ALAIN YGER (Université de Bordeaux)

ANALYSE ÉLÉMENTAIRE

(Module L1)

DEUXIÈME PARTIE:

ESPACES DE HILBERT
CALCUL DIFFÉRENTIEL
ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

CHAPITRE 4
ESPACES DE HILBERT, ORTHOGONALITÉ

17. Espaces de Hilbert (définition, exemples).

17.1. *La notion d'espace équipé d'un produit scalaire.*

Nous commencerons par donner la définition d'espace vectoriel réel (resp. complexe) dit euclidien (resp. préhilbertien), ou encore équipé d'un produit scalaire. Il s'agit d'une notion importante, car cette classe d'espaces est une classe d'espaces où l'on peut faire de la géométrie *à la Pythagore*.

Définition 17.1. *On appelle espace euclidien (resp. préhilbertien) la donnée d'un espace vectoriel H sur le corps des nombres réels (resp. complexes), couplée avec celle d'un produit scalaire (noté $< \cdot, \cdot >$), c'est à dire*
• *Dans le cas réel, une application* $\mathbf{R}$*-bilinéaire*

$$< \cdot, \cdot >: \ H \times H \mapsto \mathbf{R}$$

telle que

$$\begin{cases} \forall h_1, h_2 \in H, \ < h_1, h_2 >=< h_2, h_1 > \ \text{(symétrie)} \\ \forall h \in H, \ < h, h >\geq 0 \ \text{(positivité)} \\ < h, h >= 0 \Longrightarrow h = 0 \ \text{(forme définie)} \end{cases} \tag{17.1}$$

• *Dans le cas complexe, une application $< \cdot, \cdot >$ sesquilinéaire de $H \times H$ dans* $\mathbf{C}$, *c'est à dire telle que*

$$\forall h_1, h_2 \in H, \ \forall \lambda, \mu \in \mathbf{C}, \ \begin{cases} < \lambda h_1, h_2 >= \lambda < h_1, h_2 > \\ < h_1, \mu h_2 >= \overline{\mu} < h_1, h_2 > \end{cases}, \tag{17.2}$$

qui vérifie de plus les trois conditions suivantes:

$$\begin{cases} \forall h_1, h_2 \in H, \ < h_1, h_2 >= \overline{< h_2, h_1 >} \ \text{(la forme est hermitienne)} \\ \forall h \in H, \ < h, h >\geq 0 \ \text{(la forme est positive)} \\ < h, h >= 0 \Longrightarrow h = 0 \ \text{(la forme est définie)} \end{cases} \tag{17.3}$$

Un tel produit interne nous autorise à construire une norme sur l'espace H, en posant

$$\|h\| := \sqrt{< h, h >}, \ h \in H$$

ainsi que la distance qui lui correspond:

$$d(h_1, h_2) := \sqrt{< h_1 - h_2, h_1 - h_2 >}.$$

Un espace équipé d'un produit scalaire induit donc une structure d'espace vectoriel normé. Nous noterons habituellement $\| \ \|$ la norme sur H dérivant du produit scalaire $< \cdot, \cdot >$.

17.2. *Un formulaire géométrique dans un espace équipé d'un produit scalaire.*

En utilisant la bilinéarité et la symétrie du produit scalaire dans le cas réel, la sesquilinéarité et l'hermitianité dans le cas complexe, on voit que l'on a les identités

$$\|h_1 + h_2\|^2 + \|h_1 - h_2\|^2 = 2(\|h_1\|^2 + \|h_2\|^2), \ h_1, h_2 \in H \tag{17.4}$$

(dite *loi du parallélogramme*) et

$$\begin{cases} \|h_1 + h_2\|^2 = \|h_1\|^2 + \|h_2\|^2 + 2\mathrm{Re} < h_1, h_2 >, \ h_1, h_2 \in H \ \text{(cas complexe)} \\ \|h_1 + h_2\|^2 = \|h_1\|^2 + \|h_2\|^2 + 2 < h_1, h_2 >, \ h_1, h_2 \in H \ \text{(cas réel)} \end{cases} \tag{17.5}$$

(dites *identités de Pythagore*). La loi du parallélogramme induit la *formule de la médiane*:

$$\|h_0 - \frac{h_1 + h_2}{2}\|^2 + \frac{1}{4}\|h_1 - h_2\|^2 = \frac{1}{2}(\|h_0 - h_1\|^2 + \|h_0 - h_2\|^2), \ h_0, h_1, h_2 \in H \tag{17.6}$$

(il suffit d'appliquer (17.4) en remplacant h_j par $\frac{h_0 - h_j}{2}$, $j = 1, 2$). La positivité du produit scalaire implique, si h_1 et h_2 sont deux éléments de H, dans le cas réel que la fonction trinôme

$$\lambda \in \mathbf{R} \mapsto < h_1 + \lambda h_2, h_1 + \lambda h_2 >= \lambda^2 \|h_2\|^2 + 2\lambda < h_1, h_2 > + \|h_1\|^2 \tag{17.7}$$

est positive, dans le cas complexe que la fonction trinôme complexe

$$\lambda \in \mathbf{C} \mapsto < h_1 + \lambda h_2, h_1 + \lambda h_2 >= |\lambda|^2 \|h_2\|^2 + 2\mathrm{Re}\,(\overline{\lambda} < h_1, h_2 >) + \|h_1\|^2$$

prend ses valeurs dans $[0, \infty[$. Ceci implique dans le cas réel que le discriminant du trinôme (17.7) est négatif, d'où l'inégalité

$$| < h_1, h_2 > | \leq \|h_1\| \|h_2\|, \ h_1, h_2 \in H, \tag{17.8}$$

dite de Cauchy-Schwarz. En spécifiant $\lambda = te^{i\alpha}$, $\alpha \in \mathbf{R}$, dans le cas complexe, on voit que l'on a la même inégalité dans ce cadre. Il est important de noter que cette inégalité (17.8) est stricte dès que h_1 et h_2 ne sont pas colinéaires. Si h_1 et h_2 sont colinéaires, l'inégalité (17.8) devient une égalité.

17.3. *Espaces de Hilbert, exemples.*

Définition 17.2. *Un espace vectoriel réel ou complexe H équipé d'un produit scalaire $< \cdot, \cdot >$ est un espace de Hilbert si et seulement si $(H, \| \ \|)$ (la norme étant la norme induite par le produit scalaire) est un espace de Banach.*

Rappelons que ceci signifie que H, équipé de cette norme, satisfait l'une des conditions équivalentes suivantes:
(a) Toute suite de Cauchy est convergente;
(b) Si $(A_k)_{k \in \mathbf{N}}$ est une suite décroissante (au sens de l'inclusion) de sous ensembles fermés

de H dont le diamètre tend vers 0, l'intersection de tous les A_k est non vide et réduite à un singleton.

(c) toute série $(\sum_n h_n)$, $h_n \in H$, telle que $\sum_{n=0}^{\infty} \|h_n\| < \infty$, converge dans H.

Voici quelques exemples essentiels:

• L'espace $\mathbf{R}^N$ (resp. $\mathbf{C}^N$) et un espace de Hilbert, lorsqu'il est équipé du produit scalaire

$$< X, Y >:= \sum_{k=1}^{N} x_i \overline{y_i}\,,\ X = (x_1, \ldots, x_N),\ Y = (y_1, \ldots, y_N)\,.$$

On peut le penser comme un espace de fonctions, puisque l'on peut identifier le vecteur X avec la fonction $\{1, \ldots, N\} \mapsto \mathbf{C}$, $i \mapsto X(i) = x_i$. Une telle fonction est un signal digital.

• De même, l'espace des matrices complexes A de type $N_1 \times N_2$, équipé du produit scalaire

$$< A, B >:= \sum_{k_1=1}^{N_1} \sum_{k_2=1}^{N_2} a_{k_1,k_2} \overline{b_{k_1,k_2}}\,,\ A = (a_{k_1,k_2}),\ B = (b_{k_1,k_2})\,,$$

est un espace de Hilbert; c'est l'espace des images digitales de type (N_1, N_2).

• En revanche, l'espace de toutes les fonctions continues s d'un intervalle $[a, b]$ de $\mathbf{R}$ et à valeurs réelles (resp. complexes) n'est pas un espace de Hilbert réel (resp. complexe) lorsqu'on l'équipe du produit scalaire

$$< s_1, s_2 >:= \int_0^1 s_1(t) \overline{s_2(t)} dt$$

car il lui manque la propriété de complétude.

• Enfin (et ce sera pour nous ici l'un des examples les plus intéressants), étant donné un ensemble abstrait I, l'espace de toutes les applications de I dans $\mathbf{R}$ (resp. de I dans $\mathbf{C}$), $x : i \mapsto x(i)$, telles que

$$\sum_{i \in I} |x(i)|^2 := \sup_{F,\, F \subset I,\, \# F < \infty} \Big(\sum_{i \in F} |x(i)|^2 \Big) < \infty$$

est un espace de Hilbert réel (resp. complexe) si on l'équipe du produit scalaire

$$< x, y >:= \sum_{i \in I} x(i) y(i)$$

(resp. du produit scalaire

$$< x, y >:= \sum_{i \in I} x(i) \overline{y(i)} \quad).$$

Cet espace est l'espace $l^2_{\mathbf{R}}(I)$ (dans le cas réel) ou $l^2_{\mathbf{C}}(I)$ dans le cas complexe. On a vu au chapitre 3 (voir la proposition 14.3) que le dual d'un tel espace lui était isométrique. Nous verrons plus loin qu'il s'agit là d'une propriété générale des espaces de Hilbert, dont les $l^2_{\mathbf{K}}(I)$, avec $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ sont les prototypes. On vérifie aussi à propos de cet example que la famille des vecteurs

$$e_i : \begin{cases} e_i(j) = 0, \ j \in I, j \neq i \\ e_i(i) = 1 \end{cases}$$

est une famille libre. On a même

$$< e_i, e_j >= \begin{cases} 0, \ j \neq i \\ 1, \ j = i \end{cases}.$$

Une telle famille est dite orthonormée. Enfin, comme l'on sait (voir 11-1 (3)) que si $x \in l^2_{\mathbf{K}}(I)$, l'ensemble des $i \in I$ tels que $x(i) \neq 0$ est au plus dénombrable, il est possible d'approcher tout élément de $l^2_{\mathbf{K}}(I)$ par une suite de combinaisons linéaires finies des e_i, $i \in I$. On peut d'ailleurs aussi justifier ce point en invoquant le corollaire 15.1.3 du théorème de Hahn-Banach. Le système

$$\{e_i, \ i \in I\}$$

est donc un *système orthonormé total* dans $l^2_{\mathbf{K}}(I)$. C'est ce que l'on appellera plus tard une base de Hilbert, tout au moins dans le cas où I sera dénombrable.

18. Projections orthogonales dans un espace de Hilbert.

Le résultat majeur dans un espace de Hilbert (soutendant la théorie de l'optimisation en analyse numérique) est le théorème de projection. Ce théorème s'avère faux dans un préhilbertien, comme on s'en convaincra avec l'exercice 12 de ce fascicule par exemple. Voici le résultat.

Théorème 18.1. *Soit C un sous ensemble fermé, convexe et non vide d'un espace de Hilbert réel (resp. complexe) H. Soit z un élément de H. Il existe un et un seul élément $a = \mathrm{pr}_C(z)$ (dit projection orthogonale de z sur C), tel que*

$$\|z - a\| = \min_{x \in C} \|z - x\| \qquad (18.1).$$

Cet élément est caractérisé par le jeu d'inégalités

$$\forall x \in C, \ < z - a, x - a > \leq 0 \qquad (18.2')$$

dans le cas réel (resp. par le jeu d'inégalités

$$\forall x \in C, \ \mathrm{Re} < z - a, x - a > \leq 0 \qquad (18.2'')$$

dans le cas complexe).

Remarque 18.1. Le jeu d'inégalités (18.2') ou (18.2") s'interprète géométriquement et de manière intuitive en disant que pour tout x de C, les vecteurs $x-a$ et $z-a$ font un angle obtus. Si l'on convient de noter (disons par exemple dans le cas complexe)

$$\forall z_1, z_2 \in H,\ \cos(z_1, z_2) := \frac{\mathrm{Re} < z_1, z_2 >}{\|z_1\| \|z_2\|},$$

la condition (18.2") se lit $\forall x \in C$, $\cos(z-a, x-a) \leq 0$.

Preuve. Soit d la distance $d(z, C)$; $d > 0$ puisque C est fermé. Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de points de C telle que $d^2 \leq \|z - x_n\|^2 \leq d^2 + 1/n$. En utilisant la formule de la médiane (17.6), il vient

$$\begin{aligned}
\forall n, m \in \mathbf{N}^*, \|x_n - x_m\|^2 &= 2(\|z - x_n\|^2 + \|z - x_m\|^2 - 4\|z - \frac{x_n + x_m}{2}\|^2 \\
&\leq 4d^2 + \frac{2}{n^2} + \frac{2}{m^2} - 4\|z - \frac{x_n + x_m}{2}\|^2 \\
&\leq \frac{2}{n^2} + \frac{2}{m^2}
\end{aligned}$$

du fait que $(x_n + x_m)/2$ est dans C (C est convexe) et $d = d(z, C) \leq d(z, (x_n + x_m)/2)$. La suite (x_n) est donc une suite de Cauchy qui converge dans H (puisque H est complet), et vers un point de C puisque C est fermé. L'élément $a = \lim(x_n)$ vérifie (18.1). Un tel a s'avère unique puisque la formule de la médiane implique aussi, si l'on dispose de deux candidats a_1 et a_2 pour (18.1)

$$\|a_1 - a_2\|^2 + 4\|z - (a_1 + a_2)/2\|^2 = 4d^2 \geq 4d^2 + \|a_1 - a_2\|^2$$

puisque $\|z - a_1\|^2 = \|z - a_2\|^2 = d^2$ et $\frac{a_1 + a_2}{2} \in C$. Le premier volet de la proposition est acquis. Voyons maintenant ce qui concerne (18.2') (ou (18.2")). Pour simplifier, nous nous placerons dans le cas complexe. Si a réalise la distance de z à C, on a

$$\forall t \in [0, 1],\ \forall x \in C,\ \|z - a(1-t) - tx\|^2 = \|z - a - t(x - a)\|^2 \geq \|z - a\|^2 \qquad (18.3)$$

(puisque C est convexe et que $ta + (1-t)x$ est dans C quand x est dans C). Ceci donne en développant

$$\forall t \in [0, 1],\ t^2\|x - a\|^2 - 2t\mathrm{Re}\ < z - a, x - a > \geq 0 \qquad (18.4)$$

et donc, après division par t,

$$\forall t \in]0, 1],\ t\|x - a\|^2 - 2\mathrm{Re}\ < z - a, x - a > \geq 0$$

ce qui prouve (en faisant tendre t vers 0) que (18.2") est remplie si a vérifie (18.1). La réciproque est immédiate; si (18.2") est remplie, alors on a (18.4) et par conséquent (18.3) pour tout $x \in C$. En prenant $t = 1$, on a $\|z - x\|^2 \geq \|z - a\|^2$, ce qui montre que a réalise bien la distance de z à C. La preuve du théorème est achevée. $\diamondsuit$

Remarque 18.2. Quand $C = F$ est un sous espace fermé de H, on peut écrire les conditions (18.2') ou (18.2") sous la forme

$$< z - a, x >= 0 \ \ \forall x \in F\,, \tag{18.5}$$

ou encore $z - a$ est orthogonal à F (en abrégé $z - a \in F^{\perp}$). Étant donné un sous espace F d'un espace de Hilbert H (ceci marche aussi dans un préhilbertien), on appelle orthogonal de F et on note $F^{\perp}$ le sous espace (nécessairement fermé cette fois) défini comme

$$F^{\perp} := \{y \in H, \ \forall x \in F, \ < x, y >= 0\}\,.$$

Si F est fermé dans un Hilbert, la projection orthogonale de z sur F est par définition l'unique point a de F tel que $z - a \in F^{\perp}$.

Il est aussi très important d'étudier dans un Hilbert le comportement de la suite des projections d'un point sur des convexes fermés $C_1, \ldots, C_n, \ldots$, de H. Voici le résultat dans ce cas

Proposition 18.1. *Soit $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ une suite de sous ensembles convexes et fermés dans un espace de Hilbert H. On note $P_1, \ldots, P_n, \ldots$, les projections orthogonales sur les convexes respectifs $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$*

(a) *Si $C_{k+1} \subset C_k$ pour tout $k \in \mathbf{N}^*$ et si $\bigcap_{k=1}^{\infty} C_k = C_0 \neq \emptyset$, alors, pour tout $z \in H$, la suite*

$$z_k = P_k(z), \ k \in \mathbf{N}$$

converge vers $P_0(z) = \mathrm{pr}_{C_0}(z)$.

(b) *Si $C_k \subset C_{k+1}$ pour tout $k \in \mathbf{N}^*$ et $C_0 := \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k}$, alors, pour tout $z \in H$, la suite*

$$z_1 = P_1(z), \ldots, z_k = P_k(z)\,, ...$$

converge vers $P_0(z) = \mathrm{pr}_{C_0}(z)$.

Preuve.

(a) On a, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$,

$$\|z - z_k\|^2 \leq \|z - z_{k+1}\|^2 \leq \|z - P_0(z)\|^2$$

puisque $C_0 \subset C_{k+1} \subset C_k$. La suite $(\|z - z_k\|^2)_{k \in \mathbf{N}}$ est une suite croissante majorée convergent vers $d > 0$. La formule de la médiane (17.6) nous assure, comme dans la preuve du théorème 18.1, que la suite z_k est de Cauchy; elle converge donc vers z_0. Mais on peut vérifier que pour tout $u \in C_0$,

$$\mathrm{Re} < z - z_0, u - z_0 >= \lim_{k \mapsto \infty} \mathrm{Re} < z - z_k, u - z_k > \leq 0 \,, \tag{18.7}$$

car $u \in C_k$ pour tout k et (18.7) est remplie si et seulement si $z_0 = P_0(z)$.

(b) Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, on a cette fois

$$\|z - z_k\|^2 \geq \|z - z_{k+1}\|^2$$

puisque $C_k \subset C_{k+1}$. La suite $(\|z - z_k\|^2)_{k \in \mathbf{N}}$ converge vers $d \geq 0$. La formule de la médiane (17.6) nous assure encore, comme dans la preuve du théorème 18.1, que la suite z_k est de Cauchy; elle converge donc vers z_0. Mais on peut vérifier à nouveau que, si $k \in \mathbf{N}^*$, pour tout $u \in C_k$,

$$\mathrm{Re} < z - z_0, u - z_0 >= \lim_{k \mapsto \infty} \mathrm{Re} < z - z_k, u - z_k > \leq 0 \,,$$

Cette propriété est satisfaite pour tout u dans

$$\bigcup_{k \in \mathbf{N}^*} C_k,$$

donc pour tout u dans

$$\overline{\bigcup_{k \in \mathbf{N}^*} C_k} = C_0 \,.$$

Comme C_0 est convexe et fermé, $z_0 = P_0(z)$, par définition de $P_0(z)$. Ceci achève notre preuve. $\diamondsuit$

Du point de vue de l'optimisation, il est souvent utile (et ici encore un petit diagramme géométrique sera d'un précieux secours) d'envisager les projections alternées combinant deux sous espaces. Voici par exemple un énoncé

Proposition 18.2. *Soient F_1 et F_2 deux sous espaces fermés d'un espace de Hilbert H. Soient P_1, Q_1, P_2, Q_2 le projections orthogonales de H respectivement sur $F_1, F_1^{\perp}, F_2, F_2^{\perp}$. Soit $z \in F_1$.*

(a) *L'application $P_{2|F_1} : z \in F_1 \mapsto P_2(z)$ est injective si et seulement si $F_1 \cap F_2^{\perp} = \{0\}$.*

(b) *L'opérateur $A = P_{2|F_1} : z \in F_1 \mapsto P_2(z)$ admet un inverse à gauche B continu ($BA = Id_{F_1}$) si et seulement si*

$$\max_{\substack{x_1 \in F_1 \,,\, x_1 \neq 0 \\ x_2 \in F_2^{\perp} \,,\, x_2 \neq 0}} |\cos(x_1, x_2)| = \theta < 1 \,,$$

ou encore si et seulement si

$$\|Q_2 P_1\| := \max_{\|x\|=1} \|Q_2 P_1(x)\| < 1 \,. \tag{18.8}$$

(c) *Dans les situations du (a) ou du (b), la suite récurrente*

$$z_0 = P_2(z), \ldots, \ z_{k+1} = z_0 + Q_2 P_1(z_k)$$

converge dans H *vers* z.

Preuve.
(a) $x \in \operatorname{Ker} A$ si et seulement si $x \in F_1 \cap F_2^{\perp}$; A est donc injectif si et seulement si $F_1 \cap F_2^{\perp} = \{0\}$.
(b) • Si A a un inverse à gauche continu B, A est injectif, et $F_1 \cap F_2^{\perp} = \{0\}$. L'opérateur

$$\pi_1 : \ F_1 \oplus F_2^{\perp} \mapsto F_1 \ , \quad x_1 + u_2 \mapsto x_1$$

est continu (car $\pi_1 = BP_{2|F_1 \oplus F_2^{\perp}}$). Le sous espace $F := F_1 \oplus F_2^{\perp}$ est isomorphe à $F_1 \times F_2^{\perp}$, et est donc fermé. Nous pouvons écrire tout élément $u \in F = F_1 \oplus F_2^{\perp}$ sous la forme

$$u = L_1(u) + L_2(u)\,, \ L_1 : F \mapsto F_1, \ L_2 : F \mapsto F_2^{\perp}$$

où L_1, L_2 sont deux opérateurs continus de F vers F_1 ou F vers F_2. Soit

$$\begin{aligned} \|L_1\|_{F,F_1} : &= \sup_{u \in F, u \neq 0} \frac{\|L_1(u)\|}{\|u\|} \\ &= \sup_{\substack{x_1 \in F_1,\, x_1 \neq 0 \\ y_2 \in F_2^{\perp}}} \frac{\|x_1\|}{\|x_1 + y_2\|}\,. \end{aligned} \tag{18.9}$$

Soit $x_1 \in F_1$; nous avons

$$\|P_2(x_1)\| = d(x_1, F_2^{\perp}) = \inf_{y_2 \in F_2^{\perp}} \|x_1 + y_2\|\,;$$

donc, nous pouvons reécrire (18.9)

$$\begin{aligned} \|L_1\|_{F,F_1} &= \sup_{x_1 \in F_1,\, x_1 \neq 0} \Big(\frac{\|P_2(P_1(x_1))\|}{\|x_1\|} \Big)^{-1} \\ &= \left(\inf_{x_1 \in F_1,\, x_1 \neq 0} \frac{\|P_2(P_1(x_1))\|}{\|x_1\|} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Si nous écrivons $x_1 = P_2(P_1(x_1)) + Q_2(P_1(x_1))$, il vient

$$\|x_1\|^2 = \|P_2(P_1(x_1))\|^2 + \|Q_2(P_1(x_1))\|^2$$

et

$$\sup_{x_1 \in F_1,\, x_1 \neq 0} \left(1 - \frac{\|P_2 P_1(x_1)\|^2}{\|x_1\|^2} \right) = 1 - \left(\inf_{x_1 \in F_1,\, x_1 \neq 0} \frac{\|P_2 P_1(x_1)\|^2}{\|x_1\|^2} \right),$$

par conséquent

$$1-\left(\inf_{x_1\in F_1,\,x_1\neq 0}\frac{\|P_2P_1(x_1)\|^2}{\|x_1\|^2}\right)=\sup_{x_1\in F_1,\,x_1\neq 0}\left(\frac{\|Q_2(P_1(x_1))\|^2}{\|x_1\|^2}\right)$$
$$=\|Q_2P_1\|^2\,.$$

Ainsi donc, nous avons

$$\|L_1\|^2_{F,F_1}=\frac{1}{1-\|Q_2P_1\|^2}<\infty\,,$$

et

$$\|Q_2P_1\|<1\,.$$

Ceci nous donne la condition (18.8).
• Si maintenant $\|Q_2P_1\|<1$, $B:=(I-Q_2P_1)^{-1}$ est un inverse à gauche continu pour A ($BA=I_{|F_1}$).
(c) On a, par induction

$$z_k=\sum_{l=0}^{k-1}(Q_2P_1)^l(P_2(z))=\sum_{l=0}^{k-1}(Q_2P_1)^l(z-(Q_2P_1)(z))=z-(Q_2P_1)^k(z)\,. \tag{18.11}$$

Mais, pour tout $u\in H$, on a

$$\|u\|^2=\|u-Q_2P_1u\|^2+\|Q_2P_1u\|^2$$

(c'est le théorème de Pythagore), ou encore

$$\|u-Q_2P_1u\|^2=\|u\|^2-\|Q_2P_1u\|^2\,.$$

Une itération donne

$$\sum_{l\geq 0}\|(Q_2P_1)^l(u)-(Q_2P_1)^{l+1}(u)\|^2=\|u\|^2\,, \tag{18.12}$$

et donc, pour tout $u\in H$, $\lim_{l\mapsto\infty}\|(Q_2P_1)^l(u)-(Q_2P_1)^{l+1}(u)\|=0$. Ainsi, pour tout u dans $\mathrm{Im}\,(I-Q_2P_1)$, $\lim_{l\mapsto\infty}\|(Q_2P_1)^l(u)\|=0$ (car $u=(I-Q_2P_1)(v)$). Une telle propriété est remplie pour tout $u\in V=\overline{\mathrm{Im}\,(I-Q_2P_1)}$. On vérifie que, si $T=I-Q_2P_1$, $\forall x,y,\ <Tx,y>=<x,Ty>$, d'où l'on déduit immédiatement que le noyau de T est aussi l'orthogonal de l'adhérence de l'image de T. Nous reviendrons d'ailleurs sur cette remarque dans la section suivante (proposition 19.3). On a donc $V^\perp=\mathrm{Ker}\,(I-Q_2P_1)$. Si u est dans $V^\perp$, c'est à dire dans le noyau de T, alors $u=(Q_2P_1(u))=(Q_2P_1)^2(u)\cdots$, et donc $u=0$ (en utilisant (18.12)). Ainsi, pour tout $u\in V\oplus V^\perp=H$,

$$\lim_{k\mapsto\infty}(Q_2\circ P_1)^k(u)=0\,.$$

Cette propriété vaut pour $u=z$. Le résultat suit alors de (18.11). $\diamondsuit$

19. Dualité. Adjoint d'un opérateur.

Voici deux applications clef du théorème de projection. La première nous dit que le dual d'un espace de Hilbert s'identifie isométriquement à l'espace lui même.

