, x \geq 0,\ f(x) = \frac{x^2+x}{x^2+1}.$$

(1) Montrer que $f(]0,1[) \subset]0,1[$ et que $f(]1,+\infty[) \subset]1,+\infty[$.

(2) Montrer que l'on peut bien définir une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ de points de $]0,1[$ par la condition initiale $x_0 \in]0,1[$ et la relation de récurrence

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad \forall\, n \geq 0.$$

(3) Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ ainsi définie est une suite croissante. En déduire qu'elle est convergente et trouver sa limite.

Exercice A.43 (continuité des fonctions réelles, extrait du DM 2, 2012-2013).

(1) Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle ouvert I, et soit $x_0 \in I$. On suppose que f est continue en x_0 et que $f(x_0)$ est strictement positif. Montrer qu'il existe un intervalle ouvert J contenant x_0 tel que

$$\forall x \in I \cap J, \quad f(x) > 0.$$

(2) En déduire que si g et h sont deux fonctions réelles sur I, continues en x_0, telles que $g(x_0) \neq h(x_0)$, alors il existe un voisinage V de x_0 tel que

$$\forall x \in V, \quad g(x) \neq h(x).$$

Exercice A.44 (continuité des fonctions réelles, uniforme continuité, extrait du DM 1, 2011-2012).

(1) Soit $f(x) = \sqrt{x}$ pour $x \in \mathbb{R}_+ = [0,+\infty[$. En utilisant la définition, démontrer la continuité de la fonction f sur le segment $[0,a]$, $a > 0$. *Indication* : étudier la continuité de f au voisinage de chaque point x_0 de I_a (considérer les deux cas $x_0 = 0$ et $x_0 > 0$).

(2) La fonction f est-elle uniformément continue sur le segment I_a ? Énoncer le résultat du cours correspondant.

(3) La fonction f est-elle uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$?

(4) Donner un exemple d'une fonction g, continue sur $\mathbb{R}_+$, uniformément continue sur tout segment I_a, $a > 0$, mais qui ne soit pas uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$ tout entier.

Les réponses doivent être justifiées.

Exercice A.45 (théorème des valeurs intermédiaires (TVI)). Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles. Montrer que si $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, alors il existe au moins un point $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$. Soit P un polynôme à coefficients réels de degré impair ; le polynôme P admet-il au moins une racine réelle ?

Exercice A.46 (théorème des valeurs intermédiaires (TVI)). Soient p et q deux réels strictement positifs et f une fonction à valeurs réelles définie et continue sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. En considérant la fonction réelle g définie sur $[a,b]$ par

$$\forall\, x \in [a,b],\ g(x) = p\, f(a) + q\, f(b) - (p+q)\, f(x),$$

montrer qu'il existe au moins un point $c \in [a,b]$ tel que

$$p\, f(a) + q\, f(b) = (p+q)\, f(c).$$

Exercice A.47 (théorème des valeurs intermédiaires (TVI)). Soit $f\ : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[0,1]$ telle que $f(0) = f(1)$ et soit $p \in \mathbb{N}^*$ un entier non nul fixé. Montrer qu'il existe au moins un point $x_p \in [0,1]$ tel que

$$f\Big(x_p + \frac{1}{p}\Big) = f(x_p)$$

(on pourra considérer pour ce faire la fonction $g\ : x \in [0,1] \mapsto f\big(x + \frac{1}{p}\big) - f(x)$).

Exercice A.48 (théorème des valeurs intermédiaires (TVI)). Soit $a > 0$ et $f\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, y \in \mathbb{R},\ |f(x) - f(y)| \geq a|x-y|.$$

(1) Montrer que f est injective.

(2) Soit $y_0 \in \mathbb{R}$. En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, vérifier qu'il est impossible que $f(\mathbb{R})$ évite y_0. En déduire que f réalise une application bijective continue et d'inverse continue de $\mathbb{R}$ dans lui-même.

Exercice A.49 (théorème des valeurs intermédiaires, extréma de fonctions continues). Soit $f\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Les quatre assertions suivantes sont-elles fraies ou fausses ?

— (i) : l'image par f d'un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ est encore un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$;
— (ii) : l'image par f d'un segment de $\mathbb{R}$ est encore un segment de $\mathbb{R}$;
— (iii) : l'image par f d'un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}$ est encore un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}$;
— (iv) : l'image <u>réciproque</u> par f d'un intervalle de $\mathbb{R}$ est encore un intervalle de $\mathbb{R}$.

Si une assertion s'avère fausse, justifier le chaque fois par un contre-exemple.

Exercice A.50 (extréma de fonctions continues). Montrer qu'une fonction $f\ : [0,\infty[\to [0,\infty[$, continue sur $[0,+\infty[$ et tendant vers 0 lorsque x tend vers l'infini, est toujours bornée sur son intervalle de définition $[0,+\infty[$ et atteint toujours sa borne supérieure $\sup_{[0,\infty[} f$. Atteint-elle par contre toujours sa borne inférieure sur $[0,\infty[$? Si ce n'est pas le cas, exhiber un contre-exemple.

Exercice A.51 (extréma de fonctions continues). Montrer qu'une fonction $f\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$ et périodique (c'est-à-dire telle qu'il existe $T > 0$ avec $f(x+T) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$), est bornée sur $\mathbb{R}$ et atteint ses bornes.