Théorème 19.1. *Soit L une forme linéaire continue sur un espace de Hilbert H (le corps de base est $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$); il existe un et un seul $y \in H$ tel que*

$$\forall x \in H,\ L(x) =< x, y > \ .$$

De plus, l'application

$$L \mapsto y$$

est une isométrie anti-linéaire entre H^* (muni de la norme d'espace normé dual) et H (au sens où $y(\alpha L_1 + \beta L_2) = \overline{\alpha} y(L_1) + \overline{\beta} y(L_2)$).

Preuve. Le sous espace $\operatorname{Ker} L$ est un sous espace fermé F de H. Soit u dans $F^{\perp}$, $u \neq 0$. Il existe un tel u si L n'est pas identiquement nulle (auquel cas $y = 0$ fera l'affaire). On utilise ici le fait (conséquence du théorème de projection) que H est somme de F et $F^{\perp}$ puisque tout $x \in H$ s'écrit

$$x = \mathrm{pr}_F(x) + (x - \mathrm{pr}_F(x)) \in F + F^{\perp},$$

la somme étant directe. Il n'est enfin pas possible de trouver dans $F^{\perp}$ deux vecteurs indépendants u_1 et u_2: en effet, si tel était le cas, on aurait $L(u_1) = \lambda L(u_2)$ pour un certain $\lambda \in \mathbf{C}^*$ et par conséquent $u_1 - \lambda u_2 \in F \cap F^{\perp} = \{0\}$, ce qui contredirait l'indépendance de u_1 et u_2. On a donc

$$H = F \oplus \mathbf{C} u\,.$$

Pour tout $x \in F$, $L(x) =< x, u >= 0$; soit $y := \frac{\overline{L(u)}}{\|u\|^2} u$; on a donc

$$\forall x \in H,\, L(x) =< x, y >$$

et la première partie du théorème est prouvée. L'unicité de y est immédiate, car

$$< x, y_1 >=< x, y_2 > \ \ \forall x \in H$$

implique $< y_1 - y_2, y_1 - y_2 >= 0$, soit $y_1 = y_2$. Enfin, on a, du fait de l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\sup_{\|x\|=1} |< x, y >| = \|y\|,$$

ce qui montre bien que

$$L \mapsto y$$

est une isométrie. L'antilinéarité de cette application est évidente. $\diamondsuit$

La seconde nous autorise à définir la notion d'opérateur adjoint.

Proposition-Définition 19.1. *Soit T un opérateur continu d'un espace de Hilbert H dans lui même. Il existe un unique opérateur continu T^* de H dans H, de même norme d'opérateur que T, dit adjoint de T, tel que*

$$\forall x, y \in H,\ < Tx, y >=< x, T^* y > \ . \tag{18.8}$$

Preuve. Si y est fixé dans H, l'application

$$x \mapsto < Tx, y >$$

est une application linéaire continue de H dans le corps de base, en l'occurrence $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. C'est un élément du dual de H et il existe (par le théorème 19.1) un unique élément $T^*(y)$ tel que

$$< Tx, y >=< x, T^*y >, \; x \in H \, .$$

Cette fois, l'application

$$y \mapsto T^*y$$

est bien linéaire continue car

$$\|T^*y\| = \sup_{\|x\|=1} | < x, T^*y > | = \sup_{\|x\|=1} | < Tx, y > | \leq \|T\| \|y\| \, .$$

On a donc $\|T^*\|_{H,H} \leq \|T\|$. Comme la formule (18.8) se lit aussi

$$\forall x, y \in H, \; < T^*x, y >=< x, Ty >,$$

on a $T^{**} = T$, et donc $\|T\| = \|T^{**}\| \leq \|T^*\|$. On a donc l'égalité des normes de T et T^* et la proposition est prouvée. $\diamondsuit$

Exemples 19.1.
• Si H est l'espace de Hilbert $\mathbf{C}^N$ avec son produit scalaire

$$< X, Y >= \sum_{k=1}^{N} x_k \overline{y_k},$$

l'adjoint de l'opérateur T représenté par la matrice (N, N) A est l'opérateur représenté (toujours lorsque $\mathbf{C}^N$ est rapporté à sa base canonique) par la matrice ${}^t\overline{A}$. Dans le cas $H = \mathbf{R}^N$, l'adjoint d'un opérateur s'obtient du point de vue matriciel en transposant la matrice de cet opérateur.

• L'opérateur *shift* de $l^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{Z})$ dans lui même qui à une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ associe la suite de terme général $y_n = x_{n-1}$ a pour adjoint le shift inverse qui à une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ associe la suite de terme général $z_n = x_{n+1}$.

• L'adjoint du composé de deux opérateurs continus d'un Hilbert dans lui même s'obtient par la règle

$$(T_1 \circ T_2)^* = T_2^* \circ T_1^*.$$

• Si P est l'opérateur de projection orthogonale sur un sous espace fermé, on a $P^* = P$; un tel opérateur est dit *auto-adjoint* ou encore *hermitien.*

Signalons la proposition suivante, souvent utile

Proposition 19.3. *Soit H un espace de Hilbert et T un opérateur continu de H dans H. Le noyau de T est l'orthogonal de l'adhérence de l'image de T^*.*

Preuve. On a

$$\forall x, y \in H, \ < Tx, y >=< x, T^*y > \ .$$

• Si z est dans l'image de T^* ($z = T^*y$) et x dans le noyau de T, on a $< x, z >=< Tx, y >= 0$. Donc $z \in \operatorname{Ker} T^{\perp}$. Ceci reste vrai par continuité du produit scalaire pour tout z dans l'adhérence de l'image de T^*.

• Soit maintenant z dans $\operatorname{Ker} T^{\perp}$. Soit L une forme linéaire continue sur H ($L(x) =< x, y >$ par le théorème 19.1) s'annulant sur $\operatorname{Im} T^*$. Cela signifie que, pour tout $u \in H$,

$$L(T(u)) =< T^*u, y >=< u, Ty >= 0\,.$$

Mais alors $Ty = 0$, ce qui signifie $y \in \operatorname{Ker} T$, et par conséquent

$$L(z) =< z, y >= 0$$

si $z \in \operatorname{Ker} T^{\perp}$. Si l'on utilise le corollaire 15.1.3, on voit que z est dans l'adhérence de $\operatorname{Im} T^*$ puisque toute forme linéaire continue s'annulant sur $\operatorname{Im} T^*$ s'annule en z. On pourrait d'ailleurs, au lieu d'invoquer ce corollaire de Hahn-Banach, utiliser ici un argument basé sur les projections orthogonales: si z n'était pas dans $W = \overline{\operatorname{Im} T^*}$, la forme linéaire

$$x \mapsto < x, z - \operatorname{pr}_W(z) >$$

serait nulle sur $\operatorname{Im} T^*$, mais non nulle en z. $\diamondsuit$

20. Systèmes orthonormés dans un espace préhilbertien, bases hilbertiennes d'un espace de Hilbert séparable.

Définition 20.1. *Soit H un espace préhilbertien réel ou complexe. On dit qu'une suite $e_1, \ldots, e_n, \ldots$, (finie ou infinie) d'éléments de H est un système orthonormé si et seulement si on a*

$$< e_n, e_m >= \begin{cases} 0 \text{ si } n \neq m \\ 1 \text{ si } n = m \end{cases}$$

Exemples 20.1. Les exemples sont multiples.

• Dans l'espace des fonctions continues sur $[-1, 1]$, à valeurs complexes, équipé du produit scalaire

$$< f, g >:= \int_{-1}^{1} f(t)\overline{g(t)}dt,$$

les polynômes de Legendre, donnés par

$$L_n(t) = \frac{1}{2^n n!}\sqrt{n + \frac{1}{2}}\frac{d^n}{dt^n}(1 - t^2)^n, \ n = 0, 1, \ldots,$$

forment un système orthonormé.

• Dans l'espace des fonctions continues sur $\mathbf{R}$, à valeurs complexes, telles que

$$\int_{\mathbf{R}} |f(t)|^2 e^{-t^2} dt < \infty,$$

équipé du produit scalaire

$$< f, g >:= \int_{\mathbf{R}} f(t)\overline{g(t)} e^{-t^2} dt,$$

les polynômes de Hermite

$$H_n(t) = 2^{\frac{-n}{2}} \pi^{-1/4} n!^{\frac{-1}{2}} (-1)^n t^2 \frac{d^n}{dt^n}[e^{-u^2}](t),\ n \geq 1; \quad H_0(t) = \pi^{\frac{-1}{4}},$$

forment un système orthonormé.

• Dans l'espace des fonctions continues T périodiques sur $\mathbf{R}$, à valeurs complexes, équipé du produit scalaire

$$< f, g >= \frac{1}{T} \int_I f(t)\overline{g(t)} dt,$$

où I désigne n'importe quel intervalle de longueur T, les harmoniques fondamentales

$$t \mapsto e^{\frac{2i\pi nt}{T}},\ n \in \mathbf{Z}$$

forment un système orthonormé. Cet exemple est capital dans l'analyse (ou la synthèse) spectrale des signaux périodiques.

• Dans l'espace des fonctions continues sur un intervalle $I = [a, b]$ de $\mathbf{R}$, les fonctions

$$t \mapsto \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\pi(n + \frac{1}{2})\frac{t-a}{l}\right),\ n \in \mathbf{N},\ l = b - a,$$

forment un système orthonormé dans l'espace des fonctions continues sur $[a, b]$, à valeurs complexes, équipé du produit scalaire

$$< f, g >:= \int_a^b f(t)\overline{g(t)} dt\,.$$

Ce système orthonormé joue un rôle important lors de l'analyse en temps et en fréquence (pensez à la codification du langage musical) des signaux non stationnaires. Le système orthonormé change avec la position ou la longueur de l'intervalle I.

• Les fonctions

$$e_n : k \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } k \neq n \\ 1 \text{ si } k = n \end{cases},\ n \in \mathbf{N}^*,$$

forment un système orthonormé dans $l^2_{\mathbf{K}}(\mathbf{N}^*)$, lorsque $\mathbf{K}$, comme d'habitude, désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

La proposition ci dessous est très importante.

Proposition 20.1. *Soit H un espace de Hilbert, avec un système orthonormé $\{a_n,\ n \in \mathbf{N}^*\}$. Soit V l'adhérence dans H du sous espace de H constitué des combinaisons linéaires finies des a_k, $k \in \mathbf{N}^*$.*
(a) *Pour tout $x \in H$, on a l'inégalité dite de Bessel*

$$\sum_{k\in\mathbf{N}^*} | < x, a_k > |^2 = \|\mathrm{pr}_V(x)\|^2 \leq \|x\|^2. \tag{20.1}$$

(b) *Pour tout $x \in H$, la série*

$$\sum_{k=1}^{n} < x, a_k > a_k$$

converge vers $\mathrm{pr}_V(x)$.
(c) *Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite d'éléments du corps de base $\mathbf{K}$ appartenant à $l^2_{\mathbf{K}}(\mathbf{N}^*)$. Il existe un unique $x \in V$ tel que*

$$< x, a_k >= \lambda_k \ \forall k \in \mathbf{N}^*.$$

Ce vecteur x est la projection orthogonale sur V de tout autre vecteur z de H tel que

$$< z, a_k >= \lambda_k \ \forall k \in \mathbf{N}^*.$$

Preuve.
(a) et (b) On peut écrire

$$x = \mathrm{pr}_V(x) + (x - \mathrm{pr}_V(x)).$$

Le second vecteur est orthogonal à tous les a_k et on a

$$< x, a_k >=< \mathrm{pr}_V(x), a_k >,\ k \in \mathbf{N}^*.$$

On peut donc supposer que x est dans V et montrer dans ce cas l'identité

$$\|x\|^2 = \sum_{k\in\mathbf{N}^*} | < x, a_k > |^2$$

(pour prouver **(a)**) ou la convergence vers x de la suite

$$\sum_{k=1}^{n} < x, a_k > a_k$$

(pour prouver **(b)**). On utilise pour cela la proposition 18.1 (b) qui nous assure que x est la limite de la suite x_n, où x_n désigne la projection de x sur le sous espace de dimension finie $V_n := \mathrm{Vec}\,(a_1, \ldots, a_n)$ (ces sous espaces sont emboités en croissant). Or

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} < x, a_k > a_k$$

car le système est orthonormé. On a donc

$$\lim_{n\mapsto+\infty} \|x_n\|^2 = \|x\|^2 \,.$$

Le fait que le système soit orthonormé implique

$$\|x_n\|^2 = \sum_{k=1}^{n} | < x, a_k > |^2$$

et l'on a donc bien prouvé (**a**) et aussi (**b**).
(c) La suite

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k, \ n \in \mathbf{N}^*$$

est de Cauchy car

$$\|s_n - s_m\|^2 = \sum_{m+1}^{n} |\lambda_k|^2$$

si $n > m$ du fait de l'orthonormalité du système $(a_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$. La suite (s_n) est donc convergente vers un élément x de V. On a, pour $k \in \mathbf{N}^*$,

$$< x, a_k >= \lim_{n\mapsto\infty} < s_n, a_k >= \lambda_k \,.$$

Si z est un autre élément de H tel que

$$< z, a_k >=< x, a_k >= \lambda_k, \ k \in \mathbf{N}^*,$$

alors $z - x$ est orthogonal à V et x est donc bien la projection de z sur V. Ceci prouve aussi l'unicité de x et conclut à la preuve du point **(c)**. $\diamondsuit$.

Lorsque le système $\{a_k, \ k \in \mathbf{N}^*\}$, en plus d'être orthonormé, est aussi *total* dans H, ce qui signifie $V = H$, ou encore

$$< x, a_k >= 0 \ \forall k \in \mathbf{N}^* \Longrightarrow x = 0,$$

on dit que $\{a_k, \ k \in \mathbf{N}^*\}$ est une *base hilbertienne* de H. Cependant, exiger l'orthonormalité d'un système est une exigence mathématique difficilement conciliable avec les modèles que proposent la physique ou le monde ambiant. Il existe une notion moins rigide, mais présentant beaucoup des mêmes avantages, celle de *frame* et c'est pourquoi nous juxtaposerons ces deux définitions.

Définition 20.2. *Soit H un espace de Hilbert et $\{a_k, \ k = 1, 2, \ldots\}$ un système fini ou infini (mais en tout cas dénombrable) d'éléments de H. On dit que ce système est un "frame" s'il est total ($V = H$)et s'il existe deux constantes strictement positives c, C telles que, pour toute suite $(\lambda_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ d'éléments du corps $\mathbf{K}$ dont les termes sont nuls asez loin,*

$$c \sum_k |\lambda_k|^2 \leq \Big| \sum_k \lambda_k a_k \Big|^2 \leq C \sum_k |\lambda_k|^2 \,. \tag{20.2}$$

On dit que le système $\{a_k,\ k = 1, 2, \ldots\}$ est une base hilbertienne s'il est à la fois total ($V = H$) et orthonormé.

Remarque 20.1. Si un espace de Hilbert admet une base hilbertienne au sens de la définition ci dessus, il résulte de la Proposition 20.1 que l'application

$$x \mapsto (< x, a_k >)_{\mathbf{k}}$$

est une isométrie entre H et $l^2_{\mathbf{K}}(I)$, I étant soit un ensemble fini $\{1, \ldots, N\}$, soit $\mathbf{N}^*$. Un tel espace de Hilbert contient une partie dénombrable partout dense (prendre les combinaisons linéaires finies et à coefficients dans $\mathbf{Q}$ ou $\mathbf{Q} + i\mathbf{Q}$ des éléments a_k). Un tel espace sera donc un espace normé séparable.

On peut montrer que, dès que I cesse d'être dénombrable, l'espace de Hilbert $l^2_{\mathbf{K}}(I)$ n'est plus séparable. Les espaces de Hilbert que nous manipulerons à ce stade seront séparables. Dans ce cas, l'existence d'une base hilbertienne est acquise en vertu des deux propositions suivantes

Proposition 20.2. *Si $(E, \| \ \|)$ est un espace normé séparable, il existe dans E une suite totale $e_1, e_2, \ldots$, formée de vecteurs linéairement indépendants.*

Preuve. On peut supposer E de dimension infinie. On part d'une suite infinie dense $x_1, \ldots, x_n, \ldots$, de vecteurs de E. On raisonne de manière classique en extrayant une sous suite $e_n = x_{k_n}$, $n \in \mathbf{N}^*$, constituée de vecteurs indépendants, et telle que, pour tout n, si $n \leq k_n$, e_n soit une combinaison linéaire de $x_1, \ldots, x_{k_n}$. On choisit pour cela k_1 comme le premier indice p pour lequel $x_p \neq 0$, par k_{n+1} le plus petit indice $p > k_n$ tel que x_p ne soit pas dans $\mathrm{Vec}\,(x_{k_1}, \ldots, x_{k_n})$. Il existe un tel indice car le sous espace $\mathrm{Vec}\,(x_{k_1}, \ldots, x_{k_n})$ (qui est fermé) ne saurait contenir tous les x_n (formant une famille dense) sans être E tout entier, ce qui est impossible puisque E est supposé de dimension infinie. La suite $(e_n)_n = (x_{k_n})_n$ est donc totale et la proposition est démontrée.

Proposition 20.3. *Tout $\mathbf{K}$- espace de Hilbert séparable H possède au moins une base hilbertienne et s'identifie par conséquent, à une isométrie linéaire près, soit à $\mathbf{C}^N$ (s'il est de dimension finie), soit à $l^2_{\mathbf{K}}(\mathbf{N}^*)$.*

Remarque 20.2. Si H est de dimension infinie, on peut préférer l'identification à $l^2_{\mathbf{K}}(\mathbf{Z})$, ceci n'ayant aucune importance, puisque l'on sait que $\mathbf{N}^*$ et $\mathbf{Z}$ sont en bijection.

Remarque 20.3. Remarquons aussi ici que tout espace préhilbertien séparable est isomorphe (et même isométrique) à un sous espace dense de $l^2_{\mathbf{K}}(\mathbf{N}^*)$.

Preuve. Il s'agit du classique procédé d'orthonormalisation de Gram. On pose, si V_n : $\mathrm{Vec}\,(e_1, \ldots, e_n)$,

$$a_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|},\ a_k = \frac{e_k - \mathrm{pr}_{V_{k-1}} e_k}{\|e_k - \mathrm{pr}_{V_{k-1}} e_k\|},\ k \geq 2\,.$$

Ce système $\{a_k,\ k \in \mathbf{N}^*\}$ est un système orthonormé total (puisque le sous espace engendré par $a_1, \ldots, a_n$ reste par construction égal à V_n pour chaque n).

En guise de conclusion au chapitre 4; du côté de l'intégration.

Si nous disposons de la théorie de l'intégration, nous pouvons exhiber un espace de Hilbert complétant (au sens de la complétion d'un espace normé) l'espace préhilbertien des fonctions f continues sur un intervalle I de $\mathbf{R}$, à valeurs complexes, et d'énergie finie sur cet intervalle (ce qui signifie

$$\int_I |f(t)|^2 dt < \infty \quad),$$

équipé du produit scalaire

$$< f, g >:= \int_I f(t)\overline{g(t)} dt \,.$$

Il s'agit de l'espace $L^2(I, \mathcal{B}, dt)$, où $\mathcal{B}$ est la tribu trace sur I de la tribu des sous ensembles Lebesgue-mesurables de $\mathbf{R}$. Cet espace $L^2(I, \mathcal{B}, dt)$ est séparable et isométrique à $l^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{N}^*)$. La classique identification (lorsque I est un intervalle borné de longueur l) est celle de Fourier,

$$f \in L^2(I, \mathcal{B}, dt) \mapsto (c_k(f))_{k\in\mathbf{Z}},$$

où

$$c_k(f) = \frac{1}{\sqrt{l}} \int_I f(t) e^{-\frac{2i\pi kt}{l}} dt,$$

mais il y en a évidemment d'autres, cette fois avec $l^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{N}^*)$, par exemple utilisant la base hilbertienne formée des polynômes de Legendre. De même, les espaces de Hilbert à poids, du type $L^2(I, \mathcal{B}, \omega(t)dt)$, s'identifient isométriquement à $l^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{N}^*)$ via le choix d'une base hilbertienne constituée de polyômes orthogonaux: ainsi les polynômes de Hermite (voir exercice 7 lorsque $I = \mathbf{R}$ et $\omega(t) = e^{-t^2}$).

Signalons enfin que la théorie de l'intégration abstraite développée en théorie des probabilités fournit un riche éventail d'espaces de Hilbert complexes, les espaces $L^2(\Omega, \mathcal{T}, P)$, où Ω est un ensemble, $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω, P une probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{T})$. Lorsque $\mathcal{S}$ est une sous-tribu de $\mathcal{T}$, l'espace $L^2(\Omega, \mathcal{S}, P)$ s'identifie isométriquement à un sous-espace fermé de $L^2(\Omega, \mathcal{T}, P)$ et l'application

$$L^2(\Omega, \mathcal{T}, P) \mapsto L^2(\Omega, \mathcal{S}, P) : \; X \mapsto \mathrm{pr}_{L^2(\Omega,\mathcal{S},P)} X$$

représente le *conditionnement* relativement à la sous tribu $\mathcal{S}$. On appelle $\mathrm{pr}_{L^2(\Omega,\mathcal{S},P)} X$ l'*espérance conditionnelle* de X relativement à cette tribu.