Exercice A.52 (extréma de fonctions continues). Soit $f\ : [0,\infty[\to [0,+\infty[$ une fonction continue sur $]0,+\infty[$ telle que

$$\forall\, x \in]0,+\infty[,\ \ f(x) < x.$$

(1) Montrer que $f(0) = 0$.

(2) Montrer que, quelque soient les réels a et b tels que $0 < a < b$, il existe $M_{a,b} \in [0,1[$ tel que $f(x) \leq M_{a,b}\, x$ pour tout $x \in [a,b]$.

Exercice A.53 (extréma de fonctions continues réelles). Soit $f\ :\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall\, x\in\mathbb{R},\ f(x)=\frac{\cos x}{1+x^2}.$$

(1) Montrer que f est une fonction continue majorée et minorée.

(2) Déterminer $\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x)$ et $\inf_{x\in\mathbb{R}} f(x)$. Ces bornes sont-elles atteintes ?

Exercice A.54 (extréma de fonctions continues réelles). Soient f et g deux fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On pose, pour tout $t\in\mathbb{R}$,

$$h(t)=\sup_{x\in[0,1]}\big(f(x)+t\,g(x)\big).$$

(1) Montrer que pour tout $t\in\mathbb{R}$, $h(t)\in\mathbb{R}$ (auquel cas la fonction h est bien définie comme fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) et qu'il existe toujours au moins un $x_t\in[0,1]$ tel que

$$h(x_t)=f(x_t)+t\,g(x_t).$$

(2) Soit $M=\sup_{x\in[0,1]}|g(x)|$. Ce sup est-il un max ?

(3) Montrer que

$$\forall\, t\in\mathbb{R},\ \forall\, s\in\mathbb{R},\ f(x_t)+s\,g(x_t)\leq f(x_s)+s\,g(x_s)$$

et en déduire :

$$\forall\, t\in\mathbb{R},\ \forall\, s\in\mathbb{R},\ |h(t)-h(s)|\leq M\,|t-s|,$$

c'est-à-dire que la fonction h est M-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

Exercice A.55 (continuité, injectivité et monotonie). On considère la fonction $g\ :\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$g(x)=\begin{cases}x \text{ si } x\in\mathbb{Q}\\ 1-x \text{ si } x\notin\mathbb{Q}.\end{cases}$$

(1) Montrer que $g([0,1])\subset[0,1]$.

(2) Montrer que $g\ :[0,1]\to[0,1)$ est une application bijective.

(3) Montrer que g n'est pas monotone sur $[0,1]$ et que g n'est pas non plus continue sur $[0,1]$ (se référer aussi à l'exercice A.36 ci-dessus).

Exercice A.56 (continuité, injectivité et monotonie).

(1) Quel est le domaine de définition maximal de la fonction

$$x\mapsto(\ln(x+1))^2\ ?$$

(2) La fonction f est-elle monotone sur ce domaine de définition maximal ?

(3) Montrer que le domaine de définition maximal de f contient $[0,\infty[$ et déterminer $f([0,+\infty[)$. La restriction $f_{|[0,+\infty[}$ de f à $[0,+\infty($ réalise-t-elle une bijection entre $[0,+\infty[$ et son image ? Si oui, déterminer l'application réciproque $f^{-1}_{|[0,+\infty[}$.

(4) Montrer que le domaine de définition maximal de f contient aussi $]-1,0]$ et déterminer $f(]-1,0])$. La restriction $f_{|]-1,0]}$ de f à $[0,+\infty[$ réalise-t-elle une bijection entre $]-1,0]$ et son image ? Si oui, déterminer l'application réciproque $f^{-1}_{|]-1,0]}$.

Exercice A.57 (continuité, injectivité, fonction réciproque).

(1) Existe-t-il une bijection continue entre $[0,1[$ et $\mathbb{R}$?

(2) Soit la fonction $f\ : [-1,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, x \geq -1,\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}.$$

Déterminer l'image de f. Montre que f réalise une bijection entre $[-1,+\infty[$ et cette image $\mathrm{Im}\, f$ et expliciter ensuite la fonction réciproque f^{-1} : $\mathrm{Im}\, f \to [-1,+\infty[$.

(3) Trouver le plus grand intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ contenant 0 sur lequel la fonction

$$g_I\ : x \in I \mapsto \tan(x^3)$$

soit injective et réalise donc une bijection entre I et $g(I)$. Donner alors le domaine de définition de la fonction réciproque g_I^{-1} et l'image de cette fonction g_I^{-1}.

Exercice A.58 (monotonie, stricte monotonie). Montrer que

$$\forall\, t \in]-1,+\infty[\setminus\{0\},\ \frac{1}{1+t} < \ln(1+t) < t.$$

En déduire que les fonctions

$$x \in]-\infty,-1] \mapsto f(x) = \Big(1+\frac{1}{x}\Big)^x, \quad x \in]0,+\infty[\mapsto g(x) = \Big(1+\frac{1}{x}\Big)^{x+1}$$

sont strictement monotones sur leurs domaines de définition respectifs.