CHAPITRE 5

ABRÉGÉ DE CALCUL DIFFÉRENTIEL

21. Notion de différentiabilité en un point.

On considère dans cette section deux **K**-espaces vectoriels normés $(E, \|\cdot\|)$ et $(F, |\cdot|)$ (ici **K** sera toujours **R** ou **C**), ainsi qu'un ouvert U de E. Nous pouvons définir, étant donnée une fonction f de U dans F, la notion de *différentiabilité en un point.*

Définition 21.1. *Une fonction f définie dans U et à valeurs dans F est différentiable au point $x_0 \in U$ si et seulement si il existe un opérateur linéaire continu $L_{x_0} \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que l'on ait, pour tout h dans une boule $B(x_0, \epsilon)$ (avec ϵ convenable et en tout cas tel que cette boule soit bien incluse dans U)*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + L_{x_0}(h) + \|h\|\theta(h)\,, \tag{21.1}$$

où θ est une fonction continue en 0 *et telle que* $\theta(0) = 0$.

Nota. Attention à ne pas oublier que L_{x_0} se doit d'être <u>continu</u>!

On peut aussi exprimer (21.1) en écrivant

$$\lim_{\substack{h \mapsto 0 \\ h \neq 0}} \frac{|f(x_0 + h) - f(x_0) - L_{x_0}(h)|}{\|h\|} = 0 \tag{21.2}$$

ou encore, en utilisant les notations classiques de Landau

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + L_{x_0}(h) + \mathbf{o}(\|h\|)\,.$$

Il n'y a aucune ambigüité dans la définition de L_{x_0}; en effet, si une telle application linéaire L_{x_0} existe, elle est forcément unique: si l'on disposait de deux candidats L_{x_0} et $\widetilde{L}_{x_0}$, on aurait, par soustraction

$$L_{x_0}(h) - \widetilde{L}_{x_0}(h) = \|h\|\tilde{\theta}(h)$$

avec $\tilde{\theta}$ continue en 0 et nulle en ce point; on aurait donc, pour tout $t \in]0, 1]$,

$$L_{x_0}(th) - \widetilde{L}_{x_0}(th) = t\|h\|\tilde{\theta}(th) = t\big(L_{x_0}(h) - \widetilde{L}_{x_0}(h)\big)$$

et, par division par t,

$$L_{x_0}(h) - \widetilde{L}_{x_0}(h) = \|h\|\tilde{\theta}(th)\,,$$

ce qui donnerait, en faisant tendre t vers 0, $L_{x_0}(h) = \widetilde{L}_{x_0}(h)$.

En conséquence, il est loisible de choisir un mode de dénomination pour cet opérateur linéaire L_{x_0} lorsqu'il existe. On dit que L_{x_0} est l' *application différentielle* de f en x_0 (ou encore la *différentielle* de f en x_0) et l'on note en général, soit

$$L_{x_0}(h) = df(x_0).h\,,$$

soit

$$L_{x_0}(h) = f'(x_0).h\,.$$

Cette seconde manière de noter L_{x_0}, bien classique lorsque $E = F = \mathbf{R}$, justifie aussi le fait que l'on parle de *dérivabilité* au point x_0 au lieu de différentiabilité. Notons tout de même qu'il ne faut pas confondre le *nombre dérivé* en x_0, à savoir $f'(x_0)$, avec la *dérivée* (ou encore *différentielle* en x_0), qui est l'application linéaire de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$: $h \mapsto f'(x_0).h = h(f'(x_0).1)$; le nombre dérivé correspond dans ce cas à $f'(x_0).1$.

Exemples 21.1.

• Soit E l'espace des matrices (n,n) à coefficients réels (peu importe la norme, toutes les normes étant équivalentes dans un espace de dimension finie, mais pour fixer les idées, on prendra comme norme de la matrice la norme de l'opérateur de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$ qu'elle représente). Alors l'application $A \mapsto A^k$, $k \in N^*$, est bien différentiable en tout point car

$$\begin{aligned}(A_0 + H)^k = A_0^k + HA_0^{k-1} + A_0HA_0^{k-2} + \cdots + A_0^{k-2}HA_0 + \\ + A_0^{k-1}H + \{\text{monômes en } H, A_0 \text{ avec } \deg_H \geq 2\}\,;\end{aligned} \tag{21.3}$$

La norme d'un monôme en (H, A_0) de degré q en H et $k-q$ en A_0 se majorant en $\|H\|^q\|A_0\|^{k-q}$, on peut bien écrire (21.3) comme

$$(A_0 + H)^k = A_0^k + L_{A_0}(H) + \mathbf{o}(H)$$

avec

$$L_{A_0}(H) = HA_0^{k-1} + A_0HA_0^{k-2} + \cdots + A_0^{k-2}HA_0 + A_0^{k-1}H \tag{21.4}$$

ce qui prouve la différentiabilité et nous donne avec (21.4) le calcul de la différentielle au point A_0.

• Si E et F sont des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels quelconques, toute application $\mathbf{K}$-linéaire continue L de E dans F est différentiable en tout point, de différentielle $dL(x_0) = L$ pour tout $x_0 \in E$; en effet, on a trivialement

$$L(x_0 + h) = L(x_0) + L(h)$$

dans ce cas.

• Soit $E = E_1 \times E_2$ un produit d'espaces normés et f une application $\mathbf{K}$-bilinéaire continue de $E_1 \times E_2$ dans F; comme f est continue en $(0,0)$, f est bornée sur un voisinage de $(0,0)$ de la forme $B_1(0,\epsilon_1) \times B_2(0,\epsilon_2)$, $B_1(0,\epsilon_1)$ étant la boule de E_1 (pour la norme $\|\cdot\|_1$ sur E_1) de centre 0 et de rayon ϵ_1, $B_2(0,\epsilon_2)$ la boule de E_2 (pour la norme $\|\cdot\|_2$ sur E_2) de centre 0 et de rayon ϵ_2. Il existe donc une constante C telle que

$$|f(x_1,x_2)| \leq C\|x_1\|_1\|x_2\|_2\,, x_1 \in E_1,\ x_2 \in E_2\,.$$

Mais alors, on a, pour tout $x_1, h_1 \in E_1$, pour tout $x_2, h_2 \in E_2$,

$$f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) = f(x_1,x_2) + f(h_1,x_2) + f(x_1,h_2) + f(h_1,h_2)$$

avec
$$\|f(h_1,h_2)\| \leq C\|h_1\|_1\|h_2\|_2 = \mathbf{o}(\sqrt{\|h_1\|^2+\|h_2\|^2})\,,$$
ce qui prouve la différentiabilité de f en tout point, en nous donnant d'ailleurs aussi la différentielle
$$df(x_1,x_2).(h_1,h_2) = f(h_1,x_2)+f(x_1,h_2)\,.$$
On étendrait ceci sans difficulté aux applications f $\mathbf{K}$-multilinéaires d'un produit d'espaces normés $E_1\times\cdots\times E_n$ dans F; là encore, la multilinéarité et le fait que (de part la continuité de f) il existe une constante C avec
$$|f(x_1,\dots,x_n)| \leq C\|x_1\|_1\cdots\|x_n\|_n\,, x_1\in E_1,\dots,x_n\in E_n$$
impliquent que f est différentiable en tout point, de différentielle
$$df(x_1,\dots,x_n).(h_1,\dots,h_n) = f(h_1,x_2,\dots,x_n)+\cdots+f(x_1,\cdots,x_{n-1},h_n)\,.$$
Rappelons d'ailleurs ici qu'il existe une isométrie entre l'espace vectoriel normé $\mathcal{B}(E_1\times E_2,F)$ des applications bilinéaires continues de $E_1\times E_2$ dans F, avec la norme
$$\|f\| = \sup_{(x_1,x_2),\,\|x_1\|_1=\|x_2\|_2=1}|f(x_1,x_2)| \tag{21.5}$$
et l'espace $\mathcal{L}(E_1,\mathcal{L}(E_2,F))$ équipé de la norme
$$|T| = \sup_{x_1\in E_1,\,\|x_1\|_1=1}\|T(x_1)\| = \sup_{x_1\in E_1,\,\|x_1\|_1=1}\Big(\sup_{x_2\in E_2,\,\|x_2\|_1=1}|T(x_1)[x_2]|\Big)\,. \tag{21.6}$$
L'isométrie en question est simplement l'application $f\mapsto T$, où
$$T(x_1):\ x_2\mapsto f(x_1,x_2)\,;$$
il suffit de comparer les définitions (21.5) et (21.6) des normes dont sont équipés ces deux espaces $\mathcal{B}(E_1\times E_2,F)$ et $\mathcal{L}(E_1,\mathcal{L}(E_2,F))$ pour s'en convaincre. Ce résultat s'étend d'ailleurs à la multilinéarité: il y a une isométrie entre l'espace vectoriel normé $\mathcal{M}_n(E_1\times\cdots\times E_n,F)$ des applications multilinéaires de $E_1\times\cdots\times E_n$ dans F, équipé de la norme
$$\|f\| = \sup_{(x_1,\dots,x_n),\,\|x_1\|_1=\cdots=\|x_n\|_n=1}|f(x_1,\dots,x_n)|$$
et l'espace
$$\mathcal{L}\Bigg(E_1,\mathcal{L}\Bigg(E_2,\big(\mathcal{L}(E_3,\mathcal{L}(\dots,F)\dots)\big)\Bigg)\Bigg),$$
équipé de la norme construite sur le modèle télescopique de (21.6). Dans le cas $n=3$ (pour fixer les idées), l'isométrie est l'application $f\mapsto T$, où
$$T(x_1)[x_2].x_3 = f(x_1,x_2,x_3)\,.$$

Ces remarques nous seront utiles lorsque nous introduirons les différentielles successives.

• Si $E = F = \mathbf{C}$, il y a deux manières d'interpréter la définition de la différentiabilité: soit on considère $\mathbf{C}$ comme un $\mathbf{C}$-espace vectoriel (de dimension 1), soit comme un $\mathbf{R}$-espace vectoriel (de fait $\mathbf{R}^2$ via l'identification entre un vecteur et son affixe) de dimension 2. Dire qu'une fonction f définie dans un ouvert U de $\mathbf{C}$ est différentiable en z_0 si l'on adopte le premier point de vue (E et F sont des $\mathbf{C}$-espaces vectoriels), c'est dire qu'il existe un nombre complexe l_{z_0} tel que, pour $h = h_1 + ih_2 \in \mathbf{C}$ voisin de 0,

$$f(z_0 + h_1 + ih_2) = f(z_0) + l_{z_0}(h_1 + ih_2) + \mathbf{o}(|h|) . \tag{21.7}$$

Si l'on adopte maintenant le second point de vue (E et F sont des $\mathbf{R}$ espaces vectoriels), une application $\mathbf{R}$-linéaire de E dans F se lit comme l'action d'une matrice $(2, 2)$

$$L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

c'est à dire $L(h_1 + ih_2) = (ah_1 + bh_2) + i(ch_1 + dh_2)$, et dire que f est différentiable en z_0 signifie qu'il existe deux nombres complexes λ_{z_0} et μ_{z_0} avec, pour $h \in \mathbf{C}$ voisin de 0,

$$f(z_0 + h_1 + ih_2) = f(z_0) + \lambda_{z_0} h_1 + \mu_{z_0} h_2 + \mathbf{o}(|h|) . \tag{21.8}$$

Il est clair que la propriété (21.8) est plus faible que (21.7); il faut que $\mu_{z_0} = i\lambda_{z_0}$ pour que la différentiabilité au sens réel (deuxième point de vue) implique la différentiabilité au sens complexe (premier point de vue). Par exemple $z \mapsto \overline{z}$ est différentiable en tout point au sens réel, mais nulle part au sens complexe. Les fonctions (à valeurs complexes) différentiables au sens complexe en tout point d'un ouvert de $\mathbf{C}$ sont dites *holomorphes* dans cet ouvert.

À partir de maintenant, et pour éviter l'ambigüité du dernier exemple ci dessus, on prendra toujours $\mathbf{K} = \mathbf{R}$.

Nous avons la proposition immédiate suivante:

Proposition 21.1. *Soit f une application d'un ouvert U de E, à valeurs dans F, qui est différentiable en x_0. Il existe $\epsilon > 0$ et $C > 0$ tels que, pour tout $x \in B(x_0, \epsilon)$,*

$$|f(x) - f(x_0)| \leq C\|x - x_0\| .$$

En particulier, l'application f est continue en x_0.

Preuve. Écrivons, pour $\|h\| \leq \epsilon$,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + df(x_0).h + \|h\|\theta(h) .$$

Comme θ est continue en 0 et nulle en ce point, on a

$$|\theta(h)| \leq 1$$

pour $\|h\| \leq \epsilon_1 \leq \epsilon_0$. Si x est dans $B(x_0, \epsilon_1)$, on a donc

$$|f(x) - f(x_0)| = |df(x_0).(x - x_0) + \|x - x_0\|\theta(x - x_0)| \leq (1 + \|df(x_0)\|)\|x - x_0\| ,$$

d'où la conclusion avec $C = 1 + \|df(x_0)\|$. $\diamondsuit$

Nous pouvons aussi préciser la notion de différentiabilité en introduisant la notion de *dérivée directionnelle*:

Définition 21.2. *Si a est un élément non nul de E, si f est une application d'un ouvert U de E dans F, et $x_0 \in U$, on dit que f admet une dérivée directionnelle en x_0 suivant la direction a si et seulement si, on a pour $t \in]-\epsilon_0, \epsilon_0[$,*

$$f(x_0 + ta) = f(x_0) + t l_{x_0,a} + \mathbf{o}(t)\,.$$

Le vecteur

$$l_{x_0,a} = \lim_{\substack{t \mapsto 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(x_0 + ta) - f(x_0)}{t}$$

s'appelle alors vecteur dérivé de l'application f suivant la direction a au point x_0 (et est noté généralement $\frac{\partial}{\partial a}[f](x_0)$).

La différentiabilité en un point implique l'existence de dérivées directionnelles dans toutes les directions; en effet, si f est différentiable en x_0, on a, pour h voisin de 0,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + df(x_0).h + \|h\|\theta(h)$$

avec θ continue en 0 et nulle en ce point. Mais alors, si a est un vecteur non nul de E, et $t \in]-\eta, \eta[$ avec η assez petit,

$$f(x_0 + ta) = f(x_0) + t(df(x_0).a) + \mathbf{o}(t)\,,$$

ce qui montre que f admet pour dérivée directionnelle dans la direction a au point x_0 le vecteur

$$\frac{\partial}{\partial a}[f](x_0) := df(x_0).a \in F\,.$$

Par contre, l'existence de dérivées directionnelles <u>même dans toutes les directions</u> en un point x_0 ne suffit pas à impliquer la différentiabilité (ni d'ailleurs même la continuité) en un point x_0. Par exemple, la fonction f de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$

$$(x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y} \text{ quand } x^2 + y \neq 0 \\ 0 \text{ quand } x^2 + y = 0 \end{cases}$$

a une dérivée directionnelle dans la direction (α, β) (si $\beta \neq 0$) car dans ce cas

$$f(t\alpha, t\beta) = \begin{cases} \frac{\alpha^2 \beta t^2}{\beta + \alpha^2 t}\,,\ 0 < |t| \leq \eta \\ 0 \text{ si } t = 0 \end{cases}$$

et donc

$$f(t\alpha, t\beta) = \mathbf{o}(|t|) \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial(\alpha,\beta)}[f](0,0) = 0$$

ainsi qu'une dérivée directionnelle dans la direction $(1,0)$, puisqu'alors

$$f(t\alpha, t\beta) = \begin{cases} 0\,,\ 0 < |t| \leq \eta \\ 0 \text{ si } t = 0 \end{cases}$$

et donc
$$f(t,0) = t + \mathbf{o}(|t|) \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial(1,0)}[f](0,0) = 1\,.$$
Mais, si $x \neq 0$, $f(x, -x^2+x^4) = x^2(-x^2+x^4)/x^4$, expression qui tend vers -1 lorsque x tend vers 0; il n'y a donc pas continuité de f en $(0,0)$ puisque $f(0,0)=0$ par définition.

Dans le cas particulier où E est un espace de dimension finie ($E = \mathbf{R}^n$), les dérivées directionnelles suivant les directions des vecteurs $e_1, \dots, e_n$, de la base canonique, lorsqu'elles existent, s'appellent les *dérivées partielles* de l'application f et l'on note
$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial e_i}[f](x_{01},\dots,x_{0n}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_{01},...,x_{0n}) = \\
&= \lim_{\substack{t\mapsto 0\\ t\in\mathbf{R}}} \frac{f(x_1,\dots,x_{i-1},x_i+t,x_{i+1},...,x_n) - f(x_1,\dots,x_n)}{t}
\end{aligned}$$
(lorsque bien sûr cette limite existe).

Ce cadre s'étend au cadre où E n'est plus un espace de dimension finie, mais un produit d'espaces vectoriels normés $E_1 \times \cdots \times E_n$. Dans ce cas, on dit que f admet au point $x_0 = (x_{01},\dots,x_{0n})$ une *dérivée partielle* selon la k^{me} coordonnée si
$$f(x_{01},\dots,x_{0k}+h_k,\dots,x_{0n}) = f(x_0) + l_{x_0,k}(h_k) + \mathbf{o}(\|h_k\|_k)\,,$$
$l_{x_0,k}$ désignant une application linéaire continue de E_k dans F. On note cette application dans ce cas $d_kf(x_0)$. Comme précédemment, si f est différentiable en $x_0 = (x_{01},\dots,x_{0n})$, f admet des dérivées partielles selon toutes les coordonnées, avec la règle
$$d_kf(x_0)(h_k) = df(x_0).(0,\dots,0,\overset{k}{h_k},0,\dots,0),, \tag{21.9}$$
si bien que
$$df(x_0).(h_1,\dots,h_k) = \sum_{k=1}^{n} df_k(x_0).h_k\,. \tag{21.10}$$
Il n'y a pas de retour au sens où, on l'a vu, l'existence de dérivées partielles en un point (quand tous les E_i sont $\mathbf{R}$ par exemple et $F = \mathbf{R}$) <u>n'implique pas</u> la différentiabilité en ce point.

Pour terminer ce paragraphe, rappelons comment se représente une application linéaire continue d'un evn dans un autre (et en particulier la différentielle en un point d'une application différentiable).

• Si $E = \mathbf{R}^n$, $F = \mathbf{R}^m$ (cas bien classique), et si f, définie dans un ouvert U de $\mathbf{R}^n$, à valeurs dans $\mathbf{R}^m$, est différentiable en $x_0 = (x_{01},\dots,x_{0n})$, la matrice $\mathcal{J}(x_0)$ de $df(x_0)$ lorsque $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{R}^m$ sont rapportés à leurs bases canoniques est la *matrice jacobienne* de l'application f. Il s'agit d'une matrice (m,n); comme on le voit grâce à la formule (21.9), la $k^{\text{ème}}$ colonne de cette matrice représente la matrice de l'application d_kf; il s'agit d'une application linéaire de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^m$, dont la matrice est bien un vecteur colonne. Si $f = (f_1, \ldots, f_m)$ où les f_k sont des applications de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$, alors

$$\mathcal{J}(x_0)[i,j] = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)\,,\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n\,.$$

Lorsque E et F sont structurés en espaces produits, $E = E_1 \times \cdots \times E_n$, $F = F_1 \times \cdots \times F_m$, on peut représenter $df(x_0)$ par une matrice Jacobienne $\mathcal{J}(x_0)$ (m,n) constituée non plus de scalaires, mais de blocs, avec

$$\mathcal{J}(x_0)[i,j] = d_j f_i(x_0)\,,\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n\,,$$

et l'on a bien les règles de calcul

$$df(x_0).(h_1, \ldots, h_n) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} d_j f_1(x_0).h_j \\ \vdots \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} d_j f_m(x_0).h_j \end{pmatrix} \tag{21.11}$$

où f_j est l'application obtenue en composant f avec la projection sur le $j^{ème}$ espace de coordonnées F_j. Le vecteur au second membre de (21.11) est assimilé à un élément de F dont les composantes sont organisées en colonne.

• Si E est un espace de Hilbert réel H et $F = \mathbf{R}$, alors la différentielle de f en x_0, si elle existe, est un élément du dual de E, se représentant de manière unique d'après le chapitre 4 sous la forme

$$df(x_0).h =< a(x_0), h >\,,\ h \in H,$$

où $a(x_0)$ est un certain vecteur de H. On écrit en général $a(x_0) = \nabla f(x_0)$, et le vecteur $\nabla f(x_0)$ est appelé *gradient* de f en a; si $E = \mathbf{R}^n$, le gradient de f est le vecteur ligne des dérivées partielles de f,

$$\nabla f(x_0) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\Big)\,.$$

22. La "chain-rule" ou le moteur du calcul différentiel.

Considérons trois $\mathbf{K}$-espaces vectoriels normés, E, F, G, avec des normes respectives que l'on notera $|\cdot|$, $\|\cdot\|$, $|\cdot|$ (ici $\mathbf{K}$ peut être $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, le point important est que tous les espaces, et toutes les notions de différentiabilité doivent être considérés relativement à ce même corps $\mathbf{K}$).

Soit f une application définie dans un ouvert U de E, à valeurs dans F, x_0 un point de U, et g une application définie dans un ouvert V de F contenant $f(x_0)$. On a alors la

Proposition 22.1. *Sous les hypothèses ci-dessus, la fonction $g \circ f$ est* **K***-différentiable en x_0 et on a*

$$d(g \circ f)(x_0) = dg(f(x_0)) \circ df(x_0) \,. \tag{22.1}$$

Remarque 22.1. Remarquons que (22.1) est bien une formule cohérente car $df(x_0) \in \mathcal{L}(E, F)$ et $dg(f(x_0)) \in L(F, G)$.

Remarque 22.2. Dans le cas où les trois espaces E, F, G sont structurés en produits, $E = E_1 \times \cdots \times E_n$, $F = F_1 \times \cdots \times F_m$, $G = G_1 \times \cdots \times G_p$, on a vu au paragraphe précédent que $df(x_0)$ correspondait à une matrice $\mathcal{J}_f(x_0)$ de type (m, n) par blocs (où $\mathcal{J}_f(x_0)[i, j] = d_j f_i(x_0) \in \mathcal{L}(E_j, F_i)$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$), tandis que $dg(f(x_0))$ correspondait à une matrice $\mathcal{J}_g(f(x_0))$ de type (p, m) par blocs (avec $\mathcal{J}_g(f(x_0))[k, l] = d_l g_k(x_0) \in \mathcal{L}(F_k, G_l)$, $1 \leq k \leq p$, $1 \leq l \leq m$). La formule (22.1) signifie que le calcul de $d(g \circ f(x_0)).(h_1, ..., h_n)$ se fait suivant les règles du produit de matrices

$$\mathcal{J}_{g \circ f}(x_0) = \mathcal{J}_g(f(x_0)) \cdot \mathcal{J}_f(x_0) \,,$$

soit

$$\begin{aligned} d(g \circ f)(x_0).(h_1, \ldots, h_n) &= \begin{pmatrix} \sum_{l=1}^{m} d_l g_1(f(x_0)).\big(\sum_{i=1}^{n} d_i f_l(x_0).h_i \big) \\ \vdots \\ \vdots \\ \sum_{l=1}^{m} d_l g_p(f(x_0)).\big(\sum_{i=1}^{n} d_i f_l(x_0).\, h_i \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} d_l g_1(f(x_0)) \circ d_i f_l(x_0).h_i \big) \\ \vdots \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} d_l g_p(f(x_0)) \circ d_i f_l(x_0).\, h_i \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{22.3}$$

Lorsque les espaces E, F, G sont $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{R}^m$, $\mathbf{R}^p$, on a donc les formules

$$\frac{\partial g_k}{\partial x_i} = \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial g_k}{\partial y_l}(f(x_0)) \frac{\partial f_l}{\partial x_i}(x_0) \,,\ k = 1, \ldots, p \,, \tag{22.4}$$

classiques formules de dérivation des applications composées.

Preuve. On écrit que g est différentiable en $f(x_0)$, soit, si $v \in F$ et $\|v\| \leq \eta$,

$$g(f(x_0) + v) = g(f(x_0)) + dg(f(x_0)).v + \tilde{\mathbf{o}}(\|v\|) \,. \tag{22.5}$$

Mais, pour $|h| \leq \epsilon$,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + df(x_0).h + \mathbf{o}(|h|) \,.$$

Pour $|h|$ assez petit, on a $\|df(x_0).h + \mathbf{o}(|h|)\| \leq \eta$, et donc, en reportant dans (22.5),

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x_0 + h) = &(g \circ f)(x_0) + dg(f(x_0)) \circ df(x_0).h + dg(f(x_0)).\mathbf{o}(|h|)+ \\ &+ \tilde{\mathbf{o}}(\|df(x_0).h + \mathbf{o}(|h|)\|) = \\ &= (g \circ f)(x_0) + dg(f(x_0)) \circ df(x_0).h + \check{\mathbf{o}}(h)\,,\end{aligned}$$

ce qui traduit la différentiabilité de $g \circ f$ en x_0 et donne la valeur de $d(g \circ f)(x_0)$. $\diamondsuit$

23. Inégalités des accroissements finis.

On se souvient du résultat classique de premier cycle: si f est une fonction à valeurs réelles, continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)\,. \tag{23.1}$$

Ou de sa version un peu plus élaborée, mais conséquence tout comme le résultat pécédent du théorème de Rolle: étant données deux fonctions f et g à valeurs réelles, continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$, il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$(f(b) - f(a))g'(c) = f'(c)(g(b) - g(a))\,.$$

Ces résultats sont faux dès que l'espace d'arrivée s'est plus $\mathbf{R}$. Par exemple, prenons

$$f:\ [0, 2\pi] \mapsto \mathbf{C} \sim \mathbf{R}^2\ t \mapsto \exp(it)\,.$$

L'application f est différentiable sur $]0, 2\pi[$ (on utilise par exemple les résultats de la section précédente) et on a

$$f'(t) = i\exp(it)$$

(ici $f'(t)$ désigne le nombre dérivé). L'égalité (23.1), si elle était valable, impliquerait

$$|e^{it_1} - e^{it_2}| = |t_1 - t_2|,\ 0 \leq t_1, t_2 \leq 2\pi,$$

ce qui est absurde dès que $|t_1 - t_2| > 2$.

L'énoncé qui reste vrai en toute généralité concerne l'inégalité des accroissements finis et non l'égalité. On a le résultat essentiel suivant:

Théorème 23.1 (inégalité des accroissements finis). *Soit E et F deux espaces normés, U un ouvert de E et f une application différentiable en tout point de U. Si a et b sont deux points de U tels que $[a, b] := \{x \in E, \exists t \in [0, 1],\ x = (1 - t)a + tb\} \subset U$ et si $\|df(x)\| \leq M$ pour tout $x \in [a, b]$, alors*

$$|f(b) - f(a)| \leq M\|b - a\|\,.$$

Preuve. Considérons la fonction numérique

$$t \in [0, 1] \mapsto \psi(t) := |f((1 - t)a + tb) - f(a)|\,.$$

et posons $\varphi(t) = f((1-t)a + tb) - f(a)$; d'après la proposition 22.1, la fonction φ est différentiable en tout point de $[0,1]$, avec comme différentielle

$$h \mapsto hf'((1-t)a + tb).(b-a)\,.$$

D'autre part, on a par définition $\psi(t) = |\varphi(t)|$.

• *Petit résultat préliminaire.*

Si x et y sont deux points de F, la fonction numérique

$$h \mapsto |x + hy|$$

est une fonction convexe car, si $h_1, h_2 \in \mathbf{R}$ et $\lambda, \mu \in [0,1]$, avec $\lambda + \mu = 1$,

$$\begin{aligned}&|x + (\lambda h_1 + \mu h_2)y| = |(\lambda+\mu)x + (\lambda h_1 + \mu h_2)y|\\ &\leq \lambda|x + h_1 y| + \mu|x + h_2 y|\,.\end{aligned}$$

Elle admet donc une dérivée à droite en tout point, car pour tout $h_0 \in \mathbf{R}$,

$$h \mapsto \frac{|x + hy| - |x + h_0 y|}{h - h_0}$$

est une fonction croissante dans $\mathbf{R} \setminus h_0$. D'ailleurs, on voit aussi ainsi que la dérivée à droite en 0 est majorée par le taux d'acroissements

$$\frac{|x + hy| - |x|}{h} \leq |y|\,.$$

• *Montrons alors que la fonction ψ est dérivable à droite en tout point de* $[0,1]$*, avec* $\psi'_d(t) \leq M\|b-a\|$.

En effet, pour $h > 0$ (assez petit), pour $t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}&\frac{\psi(t+h) - \psi(t)}{h} = \frac{|\varphi(t+h)| - |\varphi(t)|}{h} =\\ &= \frac{|\varphi(t) + h\varphi'(t) + \mathbf{o}(h)| - |\varphi(t)|}{h} =\\ &= \frac{|\varphi(t) + h\varphi'(t)| - |\varphi(t)|}{h} + \mathbf{o}(1)\\ &\mapsto \mu(t)\end{aligned}$$

où $\mu(t)$ est la dérivée à droite en 0 de la fonction

$$h \mapsto |x + hy|$$

avec $x = \varphi(t)$ et $y = \varphi'(t)$ (notons qu'ici encore, on a, pour une application de $\mathbf{R}$ dans F, confondu différentielle en t et vecteur dérivé; on a $d\varphi(t).h = h\varphi'(t)$). On a donc

$$\mu(t) \leq |y| = |\varphi'(t)| \leq M\|b-a\|\,.$$

• *Reste à montrer que si ψ est une fonction continue de $[0,1]$ dans $[0,+\infty[$, dérivable à droite sur $[0,1]$ et telle que $\psi'_d(t) \leq M'$, alors $\psi(1)-\psi(0) \leq M'$.*

Il s'agit là d'un résultat élémentaire concernant les fonctions numériques. Considérons la fonction
$$t \in [0,1] \mapsto \psi_\epsilon(t) :=\mapsto \psi(t) - M't - \epsilon t\,,\ \epsilon > 0\,.$$
Cette fonction est continue sur $[0,1]$, dérivable à droite en tout point de $[0,1]$, et telle que $(\psi_\epsilon)'_d < 0$ en tout point de $[0,1]$. Soit
$$c = \sup\{t \in [0,1],\ \psi_\epsilon(t) - \psi_\epsilon(0) \leq 0\}$$
(ce sup existe car il s'agit de la borne supérieure d'un sous ensemble de $\mathbf{R}$ non vide, car contenant 0, et majoré par 1). Par continuité de ψ_ϵ, on a nécessairement $\psi_\epsilon(c)-\psi_\epsilon(0)=0$. Mais, si c était dans $[0,1[$, on aurait aussi, pour tout $t \in]c,1]$, $\psi_\epsilon(t)-\psi_\epsilon(0) > 0$ (puisque c est le plus grand majorant de l'ensemble des t où est valide l'inégalité contraire). Il y a donc une contradiction avec le fait que $(\psi_\epsilon)'_d(c) < 0$ car on devrait avoir, pour $\tau > 0$ assez petit
$$\psi_\epsilon(c+\tau) - \psi_\epsilon(0) = \tau((\psi_\epsilon)'_d(c) + \mathbf{o}(1)) < 0\,.$$
On a donc bien montré
$$\psi_\epsilon(1) - \psi_\epsilon(0) \leq 0\,.$$
En faisant tendre ϵ vers 0, on trouve
$$\psi(1) - \psi(0) \leq M'\,.$$
Or ici, dans ce qui nous intéresse, on a $\psi(1) = |f(b)-f(a)|$, $\psi(0)=0$, $M' = M\|b-a\|$, ce qui achève notre démonstration.

Remarque 23.1. Si l'on suppose que l'application f est seulement différentiable en tout point de $]a,b[$, où $]a,b[:= \{x \in E,\ \exists t \in]0,1[,\ x = (1-t)a+tb\}$, l'application ψ
$$t \in [0,1] \mapsto |f((1-t)a+tb) - f(a)|$$
est différentiable sur $]0,1[$, de différentielle en t l'application
$$h \mapsto hf'((1-t)a+tb).(b-a)$$
(rien de changé par rapport à l'affirmation précédente). Si l'on reprend la preuve ci dessus, on voit qu'en ce qui concerne le troisième point, on a utilisé la dérivabilité de ψ_ϵ en un point c de $]0,1[$. On peut donc conclure que ces quatre hypothèses:

-le segment $[a,b]$ est inclus dans U
-f est continue sur $[a,b]$
-f est différentiable en tout point de $]a,b[$
-$\|df(x)\| \leq M$ pour tout $x \in]a,b[$
$$\Longrightarrow |f(b)-f(a)| \leq M\|b-a\|\,.$$

Remarque 23.2. La même démonstration montre que si φ et θ sont deux applications d'un intervalle $I = [\alpha, \beta]$, à valeurs l'une dans F, la seconde dans $\mathbf{R}$, continues sur I, admettant une dérivée à droite en tout point de $\overset{\circ}{I}$, avec

$$\|\varphi'_d(t)\| \leq \theta'_d(t), \ t \in \overset{\circ}{I},$$

alors, on a

$$|\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)| \leq \theta(\beta) - \theta(\alpha).$$

Il s'agit là d'une version améliorée de l'inégalité des accroissements finis. La preuve est immédiate si l'on suit la preuve précédente; il suffit de considérer à la place de ψ_ϵ la fonction

$$t \mapsto \|\varphi(t(1-\alpha) + t\beta) - \varphi(\alpha)\| - (\theta(t) - \theta(\alpha) - \epsilon(t-a)$$

et de conduire la preuve de manière identique.

La première application du théorème des accroissements finis concerne le lien entre existence de dérivées partielles et différentiabilité (on a vu précédemment que l'existence de dérivées partielles ***n'impliquait pas*** en général la différentiabilité, ni même d'ailleurs la continuité).

Théorème 23.2. *Soient $E_1, \ldots, E_n, F$ $n+1$ espaces vectoriels normés, et f une application d'un ouvert U de $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ dans F.*
• *Si f admet, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, des dérivées partielles $d_k f(x) \in \mathcal{L}(E_k, F)$ en tout point de U et si les applications*

$$x \in U \mapsto d_k f(x) \in \mathcal{L}(E_k, F), \ k = 1, \ldots, n,$$

sont continues en un point $x_0 \in U$, alors f est différentiable en ce point.
• *Si f admet des dérivées partielles suivant chaque espace de coordonnée E_k en tout point de U et si les applications $x \mapsto d_k f(x)$ (de U dans $\mathcal{L}(E_k, F)$) sont continues pour tout $k \in \{1, ..., n\}$, alors f est différentiable dans U et l'application $x \mapsto df(x)$ est continue de E dans $\mathcal{L}(E, F)$.*

Preuve du premier point. On a vu que si f est différentiable en x_0, alors elle admet des dérivées partielles $d_k f(x_0)$ suivant chaque espace de coordonnée et

$$df(x_0).(h_1, \ldots, h_n) = \sum_{k=1}^{n} d_k f(x_0).h_k.$$

Il est donc naturel pour nous qui savons que les dérivées partielles existent (mais sans savoir cette fois que f est différentiable) de former

$$\theta(h) := f(x_0 + h) - f(x_0) - \sum_{k=1}^{n} d_k f(x_0).h_k$$

et de vérifier que $\theta(h) = \mathbf{o}(\|h\|)$. On prendra $n = 3$ pour ne pas alourdir les notations; il n'y a aucune différence avec la preuve pour n supérieur. Écrivons, si $h = (h_1, h_2, h_3) \in E_1 \times E_2 \times E_3$,

$$\begin{aligned}\theta(h) = &[f(x_{01} + h_1, x_{02} + h_2, x_{03} + h_3) - f(x_{01}, x_{02} + h_2, x_{03} + h_3) - d_1 f(x_0).h_1] + \\ &+ [f(x_{01}, x_{02} + h_2, x_{03} + h_3) - f(x_{01}, x_{02}, x_{03} + h_3) - d_2 f(x_0).h_2] + \\ &+ [f(x_{01}, x_{02}, x_{03} + h_3) - f(x_{01}, x_{02}, x_{03}) - d_3 f(x_0).h_3]\,.\end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned}g_1(\xi_1) &= f(x_{01} + \xi_1, x_{02} + h_2, x_{03} + h_3) - d_1 f(x_0).\xi_1,\ \xi_1 \in E_1 \\ g_2(\xi_2) &= f(x_{01}, x_{02} + \xi_2, x_{03} + h_3) - d_2 f(x_0).\xi_2,\ \xi_2 \in E_2 \\ g_3(\xi_3) &= f(x_{01}, x_{02}, x_{03} + \xi_3) - d_3 f(x_0).\xi_3,\ \xi_3 \in E_3\,.\end{aligned}$$

On a

$$\theta(h_1, h_2, h_3) = (g_1(h_1) - g_1(0)) + (g_2(h_2) - g_2(0)) + (g_3(h_3) - g_3(0))\,.$$

Mais, par hypothèses, les applications g_j sont différentiables; on a d'ailleurs

$$\begin{aligned}dg_1(\xi_1) &= d_1 f(x_{01} + \xi_1, x_{02} + h_2, x_{03} + h_3) - d_1 f(x_0) \\ dg_2(\xi_2) &= d_2 f(x_{01}, x_{02} + \xi_2, x_{03} + h_3) - d_2 f(x_0) \\ dg_3(\xi_3) &= d_3 f(x_{01}, x_{02}, x_{03} + \xi_3) - d_3 f(x_0)\end{aligned}$$

Si les dérivées partielles sont continues en x_0, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in B(x_0, \eta)$, pour tout $j \in \{1, \ldots, 3\}$,

$$\|d_j f(x) - d_j f(x_0)\|_j \leq \epsilon$$

(ici l'indice j signifiant ici qu'il s'agit de la norme d'opérateur de E_j dans F). En appliquant les accroissements finis, on a, si $\|h\| \leq \eta$,

$$|g_j(h_j) - g_j(0)| \leq \|h_j\|_j \sup_{[0,h_j]} \|dg_j\|_j \leq \epsilon \|h_j\|_j,\ j = 1, 2, 3$$

(l'indice j précise qu'il s'agit de la norme sur E_j). On a bien montré, pour tout $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned}\exists \eta,\ \|h\| \leq \eta \Longrightarrow |\theta(h)| &\leq \sum_{j=1}^{3} |g_j(h_j) - g_j(0)| \\ &\leq \epsilon(\|h\|_1 + \|h\|_2 + \|h\|_3)\,.\end{aligned}$$

Donc $\theta(h) = \mathbf{o}(\|h\|)$. Ceci achève la preuve du premier point.

Preuve du second point. En utilisant le premier point, on voit que f est différentiable en tout point x_0 de E. D'autre part, la différentielle $df(x)$ en un point x est

$$df(x) :\ (h_1, \ldots, h_n) \mapsto \sum_{k=1}^{n} d_k f.h_k\,.$$

On a donc

$$\|df(x) - df(x_0)\| \leq \sum_{k=1}^{n} \|df_j(x) - df_j(x_0)\|_j \,,$$

(l'indice j signifiant ici qu'il s'agit de la norme d'opérateur de E_j dans F). La continuité en tout x_0 des $x \mapsto df_j(x)$ implique bien la continuité de $x \mapsto df(x)$. $\diamondsuit$

La seconde conséquence importante de l'inégalité des accroissements finis concerne les suites d'applications différentiables et étend le résultat bien connu de premier cycle suivant:
"Si (f_n) est une suite de fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbf{C}$, dérivables sur $[a,b]$, de dérivées continues sur $[a,b]$, telle que la suite $(f'_n)_n$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction g et que, pour un point particulier c de $[a,b]$, la suite $(f_n(c))_n$ converge vers une limite finie $l \in \mathbf{C}$, alors, la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers la fonction

$$t \mapsto l + \int_c^t g(t)dt$$

qui est une fonction continuement dérivable sur $[a,b]$, de dérivée g. "

Dans notre nouveau contexte, nous retrouverons ce résultat comme un cas particulier du

Théorème 23.3. *Soient E un espace vectoriel normé, F un espace de Banach, et U un ouvert convexe de E (au sens où si a et b sont deux points de U, le segment $[a,b]$ est tout entier dans U). Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de U dans F, différentiables en tout point de U. On suppose*
• *Il existe un point x_0 de U telle que la suite $(f_n(x_0))_n$ converge dans F (ou soit de Cauchy, ce qui est la même chose car F est un Banach).*
• *La suite des applications $df_n : U \mapsto \mathcal{L}(E,F)$ converge uniformément vers une application g de U dans $\mathcal{L}(E,F)$, ce qui signifie*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbf{N},\ n \geq N \Longrightarrow \sup_{x \in U} \|df_n(x) - g(x)\|_{E,F} \leq \epsilon\,. \tag{23.2}$$

Alors, il existe une fonction $f : U \mapsto F$, telle que la suite f_n converge simplement vers f sur U, uniformément sur toute partie bornée de U; de plus la fonction f est différentiable en tout point de U et $df(x) = g(x)$ pour tout $x \in U$.

Preuve. La suite $(df_n)_n$ est une suite de Cauchy (au sens de la norme uniforme) comme suite d'applications de U dans $\mathcal{L}(E,F)$ (car elle converge). Donc

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N_\epsilon,\ \forall p,q \geq N_\epsilon,\ \forall x \in U,\ \|df_p(x) - df_q(x)\|_{E,F} \leq \epsilon\,. \tag{23.3}$$

Comme $[x_0, x] \subset U$ (par convexité) pour tout $x \in U$, on a, en utilisant l'inégalité des accroissements finis (théorème 23.1) et après avoir fixé ϵ arbitrairement petit,

$$\forall p,q \geq N_\epsilon, |(f_p(x) - f_q(x)) - (f_p(x_0) - f_q(x_0))| \leq \epsilon \|x - x_0\|\,.$$

On en déduit que la suite $(f_n(x) - f_n(x_0))_n$ est de Cauchy dans F, et même, si K est une partie bornée de U, de Cauchy dans l'espace $\mathcal{F}_b(K,F)$ des fonctions bornées de K dans F (équipé de la norme de la convergence uniforme). Comme F et $\mathcal{F}_b(K,F)$ sont des espaces de Banach, la suite $(f_n - f_n(x_0))_n$ converge bien vers une fonction $\tilde{f}$, la convergence étant uniforme sur toute partie bornée de U. Comme la suite $(f_n(x_0))$ converge vers une limite l par hypothèses, la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers $f = \tilde{f} + l$, la convergence étant uniforme sur toute partie bornée de U.

Reste à prouver la différentiabilité de f (ainsi que $df = g$). On a

$$|f(x+h) - f(x) - g(x).h| \leq |f(x+h) - f(x) - f_p(x+h) + f_p(x)| + \\ + |f_p(x+h) - f_p(x) - df_p(x).h| + |(df_p(x) - g).h| \, .$$

Soit ϵ arbitrairement petit; pour p assez grand, on peut réaliser

$$|(df_h(x) - g).h| \leq \sup_{x \in U} \|df_p(x) - g(x)\|_{E,F} \|h\| \leq \epsilon \|h\|$$

(hypothèse 23.2). On a aussi. grâce aux accroissements, finis, pour $\tilde{p}$ et $\tilde{q}$ assez grands

$$|f_{\tilde{p}}(x+h) - f_{\tilde{p}}(x) - f_{\tilde{q}}(x+h) + f_{\tilde{q}}(x)| \leq \sup_U \|df_{\tilde{p}} - df_{\tilde{q}}\|_{E,F} \|h\| \leq \epsilon \|h\| \, .$$

En fixant $\tilde{p} = p$ (ce qui nécessite éventuellement d'améliorer le choix de p) et en laissant courir $\tilde{q}$ vers l'infini, on obtient, pour ce choix de p

$$|f(x+h) - f(x) - f_p(x+h) + f_p(x)| \leq \epsilon \|h\| \, .$$

Il suffit dès lors, <u>une fois que p est ainsi fixé</u>, d'utiliser la différentiabilité de f_p en x pour affirmer qu'il existe η tel que

$$\|h\| \leq \eta \Longrightarrow |f_p(x+h) - f_p(x) - df_p(x).h| \leq \epsilon \|h\| \, .$$

On a donc ainsi, pour $\|h\| \leq \eta$,

$$|f(x+h) - f(x) - g(x).h| \leq \epsilon \|h\| \, ,$$

d'où

$$f(x+h) = f(x) + g(x).h + \mathbf{o}(\|h\|) \, .$$

Ceci achève la preuve de notre théorème. $\diamondsuit$

Remarque 23.3. Si U est connexe (et non plus connexe) et si la suite $(f_n)_n$ satisfait les hypothèses du théorème, on peut vérifier que l'ensemble des points de x oú la suite $(f_n(x))$ converge est un ouvert-fermé de U; comme cet ouvert est non vide ($x_0 \in U$), on en déduit que la suite (f_n) converge simplement vers une fonction différentiable f, avec $df = g$, et que tout point de U possède un voisinage dans lequel la convergence est uniforme. On peut même affaiblir les hypothèses en supposant que tout point de U a un voisinage dans lequel la convergence de df_n vers g est uniforme (au lieu de supposer la convergence uniforme sur tout U).

24. Différentielles du second ordre.

Soient E et F deux espaces normés et f une fonction définie sur un ouvert U de E, à valeurs dans F, et différentiable dans un voisinage $V(x_0)$ d'un point x_0 de U. On dira que f est *deux fois différentiable* en x_0 si l'application

$$x \mapsto df(x) : \; V(x_0) \mapsto \mathcal{L}(E, F)$$

est différentiable en x_0. Ceci signifie qu'il existe une application

$$D^2 f(x_0) \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F))$$

telle que, pour $h \in E$ de norme suffisamment petite, on ait, dans l'espace vectoriel normé $\mathcal{L}(E, F)$,

$$df(x_0 + h) = df(x_0) + D^2 f(x_0).h + \mathbf{o}(\|h\|) \, .$$

Ceci signifie aussi que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ avec

$$\|h\| \leq \eta \Longrightarrow \forall k \in E, \; |df(x_0 + h).k - df(x_0).k - (D^2 f(x_0).h).k| \leq \epsilon |k| \, .$$

Comme nous l'avons rappelé dans la section 21, il existe une isométrie naturelle entre l'espace $\mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F))$ et l'espace des applications bilinéaires continues de $E \times E$ dans F: il y a correspondance entre l'application:

$$T : \; E \mapsto \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F))$$

et l'application bilinéaire

$$B : \; E \times E \mapsto F, \; (h, k) \mapsto T(h).k \, .$$

Ainsi, dire que f admet une différentielle seconde au point x_0, c'est aussi dire qu'il existe une application $D^2 f(x_0)$ (par souci de commodité, nous conserverons les mêmes notations que précédemment) bilinéaire et continue de $E \times E$ dans F, et telle que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$, avec

$$\|h\| \leq \eta \Longrightarrow \forall k \in E, \; |df(x_0 + h).k - df(x_0).k - (D^2 f(x_0).(h, k)| \leq \epsilon |k| \, .$$

Remarquons que, si k est fixé dans E, alors

$$h \mapsto D^2 f(x_0).(h, k)$$

est alors la différentielle en x_0 de l'application

$$x \mapsto df(x).k, \; E \mapsto F,$$

ce qui nous ramène, en ce qui concerne le calcul d'une différentielle seconde en un point, si elle existe, au même cadre que le cadre dans laquelle on se placait pour le calcul de la différentielle d'ordre 1, celui des applications d'un ouvert de E dans F. Comme on a aussi

$$D^2 f(x_0).(h,k) = \lim_{t\mapsto 0} \frac{df(x_0+th).k - df(x_0).k}{t} \tag{24.1}$$

et que

$$df(x_0+th).k = \lim_{\tau\mapsto 0} \frac{f(x_0+th+\tau k) - f(x_0+th)}{\tau}\,, \tag{24.2}$$

on a, en combinant (24.1) et (24.2)

$$D^2 f(x_0).(h,k) = \frac{d}{dt}\,\frac{d}{d\tau} f_{x_0,h,k}(t,\tau)$$

où

$$f_{x_0,h,k}(t,\tau) := f(x_0+th+\tau k)\,.$$

En fait, nous pouvons dire plus concernant la forme bilinéaire $D^2 f(x_0)$ lorsqu'elle existe.