Exercice A.59 (dérivabilité en un point d'une fonction réelle). Prolonger par continuité en 0, puis étudier la dérivabilité en ce même point, des fonctions suivantes :

$$f_1\ : x \in \mathbb{R}^* \mapsto x^2\, \cos(1/x), \quad f_2\ : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \sin(x)\, \sin(1/x).$$

Exercice A.60 (nombre dérivé, fonction dérivée). Soit $f\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2\, \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

(1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

(2) Montrer que f est dérivable en 0.

(3) La fonction f' est-elle continue en 0 ?

Exercice A.61 (dérivabilité des fonctions réelles). Étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes :

(1) $f(x) = |x|$,

(2) $g(x) = x|x|$,

(3) $h(x) = |x(x-2)|$.

Exercice A.62 (règles de calcul pour les fonctions dérivées). Calculer les dérivées des fonctions suivantes sur les intervalles ouverts dans lequels elles sont définies (après avoir précisé ces intervalles) :

(1) $f(x) = \ln|\tan(x/2)|$;

(2) $g(x) = \ln\big(\tan(1+\sqrt{\sin(x^2)})\big)$;
(3) $h(x) = \frac{1}{(x^2)^{1/3}} - \frac{1}{(x^3)^{1/2}}$;
(4) $i(x) = x^x$.

Exercice A.63 (règles de calcul pour les fonctions dérivées). En dérivant n fois la fonction $x \in \mathbb{R} \longmapsto e^{3x}$, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} = 3^n.$$

Exercice A.64 (règles pour le calcul pour les fonctions dérivées). Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes (chacune à l'intérieur de son domaine de définition respectif) :

$$f_1(x) = \sqrt{1+x^2(\sin(x))^2} \qquad f_2(x) = \frac{\exp(1/x)+1}{\exp(1/x)-1}$$
$$f_3(x) = \ln\left(\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}\right) \qquad f_4(x) = \big(x(x-2)\big)^{1/3}.$$

Exercice A.65 (nombre dérivé, fonction dérivée, extrait du DM 2, 2012-2013). Soient a et b deux réels strictement positifs tels que $a+b=1$. Le but de cet exercice est de démontrer que :

$$a\ln\left(\frac{1}{a}\right) + b\ln\left(\frac{1}{b}\right) \leq \ln(2). \tag{A.1}$$

Pour cela, on considère la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = -x\ln x - (1-x)\ln(1-x) \qquad \text{si } 0 < x < 1$$
$$f(0) = f(1) = 0$$

(1) Montrer que f est continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$.
(2) Montrer que
$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = f(1-x)$$
Quelle propriété du graphe de f peut-on en déduire ?
(3) Calculer la dérivée de f sur $]0,1[$ et préciser son signe.
(4) Exploiter les résultats précédents pour démontrer l'inégalité (A.1).

Exercice A.66 (nombre dérivé, fonction dérivée, extrait du DM 2, 2012-2013).

(1) Montrer que pour tout couple (a,b) de réels vérifiant $a < b$ et toute fonction φ dérivable sur $[a,b]$ vérifiant $\varphi(b) > \varphi(a)$, il existe au moins un réel $\ell \in [a,b]$ vérifiant $\varphi(\ell) = \varphi(a)$ et $\varphi'(\ell) \geq 0$. *Indication : on pourra considérer un élément particulier de l'ensemble A des $x \in [a,b]$ tels que $\varphi(x) \leq \varphi(a)$.*
(2) En déduire que si f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et non constante, alors sa dérivée prend des valeurs non nulles. *Indication : on pourra considérer $a < b$ tels que $f(a) \neq f(b)$, et la fonction φ définie sur $[a,b]$ par*
$$\varphi(x) := -x + \frac{2}{m} f(x)$$
où $m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

(3) Montrer que si f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivé positive ou nulle, alors f est croissante. *Indication : on pourra utiliser une fonction φ définie comme à la question* **2**, *avec a et b convenablement choisis.*

Exercice A.67 (dérivabilité et uniforme continuité). Montrer qu'une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et telle que la fonction dérivée f' soit bornée sur cet intervalle I, est uniformément continue sur I.

Exercice A.68 (fonction dérivée et TVI).

(1) Donner un exemple de fonction réelle dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée n'est pas continue.
(2) Soit f une fonction réelle dérivable dans un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$. Montrer que f' vérifie sur I le théorème des valeurs intermédiaires, même si elle n'est pas continue (théorème de Darboux).

Exercice A.69 (théorème de Rolle). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, admettant deux limites égales (finies ou infinies, mais égales) en $-\infty$ et $+\infty$. Montrer que la fonction f' s'annule sur $\mathbb{R}$ en au moins un point.

Exercice A.70 (théorème de Rolle). Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et a, b deux nombres réels. Montrer que le polynôme $X^n + aX + b$ admet au plus trois racines réelles distinctes.

Exercice A.71 (théorème de Rolle). Montrer, à l'aide du théorème de Rolle, que, si $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme

$$P_n(X) = \frac{d^n}{dX^n}\Big[(1 - X^2)^n\Big]$$

est un polynôme de degré n dont les n racines sont toutes réelles, simples, et appartiennent à $[-1, 1]$.

Exercice A.72. Montrer que si une fonction réelle définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ s'annule en $k \geq 2$ nombres réels distincts, alors sa fonction dérivée s'annule en au moins $k-1$ nombres réels distincts. En déduire que si p est une fonction polynomiale d'une variable à coefficients réels, de degré supérieur ou égal à 2, et dont toutes les racines sont réelles, il en va de même de la fonction polynomiale dérivée p'.