Lemme 24.1 (lemme de Schwarz). *Soient E et F deux espaces vectoriels normés, x_0 un point de E, f une fonction définie et différentiable dans un voisinage $V(x_0)$ de x_0. Si f est deux fois différentiable au point x_0, on a*

$$\forall h,k\in E,\ D^2 f(h,k) = D^2 f(k,h)\,.$$

Preuve. Supposons que l'on ait pu montrer que, lorsque h,k sont voisins de 0 dans E,

$$f(x_0+h+k) - f(x_0+h) - f(x_0+k) + f(x_0) - D^2 f(x_0).(h,k) = \mathbf{o}(\|h\|^2 + \|k\|^2)\,. \tag{24.3}$$

Alors, on a

$$\begin{aligned} D^2 f(x_0).(h,k) &= \lim_{t\mapsto 0} \frac{f(x_0+th+tk) - f(x_0+th) - f(x_0+tk) + f(x_0)}{t^2} = \\ &= \lim_{t\mapsto 0} \frac{f(x_0+tk+th) - f(x_0+tk) - f(x_0+th) + f(x_0)}{t^2} = D^2 f(x_0).(k,h) \end{aligned}$$

et le tour est joué. On doit donc prouver (24.3). Fixons momentanément h (de norme assez petite) et considérons la fonction

$$\xi \mapsto G_h(\xi) := f(x_0+h+\xi) - f(x_0+h) - f(x_0+\xi) + f(x_0) - (D^2 f(x_0).(h,\xi)$$

(définie pour ξ de norme assez petite). Cette fonction est différentiable comme composée de fonctions différentiables et l'on a, grâce à la chain-rule (proposition 22.1),

$$\begin{aligned} &dG_h(\xi) = df(x_0+h+\xi) - df(x_0+\xi) - D^2 f(x_0).h \\ &= (df(x_0+h+\xi) - df(x_0) - D^2 f(x_0).(h+\xi)) - (df(x_0+\xi) - df(x_0) - D^2 f(x_0).\xi)\,. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que

$$df(u) - df(x_0) - D^2 f(x_0).u = \mathbf{o}(\|u\|)$$

(puisque f est deux fois différentiable en x_0), on a l'estimation suivante, dès que h et k sont de norme assez petite:

$$\sup_{\xi \in [0,k]} \|dG_h(\xi)\|_{E,F} = \mathbf{o}(\|h\| + \|k\|)\,.$$

Puisque $G_h(0) = 0$, on a, en utilisant l'inégalité des accroissements finis,

$$|G_h(k)| \leq \|k\| \mathbf{o}(\|h\| + \|k\|) = \mathbf{o}(\|h\|^2 + \|k\|^2),$$

ce qui achève la preuve de (24.3) et donc de notre lemme. $\diamondsuit$

Dans le cas où $E = \mathbf{R}^n$ et $F = \mathbf{R}$, on sait qu'une forme bilinéaire symétrique B sur $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ se représente grâce à une matrice symétrique A, comme

$$B(x,y) =< Ax, y >=< x, Ay >= (x_1, ..., x_n)\, A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\,.$$

Si une fonction f définie au voisinage de $x_0 \in \mathbf{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$ est deux fois différentiable en x_0, la matrice réelle symétrique $\mathrm{Hess}\,(f; x_0)$ étant celle qui représente la forme bilinéaire $D^2 f(x_0)$ est appelée *Matrice Hessienne* de f en x_0. On sait qu'une propriété importante d'une matrices réelle symétrique est le fait que l'on puisse trouver une base orthonormée de $\mathbf{R}^n$ dans laquelle elle soit diagonalisable. Nous verrons plus loin comment cette propriété sera intéressante pour l'étude locale des fonctions (problèmes d'extréma ou de points-selle). La matrice Hessienne est la matrice dont le terme général est

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0),\ 1 \leq i, j \leq n\,.$$

Si E est structuré en espace produit $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ et F est quelconque, on peut encore parler de matrice Hessienne: il s'agit alors d'une matrice symétrique constituée de blocs, le bloc en position (i, j) étant

$$d_i d_j f(x_0) \in \mathcal{B}(E_1 \times E_2, F)\,.$$

La formule

$$D^2 f(x_0).(h_1, \ldots, h_n) = (h_1, ..., h_n)\, \mathrm{Hess}\,(f; x_0) \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

reste valable, avec la convention

$$h_i.d_i d_j f(x_0).h_j := d_i d_j (h_i, h_j)\,.$$

25. Différentielles d'ordre supérieur.

On peut envisager la définition des différentielles d'ordre supérieur, selon le principe suivant:

Définition 25.1. *Soient E et F deux espaces normés et f une fonction définie sur un ouvert U de E, à valeurs dans F. Soit k un entier ($k \geq 2$) et x_0 un point de U. On dit que f est k fois différentiable en x_0 si f est différentiable dans un voisinage V_1 de x_0, $x \mapsto df(x)$ est différentiable dans un voisinage $V_2 \subset V_1$ de x_0, de différentielle $x \mapsto D^2 f(x)$, ..., $x \mapsto D^l f(x)$ est différentiable dans un voisinage $V_{l+1} \subset V_l$ de x_0,..., $x \mapsto D^{k-1} f(x)$ (définie dans V_k) est différentiable au point x_0.*

Remarque 25.1 Comme nous l'avons indiqué dans cette définition, nous noterons $x \mapsto D^l f(x)$ les différentielles successives. Par le principe inhérent à la notion de différentiation, $D^2 f(x)$ est, à x fixé, dans $\mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F))$, $D^3 f(x)$ dans $\mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F)))$, $D^4 f(x)$ dans $\mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F))))$, etc... On peut en fait considérer $D^l f(x)$, $l = 2, ..., k-1$, $x \in V_l$, comme une application l- linéaire de $E \times \cdots \times E$ (l fois) dans F, l'action étant la suivante:

$$D^l f(x).(h_1, \ldots, h_l) = ((...((D^f(x).h_1).h_2)...).h_{l-1}).h_l\,. \tag{25.1}$$

Il résulte immédiatement du lemme 24.1 que, dès que f est différentiable k fois en x_0, pour chaque l entre 2 et $k-1$, pour tout $x \in V_l$, $D^l f(x)$ <u>est une application l-linéaire symétrique</u>, ce qui signifie

$$D^l f(x).(h_1, ..., h_l) = D^l f(x).(h_{\sigma(1)}, ..., h_{\sigma(l)})$$

pour toute permutation σ de l'ensemble $\{1, ..., l\}$. De même, $D^k f(x_0)$ est aussi symétrique, soit

$$D^k f(x_0).(h_1, ..., h_k) = D^k f(x_0).(h_{\sigma(1)}, ..., h_{\sigma(k)}),$$

pour tout σ dans le groupe symétrique $\mathcal{S}_k$.

D'autre part, toujours si f est différentiable k fois en x_0 et avec les voisinages V_l, $l = 1, ..., k-1$ définis dans l'énoncé de la définition 25.1, on a, par itération des formules (24.1) et (24.2), les deux faits suivants:

• pour tout l entre 2 et $k-1$, pour tout x dans V_l

$$D^l f(x).(h_1, ..., h_l) = \frac{d}{dt_1} \cdots \frac{d}{dt_l}\, f(x + t_1 h_1 + \cdots + t_l h_l) \tag{25.2}$$

• au point x_0,

$$D^k f(x_0).(h_1, ..., h_k) = \frac{d}{dt_1} \cdots \frac{d}{dt_k}\, f(x + t_1 h_1 + \cdots + t_k h_k) \tag{25.3}$$

(l'ordre étant indifférent dans ces deux formules puisque les applications multilinéaires dans les membres de gauche sont symétriques).

Examinons maintenant ce qui se passe lorsque l'espace E est structuré en espace produit, soit $E = E_1 \times \cdots \times E_n$. Dans ce cas, on sait qu'étant donnée une fonction de E dans F définie dans un ouvert U de E, on peut définir (voir section 21) la notion de <u>différentiabilité partielle</u> relativement aux divers espaces de coordonnées E_j. Il est possible d'itérer cette construction et de définir la notion de différentiabilité partielle à l'ordre supérieur. Ici le formalisme est un peu lourd à gérer et les définitions sont basées sur une induction récurrente.

Définition 25.2. *Soit $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ un espace vectoriel normé structuré en produit et F un autre espace vectoriel normé. Soient $(i_1, ..., i_k)$ k éléments de $\{1, ..., n\}$ (non nécessairement distincts!). Soit f une fonction de E dans F, définie dans un ouvert U de E, et x_0 un point de E. On dira que f admet une différentielle partielle à l'ordre k suivant les espaces de coordonnées E_{i_1},...,E_{i_k}, différentielle que l'on notera $D_{i_1} \cdots D_{i_k} f(x_0)$, si f admet une différentielle partielle à l'ordre $k-1$ suivant les espaces de coordonnées E_{i_2},...,E_{i_k} en tout point d'un voisinage V de x et si l'application*

$$x \mapsto D_{i_2} \cdots D_{i_k} f(x)$$

admet une dérivée partielle

$$D_{i_1}[D_{i_2} \cdots D_{i_k} f](x_0) = D_{i_1} \cdots D_{i_k} f(x_0)$$

suivant la i_1-coordonnée au point x_0.

Ce procédé récurrent, tant qu'il s'applique, nous permet de définir des objets

$$D_{i_1} \cdots D_{i_l} f(x_0),\ l \in \mathbf{N},$$

où, par construction

$$D_{i_1} \cdots D_{i_l} f(x_0) \in \mathcal{L}(E_{i_1}, \mathcal{L}(E_{i_2}, \mathcal{L}(\ldots, F)\ldots))$$

(si toutefois l'induction récurrente peut se poursuivre jusqu'à pouvoir définir cet objet). À l'ordre 1, les objets que l'on définit ainsi sont les dérivées partielles de la section 21:

$$D_j f(x_0) = d_j f(x_0) \in \mathcal{L}(E_j, F),\ j = 1, ..., n\,.$$

À l'ordre 2, ce sont les $d_i d_j$ déjà introduits lorsque f est supposée 2 fois différentiable en x_0

$$D_i D_j f(x_0) = d_i d_j f(x_0)\,.$$

On peut aussi considérer $D_{i_1} \cdots D_{i_l} f(x_0)$ (lorsque l'induction récurrente peut se poursuivre jusqu'à pouvoir définir cet objet) comme une application

$$D_{i_1} \cdots D_{i_l} f(x_0) :\ E_{i_1} \times \ldots \times E_{i_l} \mapsto F$$

linéaire par rapport à toutes les coordonnées, avec la règle (toujours la même!)

$$D_{i_1} \cdots D_{i_l} f(x_0).(h_{i_1}, ..., h_{i_l}) = (D_{i_1}[D_{i_2} \ldots D_{i_k} f](x_0).h_{i_1}).(h_{i_2}, ..., h_{i_l})\,.$$

Attention! Il n'y a aucune raison pour que, même si tous les E_i sont égaux (à un espace normé E_0) et que l'on puisse pousser l'induction jusqu'à définir un tel objet

$$D_{i_1} \cdots D_{i_l} f(x_0),$$

il corresponde à une application bilinéaire symétrique de E_0^l dans F.

Cependant, si f est différentiable à l'ordre k en un point x_0 de $E = E_1 \times \cdots \times E_n$, le raisonnement qui nous a conduit dans le cas $k = 1$ à l'existence de dérivées partielles et aux formules (21.9) et (21.10) peut s'itérer et on a alors la

Proposition 25.1. *Soient $E_1, ..., E_n, F$, $n+1$ espaces vectoriels normés, U un ouvert de E, f une application de U dans F et x_0 un point de U. Si f est k-fois différentiable en x_0, alors toutes les dérivées partielles $D_{i_1} \dots D_{i_k} f(x_0)$, $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n$ existent et on a, si $h^j = (h^j_1, ..., h^j_n) \in E = E_1 \times \cdots \times E_n$, $j = 1, ..., k$,*

$$D^k f(x_0).(h^1, ..., h^k) = \sum_{i_1=1}^{n} \dots \sum_{i_k=1}^{n} D_{i_1} \cdots D_{i_k} f(x_0).(h^1_{i_1}, ..., h^k_{i_k}) \tag{25.4}$$

ainsi que les formules inverses: pour tout k-uplet $(i_1, ..., i_k)$ d'éléments de $\{1, ..., n\}$ (distincts ou non), pour tout $h_{i_1} \in E_{i_1}$,..., pour tout $h_{i_k} \in E_{i_k}$,

$$\begin{aligned} &D_{i_1} \cdots D_{i_k} f(x_0).(h_{i_1}, \dots, h_{i_k}) = \\ &= D^k f(x_0).((0, ..., 0, \overset{i_1}{h_{i_1}}, 0, \dots, 0), \dots, (0, ..., 0, \overset{i_k}{h_{i_k}}, 0, \dots, 0)) \,. \end{aligned} \tag{25.5}$$

Preuve. Elle se réduit à l'itération de l'argument utilisé pour la preuve des formules 21.9 et 21.10. $\diamondsuit$

Dans le cas particulier où tous les E_j sont égaux (à un espace normé E_0), le lemme de Schwarz, couplé avec les formules (25.5), nous permet de remarquer que les $D_{i_1} \cdots D_{i_k} f(x_0)$ sont des formes symétriques, ce qui nous permet de regrouper les termes dans la formule (25.4) lorsque tous les h^j sont égaux à un élément $h = (h_1, ..., h_n)$. On obtient alors dans ce cas

$$D^k f(x_0).(h, ..., h) = \sum_{\substack{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = k \\ \alpha_j \in \mathbf{N}}} \frac{k!}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!} D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n} f(x_0).(h^{(\alpha_1, ..., \alpha_n)}) \tag{25.6}$$

où $h^{(\alpha_1, ..., \alpha_n)}$ est par définition l'élément de E_0^k obtenu en répétant α_1 fois h_1,...,α_n fois h_n. On obtient l'action de la différentielle en polarisant les formules (25.6), soit, pour $h^1, ..., h^k$ dans E_0,

$$D^k f(x_0).(h^1, ..., h^k) = \frac{1}{2^k k!} \sum_{\epsilon_1 = \pm 1, ..., \epsilon_k = \pm 1} D^k f(x_0).\Big(\sum_{j=1}^{k} \epsilon_j h^j, \dots, \sum_{j=1}^{k} \epsilon_j h^j\Big) \,. \tag{25.7}$$

Lorsque $E = \mathbf{R}^n$, on trouve ainsi, en appliquant (25.6), que

$$D^k f(x_0).(h, ..., h) = \sum_{\substack{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = k \\ \alpha_j \in \mathbf{N}}} \frac{k!}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} (x_{01}, ..., x_{0n}) h_1^{\alpha_1} \cdots h_n^{\alpha_n} \,. \tag{25.8}$$

Ceci achève notre preuve. $\diamondsuit$

Revenons au cas où E est un espace structuré en produit $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ avec les E_j cette fois non nécessairement égaux. Si l'existence de différentielles partielles (au voisinage d'un point x_0 de $E_1 \times \cdots \times E_n$), et ce jusqu'à l'ordre k, ne suffit pas (et de loin!) à assurer la différentiabilité jusqu'à l'ordre k au point x_0 (c'est même faux si $k = 1$), le théorème 23.2 passe aussi au cran k.

Proposition 25.2. *Soient* $E_1, \ldots, E_n, F$, $n+1$ *espaces vectoriels normés, et* f *une application d'un ouvert* U *de* $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ *dans* F. *Soit* k *un entier supérieur ou égal à* 1.
• *Si* f *admet des dérivées partielles* $D_{i_1}...D_{i_l}f(x)$, $1 \leq l \leq k$, $1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_l \leq n$ *en tout point de* U *et si toutes les applications*

$$x \in U \mapsto D_{i_1}...D_{i_k}f(x),\ 1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n,$$

sont continues en un point $x_0 \in U$, *alors* f *est* k *fois différentiable en ce point.*
• *Si* f *admet des dérivées partielles* $D_{i_1}...D_{i_l}f(x)$, $1 \leq l \leq k$, $1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_l \leq n$ *en tout point de* U *et si les applications*

$$x \in U \mapsto D_{i_1}...D_{i_k}f(x),\ 1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n,$$

sont toutes continues, alors f *est* k*-fois continuement différentiable dans* U.

Preuve. C'est une répétition inductive de la preuve du théorème 23.2. ♢

Cette proposition 25.2 motive la

Définition 25.2. *Soient* E *et* F *deux espaces vectoriels normés et* U *un ouvert de* E. *On dit qu'une application* f *de* U *dans* F *est de classe* C^k *dans* U $(k \in \mathbf{N})$ *si* f *est différentiable jusqu'à l'ordre* k *en tout point de* U *et si l'application*

$$x \mapsto D^k f(x)$$

est continue sur U *(par convention* $D^0 f = f, D^1 f = df$*). On dit que* f *est de classe* C^∞ *sur l'ouvert* U *si* f *est indéfiniment différentiable sur* U *(inutile ici de préciser continuement puisque c'est automatique).*

Exemple 25.1 (fondamental). Si U est un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et k un entier supérieur ou égal à 1, f est de classe C^k sur U si et seulement si toutes les dérivées partielles

$$x \mapsto \frac{\partial^l f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}},\ l = 1, ..., k,\ \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = l$$

existent en tout point et sont continues comme applications de U dans F. Ceci vaut bien sûr pour les applications définies dans un ouvert de $\mathbf{C}^n$, à valeurs dans un $\mathbf{R}$-espace normé ($\mathbf{C}^n$ est muni de sa structure de $\mathbf{R}$-espace vectoriel isomorphe à $\mathbf{R}^{2n}$).

Terminons cette section en énoncant ce qui devrait être le substitut du théorème 23.3, concernant les suites d'applications k fois différentiables.

Proposition 25.3. *Soient* E *un espace vectoriel normé,* F *un espace de Banach, et* U *un ouvert convexe de* E *(au sens où si* a *et* b *sont deux points de* U, *le segment* $[a, b]$ *est tout entier dans* U*). Soit* $(f_n)_n$ *une suite de fonctions de* U *dans* F, k *fois différentiables en tout point de* U. *On suppose*
• *Il existe un point* x_0 *de* U *telle que toutes les suites* $(D^l f_n(x_0))_n$, $l = 0, ..., k-1$, *convergent dans* F *(ou soient de Cauchy, ce qui est la même chose car* F *est un Banach).*

• *La suite des applications $D^k f_n : U \mapsto \mathcal{L}(E,F)$ converge uniformément vers une application g de U dans $\mathcal{L}(E,F)$, ce qui signifie*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbf{N},\ n \geq N \Longrightarrow \sup_{x \in U} \|D^k f_n(x) - g(x)\|_{E,F} \leq \epsilon\,.$$

Alors, il existe une fonction $f : U \mapsto F$, telle que la suite f_n converge simplement vers f sur U, uniformément sur toute partie bornée de U; de plus la fonction f est k-fois différentiable en tout point de U et l'on a $D^k f(x) = g(x)$ pour tout $x \in U$.

Preuve. Il s'agit, ici encore, de l'itération du résultat au cran 1, qui lui n'est rien d'autre ici que le théorème 23.3. $\diamondsuit$

26. Formules de Taylor.

Si E et F sont deux espaces vectoriels normés, le fait qu'une fonction f de U dans F (où U est un ouvert de E) est différentiable en un point x_0 de U s'énonce sous la forme:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + df(x_0).h + \mathbf{o}(\|h\|)$$

et permet donc de préciser le comportement local de f au voisinage du point x_0 (en disant que f *colle* près de x_0 à une application affine de E dans F, à savoir l'application

$$x \mapsto f(x_0) + df(x_0).(x - x_0)\Big).$$

Il est naturel de penser qu'une information plus riche (le fait que f soit différentiable à l'ordre k en x_0, avec $k > 1$) nous donne plus de précisions sur la manière dont f colle à cette application affine. C'est exactement ce qui apparait avec la première formule de Taylor, dite de Taylor-Young:

Théorème 26.1 (formule de Taylor-Young). *Soient E, F, deux espaces vectoriels normés, U un ouvert de E, f une application de U dans F et x_0 un point de U. Si f est k-fois différentiable en x_0, alors, on a, au voisinage de 0,*

$$f(x_0 + h) = \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{l!} D^l f(x_0).\, \overbrace{(h, ..., h)}^{l \text{ fois}} + \mathbf{o}(\|h\|^k) \tag{26.1}$$

(par souci d'unification des notations, on a noté $Df(x_0) := df(x_0)$).

Remarque 26.1. Il faut prendre garde au fait suivant: le fait qu'il existe une collection d'applications $a_1, ..., a_k$, avec a_l multilinéaire continue de E^l dans F et

$$f(x_0 + h) = \sum_{l=0}^{k} a_l\, \overbrace{(h, ..., h)}^{l \text{ fois}} + \mathbf{o}(\|h\|^k)$$

(on dit encore que f admet un développement limité à l'ordre k en x_0) n'implique pas (sauf si $k = 1$) la différentiabilité à l'ordre k en x_0. Pour preuve, la fonction

$$f :\ t \in \mathbf{R} \mapsto \begin{cases} t^3 \sin(1/t^2),\ t \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

satisfait $f(h) = \mathbf{o}(|h|^2)$ et a une dérivée première nulle en 0 et discontinue en ce point (la fonction oscille de plus en plus vite lorsque l'on approche de $t = 0$ et par conséquent la pente de la tangente en $(t, f(t))$ ne saurait rester bornée).

Preuve. On prouve le résultat par récurrence sur k, après avoir remarqué que pour $k = 1$, il s'agit uniquement de la définition de la différentiabilité. Fixons $k \geq 2$ et donnons nous f k fois différentiable en x_0. Alors $x \mapsto df(x)$ est $k-1$ fois différentiable en x_0 et l'hypothèse inductive (que nous faisons ici) nous permet d'affirmer que, pour h' voisin de 0,

$$df(x_0 + h') = \sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{l!} D^l(df)(x_0).(h', ..., h') + \mathbf{o}(\|h'\|^{k-1}).$$

Ceci s'écrit encore, si l'on teste sur un élément quelconque $h'' \in E$,

$$df(x_0 + h').h'' = \sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{l!}[D^l(df)(x_0).(h', ..., h')].h'' + \mathbf{o}(\|h'\|^{k-1}).h'' \,. \tag{26.2}$$

Posons maintenant, toujours pour ξ voisin de 0,

$$G(\xi) = f(x_0 + \xi) - \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{l!} D^l f(x_0). \overbrace{(\xi, ..., \xi)}^{l \text{ fois}} \,.$$

Cette fonction G est différentiable (au voisinage de 0) et sa différentielle agit sur un élément h'' de E par

$$\begin{aligned} dG(\xi).h'' &= df(x_0 + \xi).h'' - \sum_{l=1}^{k} \frac{l}{l!}[D^l f(x_0). \overbrace{(\xi, ..., \xi)}^{l-1 \text{ fois}}].h'' = \\ &= df(x_0 + \xi).h'' - \sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{l!}[D^l(df)(x_0). \overbrace{(\xi, ..., \xi)}^{l \text{ fois}}].h'' \,. \end{aligned}$$

En utilisant (26.2), il vient, pour ξ voisin de 0,

$$\|dG(\xi)\| = \mathbf{o}(\|\xi\|^{k-1})$$

et par conséquent, pour h voisin de 0,

$$\sup_{[0,h]} \|dG(\xi)\| = \mathbf{o}(\|h\|^{k-1}) \,.$$

Or, grâce à l'inégalité des accroissements finis,

$$|G(h) - G(0)| = |G(h)| \leq \|h\| \mathbf{o}(\|h\|^{k-1}) = \mathbf{o}(\|h\|^k) \,.$$

Avec la définition de G, ceci prouve bien (26.1). $\diamondsuit$

L'autre formule de Taylor introduite en premier cycle est celle que soutend non plus la définition de la différentiabilité, mais la formule des accroissements finis: si f est une fonction définie sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbf{R}$, à valeurs réelles (cela est très important), dérivable jusqu'à l'ordre k sur $[a,b]$, ceci sous entendant qu'en a (resp. en b) il y seulement dérivabilité à droite (resp. à gauche), et dérivable $k+1$ fois sur $]a,b[$, alors il existe $\theta \in]a,b[$, avec

$$f(b) = \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{l!} f^{(l)}(a)(b-a)^l + \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\theta)(b-a)^{k+1} \,. \tag{26.3}$$

Cette formule est la formule de Taylor-Lagrange et se transpose immédiatement au contexte du calcul différentiel pourvu (et cela est essentiel) que l'espace F soit $\mathbf{R}$. On a le

Théorème 26.2 (formule de Taylor-Lagrange, version réelle). *Soit E un espace vectoriel normé, U un ouvert de E, f une application de U dans $\mathbf{R}$ et a, b deux points de U tels que le segment $[a,b]$ soit dans U. Si f est k fois différentiable sur U et $k+1$ fois différentiable en tout point de $]a,b[$, il existe alors $\theta \in]0,1[$ tel que*

$$f(b) = \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{l!} D^l f(a).\,(\overbrace{b-a,...,b-a}^{l \text{ fois}}) + \frac{1}{(k+1)!} D^{k+1} f(a+\theta(b-a)).\,(\overbrace{b-a,...,b-a}^{k+1 \text{ fois}}) \,. \tag{26.4}$$

Preuve. Il suffit de considérer l'application de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ définie par

$$\varphi(t) := f(a+t(b-a)).$$

La chain-rule (proposition 22.1) nous assure que φ est dérivable, avec

$$\varphi'(t) = df(a+t(b-a)).(b-a)\,.$$

On peut continuer et par récurrence, montrer que φ est k fois dérivable sur $[0,1]$, avec

$$\varphi^{(l)}(t) = D^l(a+t(b-a)).\,(\overbrace{b-a,...,b-a}^{l \text{ fois}}) \,.$$

De plus, φ est $k+1$ fois dérivable sur $]0,1[$, avec

$$\varphi^{(k+1)}(t) = D^{k+1}(a+t(b-a)).\,(\overbrace{b-a,...,b-a}^{k+1 \text{ fois}}) \,.$$

La formule de Taylor-Lagrange classique (26.3) rappelée plus haut nous permet de conclure. $\diamondsuit$

Si l'espace d'arrivée n'est plus $\mathbf{R}$, on peut malgré tout sauver les meubles en se souvenant que, si la formule des accroissements finis est fausse, l'inégalité subsiste. Ceci nous donne le

Théorème 26.3 (formule de Taylor-Lagrange, version générale). *Soit E, F deux espace vectoriels normés, U un ouvert de E, f une application de U dans F et a, b deux points de U tels que le segment $[a, b]$ soit dans U. Soit f une fonction k différentiable sur U et $k+1$ fois différentiable en tout point de $]a, b[$. On a alors*

$$|f(b) - \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{l!} D^l f(a).\, (\overbrace{b-a, ..., b-a}^{l \text{ fois}})\,| \leq \frac{1}{(k+1)!} \|b-a\|^{k+1} \sup_{x \in]a,b[} \|D^{k+1} f(x)\|\,. \quad (26.5)$$

Preuve. Cette formule est l'extension naturelle de l'inégalité des accroissements au cadre des fonctions $k+1$ différentiables. On introduit la fonction φ de $[0, 1]$ dans F définie comme précédemment par

$$\varphi(t) = f(a + t(b-a)).$$

Soit aussi ψ la fonction de $[0, 1]$ dans F définie par

$$\psi(t) := \sum_{l=0}^{k} \frac{\varphi^{(l)}(t)(1-t)^l}{l!}\,.$$

La chain-rule nous assure que ψ est dérivable sur $]0, 1[$, de dérivée

$$\psi'(t) = \frac{1}{k!}(1-t)^k \varphi^{(k+1)}(t) = \frac{1}{k!}(1-t)^k D^{k+1}(a + t(b-a)).\, (\overbrace{b-a, ..., b-a}^{k+1 \text{ fois}})\,.$$

Si σ est la fonction de $[0, 1]$ dans $\mathbf{R}$ définie par

$$\sigma(t) := -\|b-a\|^{k+1} \sup_{x \in]a,b[} \|D^{k+1} f(x)\| \frac{(1-t)^{k+1}}{(k+1)!}$$

(on suppose que $D^{k+1} f$ est borné sur $]a, b[$ sinon (26.5) n'est guère intéressante!), on a

$$|\psi'(t)| \leq \sigma'(t),\ t \in]0, 1[,$$

et l'on peut utiliser notre variante des accroissements finis (remarque 23.2) pour conclure

$$|\psi(1) - \psi(0)| \leq \sigma(1) - \sigma(0) = \frac{1}{(k+1)!} \|b-a\|^{k+1} \sup_{x \in]a,b[} \|D^{k+1} f(x)\|\,.$$

C'est exactement l'inégalité voulue. $\diamondsuit$

Dans le cas particulier où F est un espace de Banach, on dispose d'un atout supplémentaire: on sait intégrer (au sens de Riemann) les fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbf{R}$ et à valeurs dans F. En effet, on sait définir l'intégrale des fonctions de la forme $t \mapsto \chi_{\xi_1, \xi_2; y}(t) := \chi_{[\xi_1, \xi_2]}(t) y$, $a \leq \xi_1 \leq \xi_2 \leq b$, $y \in F$. Il est logique en effet de définir

$$\int_a^b \chi_{\xi_1, \xi_2; y}(\xi) d\xi = (\xi_2 - \xi_1) y\,.$$

Si $\mathcal{F}^b([a,b],F)$ est l'espace des fonctions bornées de $[a,b]$ dans F, que l'on peut donc équiper de la norme de la convergence uniforme, et A le sous espace de $\mathcal{F}^b([a,b],F)$ engendré par les $\chi_{\xi_1,\xi_2;y}$, $a \leq \xi_1 \leq \xi_2 \leq b$, $y \in F$, on peut prolonger par linéarité notre définition de l'intégrale et donner un sens à

$$\int_a^b f(t)dt$$

lorsque $f \in A$. Pour $f_1, f_2 \in A$, on a

$$|\int_a^b f_1(\xi)d\xi - \int_a^b f_2(\xi)d\xi| \leq (b-a) \sup_{\xi \in [a,b]} |f_1(\xi) - f_2(\xi)|\,,$$

ce qui prouve que l'application $f \mapsto \int_a^b f(\xi)d\xi$ ainsi étendue est une application uniformément continue de A (équipé de la norme de la convergence uniforme). D'après le lemme 8.1 (c'est ici que nous sert le fait que F est complet), on sait étendre l'opérateur

$$f \mapsto \int_a^b f(t)dt$$

à l'adhérence dans $\mathcal{F}^b([a,b],F)$ (pour la norme de la convergence uniforme) de A. Or cette adhérence $\overline{A}$ contient l'espace des fonctions continues, car toute fonction continue de $[a,b]$ dans F est uniformément continue (théorème de Heine 5.2) et s'approche donc uniformément par une suite de fonctions *constantes par morceaux* (mais toujours à valeurs dans F bien sûr). On peut donc prolonger l'intégrale aux fonctions continues et définir

$$\int_a^b f(\xi)d\xi$$

lorsque f est une fonction continue de $[a,b]$ dans F. On montre que l'intégrale étendue satisfait, pour tout $t \in [a,b]$,

$$\lim_{\substack{\tau \mapsto 0,\, \tau \neq 0 \\ t+\tau \in [a,b]}} \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} f(\xi)d\xi = f(t)\,,$$

ce qui nous montre que si f est continue de $[a,b]$ dans F, la fonction

$$t \mapsto \int_a^t f(\xi)d\xi$$

est dérivable sur $[a,b]$ (à droite en a, à gauche en b), de dérivée f. Ceci prouve aussi que si f et g sont continuement dérivables sur $[a,b]$,

$$\int_a^b f'(\xi)g(\xi)d\xi = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(\xi)g'(\xi)d\xi \qquad (26.6)$$

(formule d'intégration par parties). On a alors, dans ce contexte (E normé, F Banach) le

Théorème 26.4 (formule de Taylor avec reste intégral). *Soit E un espace normé, F un espace de Banach, U un ouvert de E, a et b deux points de U avec $[a,b] \subset U$, et f une application de classe C^{k+1} dans U. Alors*

$$\begin{aligned} & f(b) - \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{l!} D^l f(a).\,(\overbrace{b-a,\dots,b-a}^{l \text{ fois}}) = \\ & = \frac{1}{k!} \int_0^1 (1-t)^k D^{k+1} f(a+t(b-a)).\,(\overbrace{b-a,\dots,b-a}^{k+1 \text{ fois}})\, dt\,. \end{aligned} \tag{26.7}$$

Preuve. Il suffit de reprendre la preuve du théorème 26.3 (avec les mêmes ingrédients), mais d'utiliser cette fois la formule

$$\psi(1) - \psi(0) = \int_0^1 \psi'(t)dt,$$

valable car ψ est continuement différentiable sur $[0,1]$ (cas particulier de (26.6)). On obtient exactement la formule voulue. $\diamondsuit$

Les développements de Taylor, comme pour les fonctions numériques, sont des outils intéressants pour envisager l'étude locale des phénomènes. Donnons deux exemples, et tout d'abord deux définitions, concernant les fonctions à valeurs dans $\mathbf{R}$, l'une locale, l'autre globale, toutes les deux très importantes en théorie de l'optimisation.

Définition 26.1. *Soit f une fonction définie au voisinage d'un point x_0 d'un espace vectoriel normé, et à valeurs dans $\mathbf{R}$. On dit que f présente un extrémum local en x_0 si on a, soit $f \le f(x_0)$ dans un voisinage de x_0 (on dit alors que f présente un maximum local en x_0), soit $f \ge f(x_0)$ (on dit que f présente un minimum local en x_0). L'extrémum local est dit strict s'il existe un voisinage de x_0 où cet extrémum n'est réalisé qu'au seul point x_0.*

Définition 26.2. *Soit f une fonction définie dans un ouvert convexe U d'un espace vectoriel normé, et à valeurs dans $\mathbf{R}$. On dit que f est convexe dans U si l'on a, quelque soient a, b dans U, quelque soit $t \in [0,1]$,*

$$f(ta + (1-t)b) \le tf(a) + (1-t)f(b)\,.$$

Voici un premier élément de réponse concernant la détection des extréma locaux.

Proposition 26.1. *Soit f une fonction définie au voisinage d'un point x_0 d'un espace vectoriel normé E, à valeurs dans $\mathbf{R}$. Si f est différentiable en x_0 et présente un extrémum local en x_0, alors $df(x_0) = 0$.*

Preuve. On écrit Taylor-Young à l'ordre 1, soit

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + df(x_0).h + \mathbf{o}(\|h\|)\,.$$

Pour h assez petit, on doit avoir (puisque x_0 est un extrémum local): soit pour tout $t \in [-1,1]$, $f(x_0+th)-f(x_0) \leq 0$ (maximum local), soit toujours pour tout $t \in [0,1]$, $f(x_0+th)-f(x_0) \geq 0$ (minimum local). Plaçons nous dans le premier cas (l'autre cas est similaire) et fixons h. On a, lorsque t tend vers 0,

$$f(x_0+th)-f(x_0) = t(df(x_0).h + \mathbf{o}(1)) \leq 0,$$

ce qui donne $df(x_0).h \geq 0$ (si l'on utilise $t>0$) et $df(x_0).h \geq 0$ (si l'on utilise $t<0$). On a donc $df(x_0).h$. Comme ceci est vrai pour tout h de norme assez petite, on a $df(x_0)=0$. $\diamondsuit$

Remarque 26.1. Cette proposition permet de limiter le champ d'exploration des extrémas locaux: on doit les chercher parmi les points où $df(x_0)=0$ lorsque l'on a affaire à une fonction à valeurs réelles définie et différentiable dans un ouvert U d'un espace vectoriel normé. Cependant, il faut se méfier: la proposition 26.1 n'a pas de *retour*. Il se peut que $df(x_0)=0$ sans que f présente un extrémum en x_0; par exemple

$$f:\ \mathbf{R}^2 \mapsto \mathbf{R},\ (x,y) \mapsto x^2-y^2$$

n'a pas d'extrémum en $(0,0)$ car le graphe (dans $\mathbf{R}^3$) de cette fonction

$$\Gamma := \{(x,y,z),\ z = x^2-y^2\}$$

présente ce que l'on appelle suivant que l'on soit cavalier ou randonneur *un point selle* ou *un col* au point $(0,0,0)$.

Plus de précisions concernant le développement local en x_0 nous donne la possibilité d'éliminer encore de *faux* extrémums locaux de la liste des points retenus après application de la proposition 26.1.

Proposition 26.2. *Soit f une fonction définie au voisinage d'un point x_0 d'un espace vectoriel normé E, à valeurs dans $\mathbf{R}$. Si f est 2 fois différentiable en x_0 et présente un maximum (resp . un minimum) local en x_0, alors la forme bilinéaire symétrique*

$$(h,k) \mapsto D^2f(x_0).(h,k)$$

est négative, c'est à dire telle que $D^2f(x_0).(h,h) \leq 0$ pour tout h (resp. positive, c'est à dire telle que $D^2f(x_0).(h,h) \geq 0$ pour tout h).

Exemple 26.1. Par exemple, notre point selle de la remarque 26.1 ne sera pas retenu, car une condition nécessaire et suffisante pour qu'une forme quadratique réelle (ici en l'occurrence $h=(h_1,h_2) \mapsto D^2f(x_0,y_0).(h,h) = 2(h_1^2-h_2^2)$ est une forme quadratique sur $\mathbf{R}^2$) soit positive (resp. négative) est que les valeurs propres de sa matrice soient toutes positives (resp. toutes négatives). Ici les valeurs propres sont 2 et -2.

Preuve de la proposition 26.2. On écrit cette fois le développement de Taylor-Young à l'ordre 2 au point x_0. Cela donne, puisque l'on sait déjà que $df(x_0)=0$,

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{1}{2}D^2f(x_0).(h,h) + \mathbf{o}(\|h\|^2)\,.$$

Fixons h de norme assez petite et prenons $t \in [-1, 1]$; on a, lorsque t tend vers 0,

$$f(x_0 + th) - f(x_0) = t^2(D^2 f(x_0).(h, h) + \mathbf{o}(1)).$$

En divisant par t^2 (ce qui ne modifie pas les signes) et en faisant tendre t vers 0, on obtient bien, lorsque x_0 est un maximum local,

$$D^2 f(x_0).(h, h) = \lim_{\substack{t \mapsto 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t^2} \leq 0\,.$$

Lorsque x_0 est un minimum local,

$$D^2 f(x_0).(h, h) = \lim_{\substack{t \mapsto 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t^2} \geq 0\,.$$

La proposition est prouvée. $\diamondsuit$

Il peut bien sûr rester des cas douteux; parmi les cas retenus, on dispose d'un moyen de s'assurer que l'on a vraiment un extrémum local. C'est la

Proposition 26.3. *Soit f une fonction définie au voisinage d'un point x_0 d'un espace vectoriel normé E, à valeurs dans $\mathbf{R}$, 2 fois différentiable en x_0 et telle que $df(x_0) =$. Si la "forme quadratique"*

$$(h, h) \in E \times E \mapsto D^2 f(x_0).(h, h)$$

est positive non dégénérée (ce qui signifie qu'il existe une constante strictement positive γ telle que

$$D^2 f(x_0).(h, h) \geq \gamma \|h\|^2 \tag{26.8}$$

pour tout $h \in E$), alors f présente un minimum strict en x_0. Si cette même forme quadratique est négative non dégénérée (ce qui signifie qu'il existe une constante strictement positive γ telle que

$$D^2 f(x_0).(h, h) \leq -\gamma \|h\|^2 \tag{26.9}$$

pour tout $h \in E$), alors f présente un maximum strict en x_0. Dans le cas où $E = \mathbf{R}^n$, ces conditions sont remplies lorsque la matrice de la forme quadratique $\mathrm{Hess}\,(f; x_0)$ *a toutes ses valeurs propres strictement positives (pour (26.8)) ou toutes ses valeurs propres strictement négatives (pour (26.9)).*

Preuve. C'est immédiat; avec Taylor-Young à l'ordre 2,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{1}{2} D^2 f(x_0).(h, h) + \|h\|^2 \epsilon(h)\,.$$

Si l'on suppose par exemple (26.8), on a,pour h assez voisin de 0,

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \geq \frac{1}{2} \gamma \|h\|^2 - \|h\|^2 \epsilon(h) \geq \frac{1}{4} \gamma \|h\|^2,$$

ce qui montre bien que $f(x_0 + h) - f(x_0) > 0$ pour $h \neq 0$. $\diamondsuit$

En ce qui concerne l'hypothèse de convexité, nous avons le première caractérisation suivante:

Proposition 26.4. *Soit E un espace vectoriel normé, U un ouvert convexe de E et f une application différentiable de U dans $\mathbf{R}$. Alors f est convexe si et seulement si, pour tout couple de points (a,b) de U, on a*

$$f(b) \geq f(a) + df(a).(b-a)\,. \tag{26.10}$$

Preuve.
• Si f est convexe, on a, pour tout $t \in [0,1]$,

$$f(ta+(1-t)b) - tf(a) - (1-t)f(b) \leq 0\,.$$

Considérons la fonction de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ définie par

$$\varphi(t) := tf(b) + (1-t)f(a) - f((1-t)a+tb)\,.$$

Suivant la règle de composition, cette fonction est dérivable sur $[0,1]$, de dérivée

$$f(b) - f(a) - df((1-t)a+tb).(b-a)\,.$$

La fonction φ est nulle en $t=0$; on a donc, avec Taylor-Young,

$$\varphi(t) = \varphi'(0)t + \mathbf{o}(t)\,.$$

Si l'on avait $\varphi'(0) < 0$, on aurait, au voisinage (à droite) de $t=0$, soit pour $t>0$ assez petit

$$\frac{\varphi(t)}{t} = \varphi'(0)(1+\mathbf{o}(1))$$

et $\varphi(t)$ serait, comme $\varphi'(0)$, strictement négatif pour $t>0$ assez petit, ce qui contredit l'hypothèse de convexité. On a donc, sous cette hypothèse

$$\varphi'(0) = f(b) - f(a) - df(a).(b-a) \geq 0$$

ce qui achève la preuve de l'implication dans le sens direct.
• Posons $c = (1-t)a+tb$, où $a,b \in U$ et $t \in [0,1]$; on a, si l'on suppose que (26.10) est valable pour toute paire de points de U, et en particulier pour les paires (c,b) et (c,a),

$$\begin{aligned} f(b) - f(c) &\geq df(c).(1-t)(b-a) = (1-t)df(c).(b-a) \\ f(a) - f(c) &\geq df(c).t(a-b) = tdf(c).(a-b) \end{aligned}$$

En multipliant la première ligne par t, la seconde par $(1-t)$ et en ajoutant, on obtient bien

$$tf(b) + (1-t)f(a) - f(c) \geq 0,$$

ce qui est l'inégalité de convexité voulue. $\diamondsuit$

Dans le cas où f est plus régulière, on peut exprimer différemment la condition:

Proposition 26.5. *Soit E un espace vectoriel normé, U un ouvert convexe de E et f une application deux fois différentiable de U dans $\mathbf{R}$. Alors f est convexe si et seulement si, pour chaque $x \in U$, la forme "quadratique" $D^2 f(x)$ est positive, soit*

$$D^2 f(x).(h,h) \geq 0, \; h \in E\,. \tag{26.11}$$

Preuve.

• Si f est convexe, on a, pour tout x dans U, pour tout h de norme assez petite (pour que $x+h$ et $x-h$ soient encore dans U), pour tout $t \in [0,1]$,

$$f(x+th) + f(x-th) - 2f(x) \geq 0\,. \tag{26.12}$$

En écrivant Taylor-Young à l'ordre 2, on voit que, lorsque t tend vers 0,

$$f(x+th) + f(x-th) - 2f(x) = t^2 D^2 f(x).(h,h)(1+\mathbf{o}(1))\,.$$

En divisant par t^2 lorsque $t \neq 0$, puis en faisant tendre t vers 0, on voit, compte-tenu de (26.12), que $D^2 f(x_0).(h,h) \geq 0$.

• Supposons que f vérifie la condition (26.11) et écrivons la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2, a et b étant deux points de U. On a, en utilisant le théorème 26.2: il existe $\theta \in [0,1]$,

$$f(b) - f(a) - f'(a).(b-a) = D^2 f((1-\theta)a + \theta b).(b-a, b-a).$$

Utilisant (26.11) au point $x = (1-\theta)a + \theta b$, il vient

$$f(b) - f(a) - f'(a).(b-a) \geq 0$$

et l'on conclut en utilisant la proposition 26.4 à la convexité de f. $\diamondsuit$

Exemple 26.2. Si $E = \mathbf{R}^n$, la condition (26.12) signifie que toutes les valeurs propres de la matrice Hessienne Hess$\,(f;x)$ sont positives ou nulles. Lorsqu'en tout tout point de U, les valeurs propres de cette matrice Hessienne sont toutes strictement positives, on dit que la fonction f est *strictement convexe* dans U.

27. Le théorème d'inversion locale.

Dans cette section, nous ferons du calcul différentiel en supposant toujours que l'espace d'arrivée F est un espace de Banach.

Si f est une application définie dans un ouvert U de E et à valeurs dans F, on dit que f est un *homéomorphisme* entre U et $f(U)$ si et seulement si f est une bijection continue entre U et $f(U)$ telle que l'application inverse $f^{-1} : f(U) \mapsto U$ est aussi continue (auquel cas $f(U)$ est aussi un ouvert).

Si l'on suppose que f est un homéomorphisme entre U et $f(U)$ différentiable en tout point de U, il n'y a aucune raison pour que l'application inverse soit différentiable sur $f(U)$, ouvert de F. Par exemple

$$t \in \mathbf{R} \mapsto t^{2k+1}, \; k \in \mathbf{N}^*$$

est dérivable en tout point de $\mathbf{R}$, mais son inverse

$$t \mapsto t^{\frac{1}{2k+1}}$$

n'est sûrement pas dérivable en $t = 0$. Cela nous conduit à introduire la notion qui correspond naturellement à celle d'homéomorphisme dans le cadre du calcul différentiel.

Définition 27.1. *Soient E et F deux espaces normés (pour cette définition, l'hypothèse F complet n'est pas utile). Soit f est une application définie dans un ouvert U de E et á valeurs dans F. On dit que f est un* difféomorphisme *entre U et $f(U)$ si et seulement si f est une bijection différentiable entre U et $f(U)$ telle que l'application inverse $f^{-1} : f(U) \mapsto U$ est aussi différentiable comme application de $f(U)$ dans U. On dit que f est un C^k difféomorphisme entre U et $f(U)$ si f est un difféomorphisme entre U et $f(U)$ et si de plus f est de classe C^k sur U, que f est un C^∞ difféomorphisme entre U et $f(U)$ si c'est un difféomorphisme entre U et $f(U)$ qui est indéfiniment différentiable sur U.*

Remarque 27.1. On verra plus loin que si f est un C^k difféomorphisme entre U et $f(U)$ et si F est un espace de Banach, alors f^{-1} est aussi de classe C^k, ce qui éclaire un peu plus la terminologie, C^k difféomorphisme signifiant, comme on pourrait s'y attendre que les applications f et f^{-1} sont toutes deux de classe C^k (un homéomorphisme entre U et $f(U)$ n'est alors rien d'autre qu'un C^0-difféomorphisme). Cette remarque explique pourquoi nous ferons dorénavant l'hypothèse que F est un espace de Banach.