Exercice A.73 (théorème de Rolle). Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Montrer que la dérivée de f s'annule nécessairement en au moins un point de $\mathbb{R}$.

Exercice A.74 (théorème de Rolle et accroissements finis).

(1) Donner une version explicite du théorème de Rolle sur les segments $[1, 2]$ puis $[2, 3]$ pour la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto (x-1)(x-2)(x-3)$.
(2) On considère la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto 1 - (x^2)^{1/3}$. Montrer que f' ne s'annule pas sur $[-1, 1]$; pourquoi cela ne contredit pas le théorème de Rolle.
(3) Donner une version explicite du théorème des accroissements finis pour la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$ sur le segment $[-1, 2]$.

Exercice A.75 (accroissements finis). Soit f la fonction de $[0,2]$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} \text{ si } x \in [0,1] \\ 1/x \text{ si } x \in]1,2]. \end{cases}$$

Montrer que f est dérivable $]0,2[$, à droite en 0 et à gauche en 2, et donner sur le segment $[0,2]$ une version explicite du théorème des accroissements finis.

Exercice A.76 (accroissements finis). Soit f une fonction à valeurs complexes définie et dérivable sur $]0,1]$. On suppose qu'il existe un réel strictement positif a tel que, pour tout $x \in]0,1]$, $|f'(x)| < a$. Montrer, en utilisant le critère de Cauchy, que la suite $(f(1/n))_{n\geq 1}$ converge vers une limite finie.

Exercice A.77 (accroissements finis). Soit $I =]a,b[$ un intervalle ouvert borné non vide de $\mathbb{R}$ et $f \;: I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable non bornée sur cet intervalle. Montrer qu'il est impossible que f' soit bornée sur I. Réciproquement, si f' est une fonction de I dans $\mathbb{R}$, dérivable sur I et de dérivée non bornée sur cet intervalle ouvert, peut on affirmer que f est aussi une fonction non bornée ? Donner un contre-exemple si ce n'est pas le cas.

Exercice A.78 (accroissements finis). Soit $a < b$ deux nombres réels et f une fonction réelle dérivable sur $[a,b[$. On suppose $\lim\limits_{x\to b_-} f(x) = +\infty$.

(1) Montrer que f' n'est pas bornée sur $[a,b[$.
(2) Peut-on dire que $\lim_{x\to b_-} f'(x) = +\infty$? On étudiera pour cela la fonction $x \in [-1,0[\mapsto \sin(1/x) - 1/x$.

Exercice A.79 (accroissements finis).

(1) En étudiant la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$, estimer inférieurement et supérieurement la différence $\sqrt{100.1} - 10$.
(2) En étudiant la fonction $x \mapsto \exp(-x^2)$, estimer inférieurement et supérieurement la différence $1 - \exp(-0.024)$.

Exercice A.80 (accroissements finis). Appliquer soit la formule ou l'inégalité des accroissements finis, soit l'une de ses variantes, pour démontrer les quatre inégalités suivantes :

(1) $|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x-y|$ pour x et y réels quelconques ;
(2) $\ln(1+x) \leq x$ pour tout $x \geq 0$;
(3) $e^x \geq 1 + x$ pour tout x réel ;
(4) $x/(1+x^2) \leq \arctan(x) \leq x$ pour tout $x \geq 0$.

Exercice A.81 (accroissements finis). Soient x et y deux nombres réels tels que $0 < x < y$. Montrer que l'on a

$$x < \frac{y-x}{\ln(y) - \ln(x)} < y.$$

Exercice A.82 (accroissements finis). Montrer que

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{\ln(x+1)} - \sqrt{\ln(x)}\right) = 0.$$

Exercice A.83 (accroissements finis). Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $[-1,1]$, telle que $f(-1) = f(1) = 0$. On note $f'(-1)$ et $f'(1)$ respectivement les dérivées à droite en -1 et à gauche en 1. On pose

$$\forall\, x \in]-1,1[,\ g(x) = \frac{f(x)}{1-x^2}.$$

(1) Montrer que la fonction g est prolongeable par continuité sur $[-1,1]$. On note $\tilde{g} : [-1,1] \to \mathbb{R}$ le prolongement continu de g à $[-1,1)$. Expliciter $\tilde{g}(1)$ et $\tilde{g}(-1)$ en fonction des données de l'énoncé.

(2) Montrer qu'il existe au moins un point $c \in]-1,1[$ tel que

$$g'(c) = -\frac{1}{4}\big(f'(1) + f'(-1)\big).$$

(3) La fonction

$$F : x \in]-1,1[\mapsto \frac{1}{1-x^2}$$

est-elle bornée sur $]-1,1[$?

(4) Même question pour f.

(5) Même question pour g.

Exercice A.84 (accroissements finis).

(1) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto 1/x^a$, montrer que pour $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, on a l'inégalité

$$\frac{1}{k^{a+1}} < \frac{1}{a}\Big(\frac{1}{(k-1)^a} - \frac{1}{k^a}\Big).$$

(2) On considère la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ de terme général

$$u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^{a+1}},\ n \geq 2.$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ converge vers une limite finie.

(3) En appliquant maintenant le théorème des accroissements finis à la fonction $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \ln(x)$, montrer que pout tout k dans $\mathbb{N}^*$, on a l'inégalité $\ln(k+1) - \ln(k) < 1/k$.