Sous cet hypothése, le sous ensemble $\mathrm{Iso}\,(F,F)$ des isomorphismes continus (isomorphisme signifie que l'inverse est aussi continu) de F dans lui même est un ouvert de $\mathcal{L}(F,F)$: en effet, si $T \in \mathrm{Iso}\,(F,F)$ et $K \in L(F,F)$, avec $\|K\|_{F,F} < 1/\|T^{-1}\|_{K,K}$, la série

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k[KT^{-1}]^k$$

est absolument convergente dans l'espace de Banach $\mathcal{L}(F,F)$ et définit donc un élément S dans cet espace. On vérifie immédiatement que

$$\begin{aligned}(I+KT^{-1})S &= \lim_{N\mapsto\infty}\sum_{k=0}^{N}(-1)^k([KT^{-1}]^k - [KT^{-1}]^{k+1}) \\ &= \lim_{N\mapsto\infty}(I+(-1)^{N+1}[KT^{-1}]^{N+1}) = I = S(I+KT^{-1})\,,\end{aligned}$$

et donc que $T^{-1}S$ est un inverse de $T+K = (I+KT^{-1}).T$; ainsi, si T est un isomorphisme du Banach F, $T+K$ en est un aussi dès que $\|K\|_{F,F} < 1/\|T^{-1}\|_{K,K}$. Mieux, l'application de l'ouvert $\mathrm{Iso}\,(F,F)$ dans lui même

$$\Phi:\ T \mapsto T^{-1}$$

est différentiable en tout point; en effet, pour K de norme assez petite,

$$(T+K)^{-1} - T^{-1} = T^{-1}.\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k[KT^{-1}]^k = -T^{-1}KT^{-1} + \mathbf{o}(\|K\|_{F,F})\,.$$

On a donc, pour tout T dans $\mathrm{Iso}\,(F,F)$,

$$d\Phi(T):\ K \mapsto -T^{-1}KT^{-1}\,.$$

On peut, en utilisant la règle de composition, continuer et prouver qu'en fait Φ est une application indéfiniment différentiable sur l'ouvert $\mathrm{Iso}\,(F,F)$ (c'est un bon exercice). Cette propriété sera essentielle pour nous par la suite et nous pouvons la retenir sous forme de l'énoncé suivant:

Proposition 27.1. *Soit F un espace de Banach. L'ensemble* Iso (F, F) *des isomorphismes (bicontinus) de F est un ouvert de $\mathcal{L}(F, F)$ et l'application*

$$\Phi : \; T \mapsto T^{-1}$$

est de classe C^∞ sur cet ouvert, de différentielle

$$T \mapsto d\Phi(T) \text{ avec } d\Phi(T).K = -T^{-1}KT^{-1}, \; K \in L(F, F) \, .$$

Donnons maintenant une condition pour qu'une fonction différentiable soit localement un difféomorphisme: c'est le

Théorème 27.1 (inversion locale). *Soit E un espace vectoriel normé, F un espace de Banach, U un ouvert de E et f une application de classe C^1 de U dans F. Soit x_0 un point de U où $df(x_0) \in \mathrm{Iso}(E, F)$. Alors, il existe un voisinage $V \subset U$ de x_0 tel que f soit un C^1-difféomorphisme entre V et $f(V)$, avec, pour tout $x \in V$,*

$$df^{-1}(f(x)) = [(df)(x)]^{-1} \, . \tag{27.1}$$

On remarque tout d'abord que l'application

$$x \mapsto g(x) := (df(x_0))^{-1}.(f(x_0 + x) - f(x_0))$$

est une application définie dans l'ouvert $U - x_0$ (voisinage de 0) et à valeurs dans E, avec $g(0) = 0$ et $dg(0) = I$. On peut donc ramener le problème au cas où $E = F$, U est un ouvert contenant 0, $x_0 = 0$ et $df(x_0) = I$, situation dans laquelle nous nous placerons dorénavant.

Donnons nous $\eta \in]0, 1[$. Comme $x \mapsto df(x)$ est continue dans U, et en particulier continue en 0, il existe $r > 0$ tel que $\|x\| \leq r$ implique $x \in U$ et

$$\sup_{\xi \in [0,x]} \|I - df(\xi)\|_{E,E} \leq 1 - \eta \, .$$

On peut d'autre part, comme Iso (E, E) est un ouvert de $\mathcal{L}(E, E)$, supposer que pour tout x dans la boule fermée $\overline{B(0, r)}$, $df(x)$ est inversible et tel que

$$\|(df(x))^{-1}\| \leq K$$

pour une certaine constante positive K.

Considérons y tel que $\|y\| \leq \eta r$ et l'application définie par

$$\varphi_y : \; x \in \overline{B(0, r)} \mapsto y + x - f(x) \, .$$

On a, pour tout x dans $\overline{B}(0, r)$,

$$\begin{aligned} \|\varphi_y(x)\| \leq \|y\| + \|x - f(x)\| &\leq \eta r + \|x\| \sup_{\xi \in [0,x]} \|I - df(\xi)\|_{E,E} \\ &\leq \eta r + (1 - \eta) r = r \end{aligned}$$

d'après l'inégalité des accroissements finis. Ainsi φ_y est-elle une application de l'espace métrique complet $\overline{B(0,r)}$ dans lui même. Cette application vérifie

$$\|\varphi_y(x_1) - \varphi_y(x_2)\| \leq \sup_{\xi \in [x_1,x_2]} \|I - df(\xi)\| \|x_1 - x_2\| \leq (1-\eta)\|x_1 - x_2\| \tag{27.2}$$

et est donc strictement contractante. D'après le théorème du point fixe (théorème 9.1), cette application admet un unique point fixe $x(y)$, tel que

$$x(y) = y + x(y) - f(x(y)),$$

soit

$$f(x(y)) = y\,.$$

Mais ici y joue le rôle de paramètre (comme λ dans l'énoncé de la proposition 9.3) évoluant dans l'espace topologique (métrique) $B(0,\eta r)$. Comme la constante de stricte contraction (en l'occurence ici $1-\eta$) dans (27.2) est indépendante de y, il vient de la proposition 9.3 que l'application

$$g:\ y \mapsto x(y)$$

est continue sur $B(0,\eta r)$, et à valeurs dans $\overline{B(0,r)}$. Cette application g vérifie $g(0) = 0$ et satisfait $f(g(y)) = y$ pour tout $y \in B(0,\eta r)$. Si x est dans l'image de $B(0,\eta r)$ par g ($x = g(z)$), on $g(f(x)) = g(f(g(z)) = g(z) = x$. Donc g est une bijection (d'inverse f) entre $B(0,\eta r)$ et un sous ensemble V de E inclus dans $\overline{B(0,r)}$ et contenant 0. Ce sous ensemble V est ouvert dans E car f (l'application inverse) est continue. On peut ici affirmer que f réalise un homéomorphisme entre V et $B(0,\eta r)$. De fait, on sait un peu plus: on a, si y_1 et y_2 sont dans $B(0,\eta r)$,

$$\begin{aligned}\|x(y_1) - x(y_2)\| &= \|y_1 + x(y_1) - f(x(y_1)) - y_2 - x(y_2) + f(x(y_2))\| \\ &\leq \|y_1 - y_2\| + (1-\eta)\|x(y_1) - x(y_2)\|\,,\end{aligned}$$

d'où

$$\|x(y_1) - x(y_2)\| \leq \frac{1}{\eta}\|y_1 - y_2\|$$

ce qui nous prouve que g est mieux que continue: elle est en fait Lipschitzienne (mais bien sûr non contractante).

Notre objectif est de prouver que g est différentiable dans la boule $B(0,\eta r)$, de différentielle

$$y \mapsto (df(g(y)))^{-1}\,.$$

Pour cela, calculons

$$g(y+k) - g(y) - (df(g(y)))^{-1}.k$$

et posons $x = g(y)$ et

$$x + h = g(y+k),$$

ce qui implique $y+k=f(x+h)$, soit $k=f(x+h)-f(x)$. On a donc

$$\begin{aligned} g(y+k)-g(y)-(df(g(y)))^{-1}.k &= h-(df(x))^{-1}.(f(x+h)-f(x)) \\ &= -(df(x))^{-1}.(f(x+h)-f(x)-df(x).h)\,. \end{aligned}$$

On a donc

$$\|g(y+k)-g(y)-(df(g(y)))^{-1}.k\| \leq K\|f(x+h)-f(x)-df(x).h\|$$

compte tenu de la définition de $K := \sup_{\xi\in\overline{B(0,r)}} \|(df(\xi))^{-1}\|$. Mais d'autre part $\|h\| \leq \frac{1}{\eta}\|k\|$ car g est Lipschitzienne, de constante $1/\eta$. Ainsi, il vient, comme

$$f(x+h)-f(x)-df(x).h = \mathbf{o}(\|h\|) = \mathbf{o}(\|k\|),$$

Par conséquent

$$g(y+k)-g(y)-(df(g(y)))^{-1}.k = \mathbf{o}(\|k\|)$$

et g est donc bien différentiable en y de différentielle

$$y \mapsto (df(g(y)))^{-1}\,.$$

Cette application est continue comme composée d'applications continues: l'application g, l'application df, enfin l'application Φ de $\mathrm{Iso}\,(E,E)$ dans lui même: $\Phi : T \mapsto T^{-1}$. On a donc bien prouvé que f est un C^1 difféomorphisme entre V et $B(0,\eta r)$. Nous avons aussi prouvé la formule (27.1). $\diamondsuit$

Mais il y a un fait encore beaucoup plus important: c'est la formule (27.1). Si f est de classe C^k (au lieu d'être de classe C^1), avec $k \geq 1$ et est telle que $df(x_0)$ est dans $\mathrm{Iso}\,(E,F)$, alors on voit immédiatement (par récurrence) que f^{-1} est une application de $f(V)$ dans V de classe C^k (en effet, on applique la chain-rule et le fait que l'application $\Phi :\ \mathrm{Iso}\,(E,F) \mapsto \mathrm{Iso}(F,E)$, $T \mapsto T^{-1}$, est une application de classe C^∞. On a donc le corollaire très important suivant.

Théorème 27.2 (inversion locale, version C^k). *Soit E un espace vectoriel normé, F un espace de Banach, U un ouvert de E et f une application de classe C^k ($k \geq 1$) de U dans F. Soit x_0 un point de U où $df(x_0) \in \mathrm{Iso}(E,F)$. Alors, il existe un voisinage $V \subset U$ de x_0 tel que f soit un C^k-difféomorphisme entre V et $f(V)$, avec, pour tout $x \in V$,*

$$df^{-1}(f(x)) = [(df)(x)]^{-1}\,.$$

Preuve. Nous venons de la donner. $\diamondsuit$

Avant de conclure cette section, signalons une autre application du théorème d'inversion locale nous permettant de compléter les propositions 26.2 et 26.3 dans l'étude des extrémas locaux amorcée dans la section 26. Nous avons la

Proposition 27.1 (lemme de Morse). *Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$, x_0 un point de U, et f une application de classe C^3 de U dans $\mathbf{R}$, telle que $df(x_0) = 0$ et que la matrice hessienne de f en x_0 soit inversible. Il existe alors un voisinage V de x_0 dans U et un difféomorphisme φ entre V et un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}^n$, tels que*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2} D^2 f(x_0).(\varphi(x - x_0), \varphi(x - x_0)),\ x \in V\,.$$

Preuve. Pour simplifier les choses, nous supposerons $x_0 = 0$ et $U = B(0, R)$. Si l'on utilise la formule de Taylor avec reste intégral (ce qui est possible si f est de classe C^3), nous pouvons écrire, avec la formule de Taylor avec reste intégral

$$f(x) = f(0) + \int_0^1 df(tx).xdt = f(0) + \int_0^1 \int_0^1 D^2 f(stx).(x, x)tdtds = f(0) + G(x).(x, x)$$

avec

$$G(x) := \int_0^1 \int_0^1 D^2 f(stx)tdsdt\,.$$

On vérifie que G est de classe C^1 (de U dans l'espace des applications bilinéaires continues de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$) et, puisque la matrice Hessienne de f en x_0 est inversible, que l'application A définie au voisinage de 0 par

$$G(x).(h, k) =< A(x).h, k >$$

(on utilise ici le fait que toute application T de H dans $\mathcal{L}(H, \mathbf{R})$ se représente via le théorème de dualité avec un élément a_T de H, selon la formule $T(h).k =< a_T.h, k >$) est aussi C^1 (cette fois de U dans $\mathbf{R}^n$) et vérifie $A(0) \in \mathrm{Iso}\,(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$. On considère

$$y \mapsto B(y) := A(0)^{-1}.A(y)$$

Cette application B satisfait $\|I - B(y)\| < 1$ si y est assez voisin de 0 (car $B(0) = I$). On peut définir une racine carrée de B en transposant au cadre Banach la construction classique

$$\sqrt{t} = (1 - (1 - t))^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}(1 - t) + \frac{1}{2!}\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1)(1 - t)^2 + \cdots$$

On définit R par

$$R(y) = I - \frac{1}{2}(I - B(y)) + \frac{1}{2}\frac{1}{2!}(\frac{1}{2} - 1)(1 - B(y))^2 + \cdots$$

(cette série converge car il y a convergence absolue). On définit ainsi une application R définie au voisinage de 0, à valeurs dans l'espace $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$, avec $R(0) = I$. Par le théorème d'inversion locale, l'application

$$\psi :\ y \mapsto R(y).y$$

est un difféomorphisme local (car $d\psi(0).h = dR(x_0).(h,0) + R(0).h = h$) entre deux voisinages de 0 dans $\mathbf{R}^n$. D'autre part, $A(x)$ est autoadjoint (c'est le lemme de Schwarz), et l'on a donc

$$B(x)^* = A(x).(A(0))^{-1},$$

soit

$$B(x)^*.A(0) = A(x) = A(0).B(x)\,.$$

Comme $R(x)$ s'écrit comme une limite de polynômes en $B(x)$, on a aussi $R(x)^*.A(0) = A(0).R(x)$. Mais alors

$$\begin{aligned} < A(x).x, x > = < A(O).R^2(x).x, x > &= < R(x)^*.A(O).R(x).x, x > = \\ &= < A(0).[R(x).x], R(x).x > . \end{aligned}$$

Il suffit de poser $\varphi(x) = R(x).x$ et c'est gagné. $\diamondsuit$

28. Le Théorème des fonctions implicites; extréma sous contraintes.

Comme application du théorème d'inversion locale, nous avons le

Théorème 28.1 (fonctions implicites). *Soient E, F, G trois espaces de Banach et f une application de classe C^1 d'un ouvert U de $E \times F$, à valeurs dans G. Soit (x_0, y_0) un point de $E \times F$. On suppose que la dérivée partielle au point (x_0, y_0) selon le second espace de coordonnées (ici F), que nous noterons $\partial_2 f(x_0, y_0)$ est un isomorphisme (bicontinu) entre F et G. Alors, il existe un voisinage V_1 de x_0 dans E, il existe un voisinage V_2 de y_0 dans F, et une application $\varphi : V_1 \mapsto V_2$, de classe C^1 dans V et telle que $V_1 \times V_2 \subset U$ et que*

$$\{(x,y) \in V_1 \times V_2,\ f(x,y) = f(x_0,y_0)\} = \{(x,y) \in E \times F,\ x \in V_1 \text{ et } y = \varphi(x)\}\,. \quad (28.1)$$

On dit que l'on a localement résolu l'équation $f(x,y) = f(x_0,y_0)$ en exprimant y comme fonction implicite de x au voisinage de (x_0,y_0). De plus, φ est C^k, $k \geq 1$, dans V_1 dès que f l'est dans U.

Remarque 28.1. Comme l'on a

$$f(x,\varphi(x)) = f(x_0,y_0),\ x \in V_1\,,$$

on a, en appliquant la chain-rule du calcul différentiel

$$\partial_1 f(x,\varphi(x)) + \partial_2 f(x,\varphi(x)).d\varphi(x) = 0\,,\ x \in V_1\,,$$

soit

$$d\varphi(x) = -\partial_2 f(x,\varphi(x))^{-1}.\,\partial_1 f(x,\varphi(x))\,. \quad (28.2)$$

Exemple 28.1. Dans le cas où $E = \mathbf{R}^n$, $F = G = \mathbf{R}^m$, la matrice Jacobienne de f au point (x_0,y_0) est la matrice à n lignes et $n+m$ colonnes

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} & \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}.$$

On peut appliquer le théorème des fonctions implicites dès que le bloc de droite de cette matrice, soit le (m, m) bloc

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}$$

est une matrice inversible.

Preuve. On considère l'application g de U dans $E \times G$ définie par

$$g(x, y) = (x, f(x, y)) .$$

L'application $dg(x_0, y_0)$ est une application linéaire de $E \times F$ dans $E \times G$ donnée par

$$dg(x_0, y_0).(h, k) = \begin{pmatrix} h \\ \partial_1 f(x_0, y_0).h + \partial_2 f(x_0, y_0).k \end{pmatrix} .$$

On vérifie immédiatement que cette application est un isomorphisme, ayant pour inverse l'application de $E \times G$ dans $E \times F$

$$\begin{pmatrix} h' \\ k' \end{pmatrix} \mapsto (h', -\partial_2 f(x_0, y_0)^{-1}.(k' - \partial_1 f(x_0, y_0).h')) .$$

On peut donc appliquer le théorème d'inversion locale et trouver un voisinage V de (x_0, y_0) dans U, un voisinage W de $(x_0, f(x_0, y_0))$ dans W, et une application Φ qui est C^1 de W dans V, avec

$$(x, y) \in V \text{ et } z = f(x, y) \Longleftrightarrow (x, z) \in W \text{ et } (x, y) = \Phi(x, z) .$$

On peut noter $\Phi(x, z) = (x, l(x, z))$. Si l'on *bloque* $z = f(x_0, y_0)$, on a donc

$$(x, y) \in V \text{ et } f(x, y) = f(x_0, y_0) \Longleftrightarrow (x, f(x_0, y_0)) \in W \text{ et } y = l(x, f(x_0, y_0)) .$$

Comme on peut supposer que V est de la forme $V_1 \times V_2$, on a donc bien

$$(x, y) \in V_1 \times V_2 \text{ et } f(x, y) = f(x_0, y_0) \ \Longleftrightarrow y = l(x, f(x_0, y_0)) .$$

Il ne reste plus qu'à poser

$$\varphi(x) = l(x, f(x_0, y_0))$$

et l'on a bien le théorème car cette fonction est de classe C^1 de V_1 dans V_2. $\diamondsuit$

Supposons que f soit une fonction définie dans un ouvert d'un espace de Banach E (f sera la fonction *objectif*), à valeurs réelles, et que S soit un sous ensemble de U (l'ensemble *contraintes*). On dit que f présente un minimum (resp. maximum) local sous contraintes S en un point $x_0 \in S$ si et seulement si il existe un voisinage V de x_0 dans U tel que $f(x) \geq f(x_0)$ (resp. $f(x) \leq f(x_0)$) pour tout $x \in S \cap V$.

Nous envisagerons le cas particulier où $E = E_1 \times E_2$ et S est décrit via une application de U dans un espace de Banach G comme

$$S := \{(x, y) \in U, \ h(x, y) = 0\} .$$

On suppose aussi que h est C^1 dans U. Nous avons alors la

Proposition 28.1. *Soit f une fonction de U dans $\mathbf{R}$, différentiable en un point x_0 de S, et présentant un extrémum local sous les contraintes S au point (x_0, y_0). On suppose que $\partial_2 h(x_0, y_0) \in \mathrm{Iso}\,(E_2, G)$. Il existe alors un élément $\Lambda \in G^* = \mathcal{L}(G, \mathbf{R})$, dit multiplicateur de Lagrange, tel que*

$$df(x_0) = \Lambda \cdot dh(x_0)\,.$$

Preuve. On peut, en utilisant le théorème des fonctions implicites, décrire l'ensemble S au voisinage de (x_0, y_0) comme le graphe d'une fonction φ de classe C^1, soit l'ensemble des points $(x, \varphi(x))$, $x \in V_1$. Si f présente un extrémum local sous contraintes S au point (x_0, y_0), la fonction

$$F\,:\, x \mapsto f(x, \varphi(x))$$

(définie dans V_1) présente un extrémum local au point x_0 de E_1. La différentiabilité en x_0 (par composition des applications), implique que l'on peut utiliser la proposition 26.1 et conclure que

$$dF(x_0) = 0,$$

soit

$$\partial_1 f(x_0, y_0) + \partial_2 f(x_0, y_0).\, d\varphi(x_0) = 0,$$

soit encore

$$\partial_1 f(x_0, y_0) = \partial_2 f(x_0, y_0).\, [\partial_2 h(x_0, y_0)]^{-1}.\, \partial_1 h(x_0, y_0)\,. \tag{28.1}$$

Comme on a aussi, cette fois trivialement,

$$\partial_2 f(x_0, y_0) = \partial_2 f(x_0, y_0).\, [\partial_2 h(x_0, y_0)]^{-1}.\, \partial_2 h(x_0, y_0)\,, \tag{28.2}$$

on obtient, en mettant ensemble (28.1) et (28.2),

$$df(x_0, y_0) = \lambda.\, dh(x_0, y_0)$$

avec

$$\Lambda = \partial_2 f(x_0, y_0).\, [\partial_2 h(x_0, y_0)]^{-1} \in \mathcal{L}(G, \mathbf{R})\,.$$

Ceci conclut notre preuve. $\diamondsuit$

CHAPITRE 6

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

29. Modélisation de l'évolution des phénomènes physiques.

On se propose de modéliser (et si possible d'en anticiper le passé ou d'en prévoir l'évolution à partir sa mesure à l'instant $t = t_0$) un phénomène physique

$$t \mapsto x(t)\,,$$

où $x(t)$ prend ses valeurs dans un espace de Banach E, dit *espace des phases* ou encore *espace des états* du phénomène, lorsque celui ci est régi par une équation différentielle

$$\dot{x} = f(t, x)$$

(nous noterons dans cette section $\dot{x}$ la dérivée de x, ceci afin de coller aux notations plus traditionnelles en mécanique).

Traitons deux exemples pour voir que la prédiction ou l'anticipation du phénomène n'est pas toujours possible à partir de son examen à un instant t_0 (on appelle *condition initiale* la donnée du couple (t_0, x_0), où t_0 désigne l'instant d'observation et x_0 est la mesure du phénomène précisément à cet instant).

Exemple 29.1. On considère l'équation

$$\dot{x} = -C|x|\,.$$

Si l'on a $x_0 = x(t_0) \neq 0$, on a soit $x_0 > 0$, soit $x_0 < 0$. Dans le premier cas, on trouve immédiatement que près de t_0,

$$x(t) = x_0 e^{-C(t-t_0)}$$

et cette fonction se prolonge à $\mathbf{R}$ tout entier en une solution (restant d'ailleurs toujours strictement positive). Dans le second cas, on trouve de même que près de t_0,

$$x(t) = x_0 e^{C(t-t_0)}$$

et cette fonction se prolonge à $\mathbf{R}$ tout entier en une solution (restant d'ailleurs toujours strictement négative). Enfin, si $x_0 = 0$, la solution x est la fonction identiquement nulle. Dans ce cas, la prédiction ou l'anticipation du phénomène sont donc possibles à partir de la mesure à un instant t_0.