(4) Soit $(v_n)_{n\geq 0}$ la suite de terme général

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k,\ n \geq 1.$$

Montrer que $\lim_{n\to\infty} v_n = +\infty$.

Exercice A.85 (règle de Bernoulli-l'Hôpital). Appliquer la règle de Bernoulli-l'Hôpital pour calculer les cinq limites suivantes :

$$\lim_{x\to 1}\Big(\frac{1}{\ln(x)} - \frac{x}{x-1}\Big), \qquad \lim_{x\to 0}\Big(\frac{1}{x^3} - \frac{x}{x\sin(x)}\Big), \qquad \lim_{x\to\pi}\Big((x-\pi)\tan\big(\frac{x}{2}\big)\Big)$$
$$\lim_{x\to+\infty}\Big(x\sin\big(\frac{1}{x}\big)\Big), \qquad \lim_{x\to\pi/4}\big((\tan(x))^{\tan(2x)}\big).$$

Exercice A.86 (formule de Taylor-Young à l'ordre 1). Soit f une fonction définie dans un voisinage ouvert de x_0 et dérivable en x_0. Calculer

$$\lim_{h\to 0}\Big(\frac{f(x_0+h^2)-f(x_0+h)}{h}\Big).$$

Exercice A.87 (formule de Taylor-Young à l'ordre 1, théorème de Rolle). Soit f une fonction à valeurs réelles définie et dérivable sur $[0,1]$. On suppose que $f(x)\neq 0$ pour tout $x\in[0,1]$ et que $f(0)=f(1)=0$.

(1) Montrer que f reste de signe constant sur $]0,1[$.
(2) En déduire que $f'(0)f'(1)\leq 0$.

Exercice A.88 (formules de Taylor-Young et de Taylor-Lagrange). Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f: I\to\mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable sur I.

(1) Donner l'expression du polynôme de Taylor de f à l'ordre n en un point $x_0\in I$.
(2) Rappeler l'énoncé des formules de Taylor-Young et de Taylor-Lagrange pour la fonction f au point x_0, en indiquant soigneusement les hypothèses.

Exercice A.89 (formules de Taylor-Young et de Taylor-Lagrange).

(1) Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $x-x^3/6\leq\sin(x)\leq x-x^3/6+x^5/120$.
(2) Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $x-x^2/2\leq\ln(1+x)\leq x$.
(3) Montrer que

$$\forall x\in\mathbb{R}_+,\quad 0\leq e^x-1-x\leq\frac{x^2}{2}e^x.$$

Exercice A.90 (formules de Taylor-Young et de Taylor-Lagrange).

(1) Soit n un entier strictement positif. Écrire la formule de Taylor avec reste intégral au voisinage de 0 à l'ordre n pour la fonction $\cos(x)$.
(2) En déduire que la suite de terme général $u_n=\sum_{k=0}^n(-1)^k/(2k)!$ a une limite quand n tend vers l'infini, et calculer cette limite.

Exercice A.91 (développements limités (DL)). Calculer les développements limités en 0 à l'ordre n des fonctions définies comme suit au voisinage de 0 :

(1) $f(x)=\cos(x^2)+\sin(x)$ avec $n=6$.
(2) $f(x)=\cos(2x)\sqrt{1+x}$ avec $n=3$.
(3) $f(x)=(1+x+x^2)/(1-x-x^2)$, avec $n=4$.
(4) $f(x)=(\sin(x^3))^{\frac{1}{3}}$, avec $n=13$.
(5) $f(x)=(1+x)^{100}/\big((1-2x)^{40}(1+2x)^{60}\big)$, avec $n=2$.
(6) $f(x)=\ln(1+x\sin(x))$, avec $n=4$.
(7) $f(x)=e^{\cos(x)}$, avec $n=4$.
(8) $f(x)=(1+\cos(x))^{1/3}$, avec $n=4$.
(9) $f(x)=x/(e^x-1)$, avec $n=4$.
(10) $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$, avec $n=3$ (on aura posé $f(0)=e$).

Exercice A.92 (développements limités (DL)). Soit la fonction polynomiale $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 + 3x + 1$. Donner le développement limité de f à l'ordre 4 au point 0 ainsi qu'au point 2.

Exercice A.93 (développements limités (DL)).

(1) Calculer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $x \mapsto \sqrt{1 + \sin(x)\mathrm{sh}(x)}$.
(2) Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 1 de

$$x \mapsto \arcsin(\ln^2(x)).$$

Exercice A.94 (développements limités (DL), extrait du DM 2, 2011-2012). Montrer que la partie régulière d'un développement limité en 0 d'une fonction paire ne contient que des termes de degré pair.

Exercice A.95 (développements limités (DL), extrait du DM 2, 2011-2012). On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\mathrm{argsh}\,(x)}{\sqrt{1+x^2}}.$$

(1) Montrer que f satisfait l'équation différentielle :

$$(x^2+1)\, y'(x) + x\, y(x) = 1.$$

(2) En déduire le développement limité de f à l'ordre 7 en 0.

Exercice A.96 (développements limités (DL), tangente géométrique à un graphe). Soit la fonction $f : x \mapsto \ln(x^2 + 2x + 2)$.

(1) Calculer le développement limité de f à l'ordre 3 en 0.
(2) Donner la tangente à la courbe représentative de f au voisinage du point $x = 0$. Donner la position de la courbe par rapport à cette tangente et représenter sommairement le graphe de f au voisinage du point 0.

Exercice A.97 (développements limités (DL), tangente géométrique à un graphe, extrait du DM 2, 2011-2012).

(1) Étudier la parité de la fonction $x \mapsto \tan(x)$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$. Que peut-on dire du DL de $x \mapsto \tan(x)$ en 0 (voir l'exercice A.94 ci-dessus) ?
(2) Calculer le DL de $x \mapsto \tan(x)$ en 0 à l'ordre 5.
(3) On pose

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\tan(x)}$$

pour $x \in]-\pi/2, 0[\cup]0, \pi/2[$. Montrer que f admet une limite en 0 que l'on calculera.
(4) D'après la question précédente, f est prolongeable par continuité en 0. Montrer que la courbe représentative de f admet une tangente au point d'abscisse 0, et préciser la position de la courbe par rapport à cette tangente.

Exercice A.98 (intégration de développements limités). Montrer que :

$$\lim_{x\to 0} \int_x^{3x} \frac{\cos(t)}{t}\, dt = \ln(3), \quad \lim_{x\to 1} \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)} = \ln(2).$$

Exercice A.99 (développements limités (DL), tangente géométrique à un graphe, fonction réciproque). On considère la fonction f sur $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = (e^x - 1)/x$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.

(1) Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer $f'(x)$ pour tout x.

(2) Montrer que f est en fait deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et donner $f''(0)$.

(3) Écrire la formule de Taylor-Young en 0 à l'ordre 2 pour f. Préciser la position de la courbe représentative de f par rapport à sa tangente en 0.

(4) Déterminer les variations de la fonction $\phi : x \mapsto x\, e^x - e^x + 1$. En déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

(5) Déterminer l'intervalle image J de la fonction f, et montrer que la fonction réciproque $g\ : J \to \mathbb{R}$ de f est deux fois dérivable sur J.

Exercice A.100 (calculs de limites *via* les DL). Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \Big(\Big(\frac{1}{1+x^2} - \cos(x)\Big)\frac{1}{x^2}\Big)$$
$$\lim_{x\to 0} \Big(\frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x\ln(1+x^2)}\Big)$$
$$\lim_{x\to 0} \Big(\frac{\arctan(x) - x}{\sin(x) - x}\Big)$$
$$\lim_{x\to 0} \Big(\frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{\sinh^2(x)}\Big)$$
$$\lim_{x\to 0} \Big(\big(\frac{e^{ax} + e^{bx}}{2}\big)^{1/x}\Big), \quad , a, b \in \mathbb{R}.$$

Exercice A.101 (calculs de limites *via* les DL, extrait du DM 2, 2011-2012). Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\ \sin(x)}{x - \sin(x)} \qquad \lim_{x\to +\infty} \big(x - x^2\ln(1+1/x)\big) \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{\cos(x)} - e^{-x^2}}{\big(\sin(x)\big)^2}$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{2\cosh(x)\ \cos(x) - 2}{x^4} \qquad \lim_{x\to 0} \Big(\frac{e^x}{\big(\sin(x)\big)^2} - \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x}\Big).$$

Exercice A.102 (asymptotes à un graphe). Rechercher les asymptotes aux graphes des fonctions suivantes (on en précisera d'abord les domaines de définition) :

(1) $f\ : x \mapsto \frac{x}{1+e^{1/x}}$.

(2) $g\ : x \mapsto [(x^2 - 2)(x + 3)]^{1/3}$.

III. Exercices en relation avec le chapitre 3 des notes de cours

Exercice A.103 (sommes de Riemann).

(1) Soit $x > 0$. Calculer $\sum_{p=0}^{p=n-1} e^{px/n}$ en fonction de x.

(2) Montrer que la limite suivante existe :

$$\lim_{n\to +\infty} \Big(\frac{x}{n}\sum_{p=0}^{n-1} e^{px/n}\Big).$$

(3) En déduire que

$$\int_{[0,x]} e^t\,dt = e^x - 1\,, \quad \forall\, x > 0.$$

Exercice A.104 (sommes de Riemann).

(1) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Établir les deux égalités suivantes :

$$\begin{aligned}\sum_{p=1}^{n} \sin\Big(\frac{x}{2n}\Big)\,\sin\Big(\frac{px}{n}\Big) &= \frac{1}{2}\bigg(\cos\Big(\frac{x}{2n}\Big) - \cos\Big(\frac{2n+1}{2n}\,x\Big)\bigg)\\ \sum_{p=1}^{n} \sin\Big(\frac{x}{2n}\Big)\,\cos\Big(\frac{px}{n}\Big) &= \frac{1}{2}\bigg(-\sin\Big(\frac{x}{2n}\Big) + \sin\Big(\frac{2n+1}{2n}\,x\Big)\bigg).\end{aligned}$$

(2) Utiliser ces résultats pour établir les formules

$$\int_{[0,x]} \sin(t)\,dt = 1 - \cos(x), \quad \int_{[0,x]} \cos(t)\,dt = -\sin(x), \quad \forall\, x > 0.$$

Exercice A.105 (sommes de Riemann). Soit $a \in \mathbb{R}$.

(1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Scinder en facteurs irréductibles le polynôme $X^{2n} - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.

(2) En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$a^{2n} - 1 = (a^2 - 1)\prod_{k=1}^{n-1}\Big(a^2 - 2a\,\cos\Big(\frac{k\pi}{n}\Big) + 1\Big).$$

(3) On suppose $a^2 \neq 1$. À l'aide des sommes de Riemann, montrer que :

$$I(a) = \int_{[0,\pi]} \ln\big(a^2 - 2a\,\cos(t) + 1\big)\,dt = \begin{cases} 0 & \text{si } |a| < 1\\ 2\pi\,\ln|a| & \text{si } |a| > 1.\end{cases}$$

Exercice A.106 (sommes de Riemann, sommes de Darboux). Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ ; \qquad \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^4}\ ; \qquad \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sin\Big(\frac{k\pi}{n}\Big)\ ;$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\ ; \qquad \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}\ ; \qquad \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}e^{\frac{k+2n}{n}}.$$

Exercice A.107 (sommes de Riemann, sommes de Darboux). Montrer que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k^2-k} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{2k+1} = \frac{1}{2}\ln 2.$$

Exercice A.108 (monotonie de la prise d'intégrale de Riemann). On pose :

$$I = \int_{[0,1]} e^{-x^2}\,dx, \quad J = \int_{[0,2]} e^{x^2}\,dx, \quad K = \int_{[0,1]} e^{-x^2}\,\sin(x)\,dx.$$

Montrer que :

(1) $0 \leq I \leq 1$;

(2) $I \leq J$;

(3) $|K| \leq \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{e}\Big)$.

Exercice A.109 (monotonie de la prise d'intégrale de Riemann). Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$I_n = \int_{[0,\pi/4]} \big(\tan(x)\big)^n \, dx.$$

(1) Étudier le sens de variation de la suite $(I_n)_{n\geq 1}$.

(2) Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 1}$ est minorée. Que peut-on en déduire ?

Exercice A.110 (monotonie de la prise d'intégrale de Riemann). Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

(1) Déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

(2) Montrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{(n+1)^2} \leq \int_{[n,n+1]} \frac{dx}{x^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

(3) Montrer

$$\forall\, n \geq 2,\ \int_1^n \frac{dx}{x^2} \leq u_n \leq 1 + \int_1^n \frac{dx}{x^2}.$$

(4) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge, lorsque n tend vers l'infini, vers un nombre L appartenant au segment $[1, 2]$.

Exercice A.111 (sommes de Riemann, théorème fondamental de l'analyse). Soit $f \in C^1([a, b], \mathbb{C})$. On pose $x_k = a + k(\frac{b-a}{n})$ pour $k = 0, \ldots, n$. Déterminer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}) f'(x_k).$$

Exercice A.112 (théorème fondamental de l'analyse). Soit f une fonction continue de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{C}$. Démontrer que la fonction F définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^{\sin x} f(t)\, dt$ est dérivable sur $]-1, 1[$ (ainsi qu'à droite en -1 et à gauche en 1) et calculer sa dérivée.

Exercice A.113 (théorème fondamental de l'analyse). Pour tout $x > 0$ on pose :

$$F(x) := \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}\, dt\,.$$

(1) Quel est le signe de F sur $\mathbb{R}_+^*$?

(2) Etudier la continuité et la dérivabilité de F sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculer $F'(x)$.

(3) Donner le DL de F au voisinage de $x = 1$ à l'ordre 3.

Exercice A.114 (changement de variables dans les intégrales). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue périodique, de période $T > 0$. Montrer que la quantité $\displaystyle\int_\alpha^{\alpha+T} f(x)\, dx$ ne dépend pas de α.

Exercice A.115 (intégration par parties, changement de variables dans les primitives). Soit $a \in]0,+\infty[$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout réel x positif, on pose :

$$I_n(x) = \int_0^x \frac{dt}{(t^a+1)^n}.$$

(1) Déterminer une relation de récurrence entre $I_n(x)$ et $I_{n+1}(x)$.

(2) On suppose $a = 2$. Montrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ I_n(x) = \int_0^{\arctan(x)} \big(\cos(t)\big)^{2(n-1)}\, dt.$$

Exercice A.116 (intégration par parties, changement de variables dans les calculs de primitives).

(1) Calculer

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos(x)}.$$

(2) Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$ (avec $a < b$) telle que

$$\forall\, x \in [a,b],\ f(a+b-x) = f(x).$$

Exprimer $\int_a^b x\, f(x)\, dx$ en fonction de $\int_a^b f(x)\, dx$.

(3) En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{\pi} \frac{x\, dx}{1+\sin(x)}.$$

Exercice A.117 (changement de variables dans les calculs de primitives). Calculer les intégrales suivantes (on pourra effectuer des changements de variables).

$$D_1 = \int_1^2 \frac{\ln x}{x}\, dx\ ; \qquad D_2 = \int_0^1 e^x \cos(e^x)\, dx\ ; \qquad D_3 = \int_e^3 \frac{1}{x(\ln x)^3}\, dx\ ;$$

$$D_4 = \int_e^{e^2} \frac{1}{x(\ln x+1)}\, dx\ ; \qquad D_5 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx\ ; \qquad D_6 = \int_{1/2}^2 \frac{\ln x}{1+x^2}\, dx.$$

(poser $t = \ln x$ dans D_1, D_3 et D_4 ; poser $x = \sin u$ dans D_5 ; poser $y = 1/x$ dans D_6).

Exercice A.118 (changement de variables dans les calculs de primitives). Calculer les intégrales suivantes.

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x\, dx\ ; \qquad I_2 = \int_0^{\pi/2} \sin^4 x \cos^3 x\, dx\ ; \qquad I_3 = \int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos^2 x\, dx.$$

Pour le calcul de I_1, on posera $t = \sin x$. Deviner la suite. Que peut-on dire en général ?

Exercice A.119 (intégration par parties, changement de variables dans les calculs de primitives). Calculer les intégrales suivantes :

$$K_1 = \int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}\, dx\ ; \qquad K_2 = \int_{1/2}^2 \left(1+\frac{1}{x^2}\right) \arctan x\, dx\ ; \qquad K_3 = \int_0^{\pi/2} x \sin x\, dx\ ;$$

$$K_4 = \int_{-1}^1 (\arccos x)^2\, dx\ ; \qquad K_5 = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\, dx\ ; \qquad K_6 = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\, dx.$$

Exercice A.120 (intégration par parties). Calculer les intégrales suivantes (on pourra intégrer par parties).

$$C_1 = \int_0^1 (x-1)e^{-x}\,dx\ ; \qquad C_2 = \int_0^1 \arctan x\,dx\ ;$$
$$C_3 = \int_0^1 (x^2+1)\cos x\,dx\ ; \qquad C_4 = \int_1^2 (3x^2+x+1)\ln x\,dx.$$

Exercice A.121 (intégration par parties, fonctions réglées).

(1) Pour $f \in C^1([a,b],\mathbb{C})$, démontrer que $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(t)\sin(nt)\,dt = 0$.
(2) Démontrer le même résultat pour une fonction f en escalier sur $[a,b]$.
(3) Démontrer le même résultat pour une fonction f continue par morceaux sur $[a,b]$.

Exercice A.122 (intégration de polynômes trigonométriques par linéarisation (rappels de S1)). Calculer par linéarisation (formules d'Euler, voir le cours de semestre 1, [**Ymis**], section 2.3.4) la valeur des intégrales

$$J_1 = \int_0^{\pi/2} \sin^4 x\,dx \quad \text{et} \quad J_2 = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin^4 x\,dx.$$

Exercice A.123 (changement de variables dans les intégrales, intégrales de fractions rationnelles). Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx, \qquad J = \int_{1/2}^3 \frac{dx}{x^2-x+1}$$
$$K = \int_0^{\pi/4} \frac{\tan(x)}{1+\tan(x)}\,dx, \qquad L = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1+\cos(x)}{\big(\sin(x)\big)^2}\,dx.$$

Exercice A.124 (première formule de la moyenne). Soit f une fonction continue sur le segment $I = [a,b]$ avec $a < b$. On considère une fonction g positive et Riemann-intégrable sur I, telle que $\int_{[a,b]} g(x)\,dx > 0$. Montrer qu'il existe $c \in I$ tel que

$$\int_{[a,b]} f(x)\,g(x)\,dx = f(c)\int_{[a,b]} g(x)\,dx.$$

Bibliographie

[CaS] A. Casamayou, N. Cohen, G. Connan, T. Dumont, L. Fousse, F. Maltey, M. Meulien, M. Mezzarobba, C. Pernet, N. M. Thiéry, P. Zimmermann, *Calcul Mathématique avec* `Sage`, ouvrage libre, disponible en ligne sur :
`http://dl.lateralis.org/public/sagebook/sagebook-web-20130530.pdf`

[Eis] M. Eisermann, L'algorithme `Pagerank` de `Google` : une promenade sur la toile.

`http://www.igt.uni-stuttgart.de/eiserm/enseignement/google-promenade.pdf`

[Lag] J.L. Lagrange, *Théorie des fonctions analytiques*, seconde édition, Courcier, Paris, 1813.
`http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k2299441/f7`

[MatL1] Mathématiques L1, Laurent Larazzini et Jean-Pierre Marco *ed.*, nouvelle édition + `eText`, Pearson Education, Paris, 2012.

[MatToutenUn] Mathématiques Tout-en-Un pour la Licence, niveau L1, J.P. Ramis et A. Warusfel *ed.*, Dunod, Paris, 2006.

[Scilab] `Scilab`, logiciel libre téléchargeable sur le site :

`http://www.scilab.org`

Voir en particulier le module lycées :

`http://www.scilab.org/fr/education/lycee`

[Ymis] A. Yger, Mathématiques de base, Cours MISMI, 2007-2008.
`http://math.u-bordeaux1.fr/∼yger/coursmismi.pdf`

[Yweb] A. Yger, outils interactifs pour l'accompagnement du cours d'Analyse 1 2014-2015 disponibles en ligne ici :

`http://www.math.u-bordeaux1.fr/~ayger/ANALYSE1-SAGE/`

[les fichiers `.sws` sont à ouvrir sous l'environnement `notebook()` du logiciel `Sage`]

`http://www.math.u-bordeaux1.fr/~ayger/MAPLE-analyse1/`

[les fichiers `.mw` s'ouvrent sous le logiciel `Maple`]

Index