Exemple 29.2. On considère cette fois l'équation

$$\dot{x} = -C\sqrt{|x|}\,.$$

Cette fois, les fonctions φ_{t_1,t_2}, $-\infty \leq t_1 < t_2 \leq +\infty$, définies par

$$x(t) = \begin{cases} \frac{C^2}{4}(t-t_1)^2,\ t \leq t_1 \\ x(t) = 0,\ t_1 \leq t \leq t_2 \\ x(t) = -\frac{C^2}{4}(t-t_1)^2,\ t \geq t_2 \end{cases}$$

sont toutes solutions (définies sur $\mathbf{R}$), et cette fois la prédiction de l'évolution ou de l'anticipation du phénomène sont impossibles, au contraire de ce qui se passe dans l'exemple précédent.

Précisons maintenant le cadre mathématique où nous nous placerons pour étudier les phénomènes régis par une équation du premier ordre (comme dans les deux exemples ci dessus), ou d'ordre supérieur.

a. Premier ordre. On se donne un ouvert Ω de $\mathbf{R} \times E$ et une fonction f continue sur cet ouvert, à valeurs dans E.

Définition 29.1. *On appelle solution de l'équation différentielle*

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{$*$}$$

tout couple (I, φ), où I est un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$, φ une fonction $I \mapsto E$, dérivable sur I, avec

$$\begin{aligned} &\forall t \in I,\ (t, \varphi(t)) \in \Omega \\ &\forall t \in I,\ \dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t))\,. \end{aligned}$$

Si (t_0, x_0) est un point de Ω, on appelle solution de l'équation différentielle (*) avec données initiales (t_0, x_0), ou solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

tout couple (I, φ), où I est un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ contenant t_0, φ une fonction $I \mapsto E$, dérivable sur I, avec

$$\begin{aligned} &\forall t \in I,\ (t, \varphi(t)) \in \Omega \\ &\forall t \in I,\ \dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t)) \\ &x(t_0) = x_0\,. \end{aligned}$$

Remarque 29.1. Si (I, φ) est solution, φ est automatiquement C^1 sur I.

b. Ordre k, $k > 1$. On se donne un ouvert Ω de $\mathbf{R} \times E^k$ et une fonction f continue sur cet ouvert, à valeurs dans E.

Définition 29.2. *On appelle solution de l'équation différentielle*

$$x^{(k)} = f(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(k-1)}) \tag{$**$}$$

tout couple (I, φ), où I est un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$, φ une fonction $I \mapsto E$, k fois dérivable sur I, avec

$$\begin{aligned} &\forall t \in I,\ (t, \varphi(t), \ldots, \varphi^{(k-1)}(t)) \in \Omega \\ &\forall t \in I,\ \varphi^{(k)}(t) = f(t, \varphi(t), \ldots, \varphi^{(k-1)}(t))\,. \end{aligned}$$

Si $(t_0, x_0, \dot{x}_0, \ldots, x_0^{(k-1)})$ est un point de Ω, on appelle solution de l'équation différentielle (**) avec données initiales $(t_0, x_0, \dot{x}_0, \ldots, x_0^{(k-1)})$, ou solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x^{(k)} = f(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(k-1)}) \\ x(t_0) = x_0, \ldots, x^{(k-1)}(t_0) = x_0^{(k-1)} \end{cases}$$

tout couple (I, φ), où I est un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ contenant t_0, φ une fonction $I \mapsto E$, dérivable sur I, avec

$$\begin{aligned} &\forall t \in I,\ (t, \varphi(t), \ldots, \varphi^{(k-1)}(t)) \in \Omega \\ &\forall t \in I,\ \varphi^{(k)}(t) = f(t, \varphi(t), \ldots, \varphi^{(k-1)}(t)) \\ &\varphi(t_0) = x_0, \ldots, \varphi^{(k-1)}(t_0) = x_0^{(k-1)} \end{aligned}$$

Remarque 29.2. Si (I, φ) est solution, φ est automatiquement C^k sur I.

De fait, l'ordre k se ramène à l'ordre 1. En effet, si f est une fonction continue sur un ouvert Ω de $\mathbf{R} \times E$, la fonction F sur Ω et à valeurs dans E^k

$$F:\ (t, x_1, \ldots, x_k) \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_k \\ f(t, x_1, \ldots, x_k) \end{pmatrix} \in E^k$$

est une fonction continue de Ω dans E^k. Dire que (I, φ) est une solution de (**) est équivalent à dire que (I, Φ), où

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \dot{\varphi}(t) \\ \vdots \\ \varphi^{(k-1)}(t) \end{pmatrix}$$

est une solution de l'équation

$$\dot{X} = F(t, X)\,.$$

Dire que (I, φ) est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x^{(k)} = f(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(k-1)}) \\ x(t_0) = x_0, \ldots, x^{(k-1)}(t_0) = x_0^{(k-1)} \end{cases}$$

équivaut à dire que (I, Φ) est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{X} = f(t, X) \\ X(t_0) = (x_0, \ldots, x_0^{(k-1)}) \end{cases}$$

Suivant ces remarques, on ne considèrera par la suite que les équations d'ordre 1. Notons cependant que notre étude se limite au champ des équations dites *résolubles* en $\dot{x}$. Elle ne couvre pas le cadre des équations

$$a(t,x)\dot{x} = f(t,x)$$

(sauf si l'on suppose que Ω est un ouvert sur lequel a ne s'annule pas), ni le cadre des équations plus complexes

$$G(t,x,\dot{x}) = 0 \tag{29.1}$$

(à moins que le théorème des fonctions implicites nous permette localement d'exprimer (29.1) sous la forme

$$\dot{x} = f(t,x)\,).$$

Dernier point de vocabulaire dans cette section: une solution (I,φ) de l'équation (*) est aussi appelée *courbe intégrale* de cett équation différentielle. Le vecteur tangent à cette courbe au point $(t_0,\varphi(t_0))$ est bien sûr le vecteur $(1, f(t_0,\varphi(t_0)))$, lorsque t_0 désigne un point de I.

30. Les principaux théorèmes d'existence et d'unicité (points de vue locaux ou globaux).

Le premier théorème que nous mentionnerons sera un théorème d'existence locale, dû à Peano, mais que l'on associe souvent au nom d'Ascoli, tant le théorème d'Ascoli joue un rôle capital dans la preuve.

Théorème 30.1. *Soit E un $\mathbf{R}$ espace vectoriel de dimension finie, Ω un ouvert de $\mathbf{R}\times E$, f une fonction continue de Ω dans E. Alors, pour tout point (t_0,x_0) de Ω, il existe une solution (I,φ) du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Preuve. Nous l'avons brièvement évoqué dans la section 10 (voir exemple 10.6). Rappelons en ici le principe car il met en jeu la méthode d'Euler, méthode numérique capitale pour la résolution des équations différentielles résolubles.

Soient $h > 0$ et $\eta > 0$ tels que $[t_0-h,t_0+h]\times\overline{B(x_0,\eta)} \subset \Omega$. D'après le théorème de Heine (théorème 5.2), la fonction f est uniformément continue et bornée en norme par $M \geq 1$ sur ce compact. D'après l'uniforme continuité, il existe, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, un nombre $\delta_n > 0$ tel que

$$\begin{cases} \forall t_1,t_2 \in [t_0-h,t_0+h] \text{ avec } |t_1-t_2| \leq \delta_n \\ \forall x_1,x_2 \in \overline{B(x_0,\eta)} \text{ avec } \|x_1-x_2\| \leq \delta_n \end{cases},\ \|f(t_1,x_1)-f(t_2,x_2)\| \leq \frac{1}{n}\,. \tag{30.1}$$

Prenons alors $c < \eta/(M+1)$ et considérons une subdivision de l'intervalle $[t_0,t_0+c]$ en $p = p(n)$ points équidistants

$$t_{n,0} = t_0, \ldots, t_{n,p(n)} = t_0 + c$$

telle que le pas τ_n soit inférieur à δ_n/M. On se propose de fabriquer dans $[t_0, t_0+c]$ une fonction continue φ_n, à valeurs dans E, telle que pour tout $t \in [t_0, t_0+c]$, $(t, \varphi_n(t)) \in \Omega$ et que de plus

$$\forall t \in [t_0, t_0+c],\ \left\|\varphi_n(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} f(u, \varphi_n(u))du\right\| \leq \frac{1}{n}\,. \tag{30.2}$$

Cette solution sera qualifiée de *solution approchée* (à $\frac{1}{n}$ près) du problème de Cauchy à droite de t_0.

Pour ce faire, on discrétise le problème à la manière des numériciens et l'on construit la suite récurrente donnée par

$$x_{n,0} = x_0, \ldots, \frac{x_{n,k+1} - x_{n,k}}{\tau_n} = f(t_{n,k}, x_{n,k}),\ k = 0, ..., p(n)-1\,,$$

soit encore

$$x_{n,0} = x_0, \ldots, x_{n,k+1} = x_{n,k} + \tau_n f(t_{n,k}, x_{n,k}),\ k = 0, ..., p(n)-1\,.$$

Comme $cM < \eta$, la construction est bien licite car les points $(t_{n,k}, x_{n,k})$ restent tous dans $\overline{B(x_0, \eta)}$. On construit une fonction continue φ_n en *interpolant* de manière affine les valeurs $x_{n,0}, \ldots, x_{n,p(n)}$, prises aux points respectifs $t_{n,0} = t_0, \ldots, t_{n,p(n)} = t_0 + c$. Sur l'intervalle $[t_{n,k}, t_{n,k+1}]$, on définit la fonction φ_n par

$$\varphi_n(t) = \frac{(t - t_{n,k})x_{n,k+1} + (t_{n,k+1} - t)x_{n,k}}{\tau_n}$$

et l'on a donc, sur l'intervalle $I_{n,k} :=]t_{n,k}, t_{n,k+1}[$, $k = 0, ..., p(n)-1$,

$$\dot\varphi_n(t) = \frac{x_{n,k+1} - x_{n,k}}{\tau_n}\,.$$

Ainsi, toujours sur $I_{n,k}$, la fonction

$$t \mapsto \psi_n(t) := \varphi_n(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} f(u, \varphi_n(u))du$$

est-elle dérivable, de dérivée

$$\frac{x_{n,k+1} - x_{n,k}}{\tau_n} - f(t, \varphi_n(t)) = f(t_{n,k}, x_{n,k}) - f(t, \varphi_n(t))\,.$$

Comme l'on a, si $t \in I_{n,k}$, à la fois $|t - t_{n,k}| \leq \tau_n \leq \delta_n$ et $\|x_{n,k} - \varphi_n(t)\| \leq M\tau_n \leq \delta_n$, on a

$$\forall t \in I_{n,k},\ \|\dot\psi_n(t)\| \leq \frac{1}{n}\,.$$

Il vient, en utilisant l'inégalité des accroissements finis, que si $t \in I_{n,k}$,

$$\|\psi_n(t)\| \leq \frac{1}{n}(|t_{n,1} - t_{n,0}| + \cdots + |t_{n,k} - t_{n,k-1}| + |t - t_{n,k}|) \leq \frac{1}{n} c\tau_n = \frac{1}{n}\,.$$

Nous avons donc bien notre solution approchée.
Il ne reste plus qu'à montrer que la famille des fonctions φ_n, $n \in \mathbf{N}^*$, est une famille équicontinue et bornée de $\mathcal{C}([t_0, t_0 + c], E)$. Cela est immédiat car

$$\|\varphi_n(t_1) - \varphi_n(t_2)\| \leq \int_{t_1}^{t_2} \|f(u, \varphi_n(u))\| du \leq M|t_1 - t_2|,\ t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_0 + c\,,$$

ce qui implique en particulier

$$\|\varphi(t)\| \leq \|\varphi_n(t_0)\| + Mc \leq \|x_0\| + Mc\,.$$

On peut appliquer Ascoli, extraire de la suite $(\varphi_n)_n$ une sous suite uniformément convergente sur $[t_0, t_0 + c]$; la limite de la suite φ_n est une fonction φ continue de $[t_0, t_0 + c]$ dans E et satisfaisant cette fois non plus l'équation intégrale approchée (30.2), mais l'équation intégrale exacte

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, \varphi(u)) du\,. \tag{30.3}$$

Mais on voit en regardant (30.3) que φ est dérivable sur $[t_0, t_0 + c]$ et que

$$\dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t)),\ t \in [t_0, t_0 + c]\,.$$

On peut répéter ce raisonnement mot pour mot à gauche de t_0. Cela conclut notre preuve. $\diamondsuit$

Remarque 30.1. L'exemple 29.2 montre qu'il n'y a pas sans hypothèses renforcées unicité de la solution (l'exemple 29.2 montre des phénomènes de bifurcation pour les courbes intégrales en tout point de l'axe $x = 0$).

Le théorème de Peano s'énonce en disant que tout point de Ω est *point d'existence.* Mais l'existence sans l'unicité ne permet pas une étude sérieuse de l'évolution du phénomène à partir de données initiales. C'est pourquoi nous introduisons deux notions d'unicité, une locale et une globale.

Définition 30.1. *Soit E un espace de Banach, Ω un ouvert de $\mathbf{R} \times E$, f une fonction continue de Ω dans $\mathbf{R}$. Un point (t_0, x_0) de Ω est un point d'unicité locale pour l'équation*

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{$*$}$$

si et seulement si, dès que (I_1, φ_1) et (I_2, φ_2) sont deux solutions du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases},$$

il existe un intervalle $I_{12} \subset I_1 \cap I_2$, contenant t_0, sur lequel φ_1 et φ_2 coincident.

Exemple 30.1. Dans l'exemple 29.1, tout point de $\mathbf{R}^2$ est un point d'existence et d'unicité locale pour l'équation (*).

Pour l'autre notion (unicité globale), nous ferons appel à un axiome de logique, équivalent à l'axiome du choix, **l'axiome de Zorn**:

"*si un ensemble $\mathcal{E}$ équipé d'une relation d'ordre $\prec$ est inductif, c'est à dire si tout sous ensemble de $\mathcal{E}$ totalement ordonné admet une borne supérieure (un plus petit majorant), alors $\mathcal{E}$ admet des éléments maximaux.* *"

Si (t_0, x_0) est un point d'existence de l'équation (*), l'ensemble $\mathcal{E}_{t_0,x_0}$ des solutions du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

peut être équipé d'un ordre naturel

$$(I_1, \varphi_1) \prec (I_2, \varphi_2) \Longleftrightarrow I_1 \subset I_2 \text{ et } \varphi_2 = \varphi_1 \text{ sur } I_1 = I_1 \cap I_2 \,.$$

Si $\{(I_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ est une partie totalement ordonnée de $\mathcal{E}_{t_0,x_0}$, cette partie admet une borne supérieure, à savoir (I, φ) avec

$$I := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda, \;\; \varphi = \varphi_\lambda \text{ sur } I_\lambda, \; \lambda \in \Lambda \,.$$

L'ensemble non vide $\mathcal{E}_{t_0,x_0}$ est inductif; il existe donc des solutions maximales $(I_{\max}, \varphi_{\max})$, au sens suivant: si (I, φ) est une solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

avec $I_{\max} \subset I$, alors $I_{\max} = I$.

Tout cela nous amène à notre deuxième notion d'unicité, cette fois globale:

Définition 30.2. *Soit E un espace de Banach, Ω un ouvert de $\mathbf{R} \times E$, f une fonction continue de Ω dans $\mathbf{R}$. Un point (t_0, x_0) de Ω est un point d'unicité globale pour l'équation*

$$\dot{x} = f(t,x) \tag{$*$}$$

---

* Rappelons qu'une partie totalement ordonnée est une partie $\mathcal{A}$, telle que, si α et β sont deux éléments quelconques de $\mathcal{A}$, on a, soit $\alpha \prec \beta$, soit $\beta \prec \alpha$. Rappelons aussi que μ est maximal dans $\mathcal{E}$ si et seulement si

$$(\alpha \in \mathcal{E} \text{ et } \mu \prec \alpha) \Longrightarrow \alpha = \mu \,.$$

si et seulement si, dès que (I_1, φ_1) et (I_2, φ_2) sont deux solutions maximales du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases},$$

alors $(I_1, \varphi_1) = (I_2, \varphi_2)$.

Le petit lemme suivant relie les deux notions

Lemme 30.1. *Soit E un espace de Banach, Ω un ouvert de $\mathbf{R} \times E$, f une fonction continue de Ω dans $\mathbf{R}$. Si tout point de Ω est point d'unicité locale pour l'équation*

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{$*$}$$

alors tout point est point d'unicité globale. De plus, sous les mêmes hypothèses, dès que deux solutions (I_1, φ_1) et (I_2, φ_2) sont telles qu'il existe $t_0 \in I_1 \cap I_2$, avec $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0)$, alors $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ dans $I_1 \cap I_2$.

Preuve. Prouvons d'abord la seconde assertion avec un argument de connexité: l'ensemble

$$J := \{t \in I_1 \cap I_2,\ \varphi_1(t) = \varphi_2(t)\}$$

est un fermé non vide ($t_0 \in J$ par hypothéses) de $I_1 \cap I_2$ car les deux fonctions φ_j sont continues. C'est aussi un ouvert car tout point de Ω est supposé d'unicité locale. On a donc $J = I_1 \cap I_2$.
Si maintenant (I_1, φ_1) et (I_2, φ_2) sont deux éléments maximaux de $\mathcal{E}_{t_0,x_0}$, alors les deux fonctions φ_1 et φ_2 coincident sur $I_1 \cap I_2$. Si par exemple la borne supérieure t_1 de I_1 était strictement inférieure à la borne supérieure t_2 de I_2, la fonction φ_2 serait un prolongement C^1 de φ_1 à $[t_1, t_2[$ et l'on contredirait la maximalité de (I_1, φ_1). On conclut (en répétant ce raisonnement dans les divers cas de figure possible) que $(I_1, \varphi_1) = (I_2, \varphi_2)$. $\diamondsuit$

Remarque 30.2. Si tout point de Ω est un point d'existence et d'unicité locale, le lemme ci dessus montre qu'il existe toujours une solution maximale (I, φ) pour le problème de Cauchy correspondant aux données initiales (t_0, x_0), ce point étant quelconque dans Ω, et ce sans recours à Zorn. En effet, si

$$\mathcal{E}_{t_0,x_0} = \{(I_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda},$$

il suffit de prendre

$$I := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda,\ \varphi = \varphi_\lambda \text{ sur } I_\lambda,, \lambda \in \Lambda,$$

pour construire un élément maximal de $\mathcal{E}_{t_0,x_0}$.

Tout cela nous amène à notre second théorème, où, quitte à renforcer les hypothèses, nous pouvons assurer que tout point de l'ouvert Ω où f est définie et continue est point d'existence en même temps que point d'unicité locale et globale. Ce second théorème a déja été donné (section 9) dans le cas où $E = \mathbf{R}^k$, mais sa preuve s'adapte au cas où E est un Banach sans rien modifier. Nous l'énoncons ici, il s'agit cette fois d'un avatar non plus d'Ascoli, mais du théorème du point fixe.

Théorème 30.2 (Cauchy-Lipschitz, versions locale et globale). *Soit E un espace de Banach, Ω un ouvert de $\mathbf{R} \times E$, f une fonction continue de Ω dans E, localement Lipschitzienne par rapport à la seconde variable, ce qui signifie: pour tout (t_0, x_0) de Ω, il existe un voisinage $V(t_0, x_0)$, une constante $K(t_0, x_0)$, tels que,*

$$\forall (t, x_1),\ (t, x_2) \in V(t_0, x_0),\ \|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq K(t_0, x_0)\|x_1 - x_2\| .$$

Alors, tout point de Ω est à la fois point d'existence, d'unicité locale et globale pour l'équation

$$\dot{x} = f(t, x) . \tag{$*$}$$

De plus, étant donnés (t_0, x_0) dans Ω et $h > 0, \eta > 0$ tels que

$$\begin{cases} [t_0 - h, t_0 + h] \times \overline{B(x_0, \eta)} \subset V(t_0, x_0) \\ \|f(t, x)\| \leq M(t_0, x_0),\ (t, x) \in [t_0 - h, t_0 + h] \times \overline{B(x_0, \eta)} \end{cases}$$

il existe une et une seule solution $(]t_0 - \rho, t_0 + \rho[, \varphi)$ au problème de Cauchy correspondant à (t_0, x_0), prenant ses valeurs dans $B(x_0, \sigma)$, pourvu que ρ et σ satisfassent les contraintes couplées

$$\begin{cases} 0 < \rho \leq h\,,\ 0 < \sigma \leq \eta \\ M(t_0, x_0)\rho \leq \sigma \\ K(t_0, x_0)\rho < 1 \end{cases} \tag{30.4}$$

Remarque 30.2. Un tel ensemble $]t_0 - \rho, t_0 + \rho[\times B(x_0, \sigma) \subset V(t_0, x_0)$ où les courbes intégrales solution du problème de Cauchy se trouvent en quelque sorte *piégées* est appelé un *tonneau de sécurité* pour l'équation (*) au point (t_0, y_0).

Preuve. On se contente de montrer que si ρ et σ sont ajustés suivant les contraintes couplées (30.4), l'opérateur

$$\theta \in \mathcal{C}([t_0 - \rho, t_0 + \rho], \overline{B(x_0, \sigma)}) \mapsto \Phi(\theta)$$

où

$$\Phi(\theta)(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, \theta(u))du$$

est un opérateur strictement contractant de l'espace de Banach $\mathcal{C}([t_0 - \rho, t_0 + \rho], \overline{B(x_0, \sigma)})$ dans lui même. Cet opérateur admet un unique point fixe, qui bien sûr, comme on l'a vu à la fin de la preuve du théorème 30.1, induit une solution de l'équation différentielle définie sur $]t_0 - \rho, t_0 + \rho[$. Il y a unicité locale car deux solutions (I_1, φ_1), (I_2, φ_2) avec $t_0 \in I_1 \cap I_2$ et $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0) = x_0$ peuvent bien sûr être piégées dans le même tonneau de sécurité et coincident donc près de t_0 puisqu'il y a une clause d'unicité dans l'énoncé du point fixe. On renvoie pour plus de détails à la section 9 de ce cours. $\diamondsuit$

Exemple 30.2. Un cadre classique d'application. Si $\partial_2 f(t, x)$ existe en tout point de Ω et si

$$(t, x) \mapsto \|\partial_2 f(t, x)\|$$

est une fonction localement bornée, les hypothèses du théorème 30.2 sont remplies puisque l'inégalité des accroissements finis implique qu'au voisinage de (t_0, x_0),

$$\|f(t,x_1) - f(t,x_2)\| \leq \sup_{\xi\in[(t,x_1),(t,x_2)]} \|\partial_2(\xi)\|\|x_1 - x_2\| \leq K(t_0,x_0)\|x_1 - x_2\|\,.$$

Nous complèterons cette section par un résultat essentiel lorsqu'il s'agira de traiter de manière qualitative une équation différentielle: le lemme des bouts.

Définition 30.3. *Soit E un espace de Banach, Ω un ouvert de $\mathbf{R}\times E$, f une fonction continue de Ω dans E, (I,φ) une solution maximale de l'équation*

$$\dot{x} = f(t,x)$$

(posée bien sûr ici dans Ω). On dit que $\{\tau\}\times A_\tau$, $\tau < \infty$ (resp. $\tau > -\infty$), $\tau \notin I$, $A_\tau \subset E$, est un bout droit (resp. gauche) de la solution (I,φ) si A_τ est l'ensemble des points b de E tels qu'il existe une suite d'instants $t_n \in I$, convergeant en croissant (resp. en décroissant) vers τ, avec

$$\lim_{n\mapsto\infty} \varphi(t_n) = b\,.$$

Remarque 30.3. Une solution maximale peut fort bien ne pas avoir de bout (par exemple si elle est définie sur $\mathbf{R}$, ou si $\lim\limits_{t\mapsto\tau} \|\varphi(t)\| = +\infty$ lorsque τ est la borne inférieure ou la borne supérieure de I).

La possibilité de construire des tonneaux de sécurité lorsque sont satisfaites les conditions de Cauchy-Lipschitz implique le

Lemme 30.2 (dit des bouts). *Soit E un espace de Banach, Ω un ouvert de $\mathbf{R}\times E$, f une fonction continue de Ω dans E, localement Lipschitzienne par rapport à la seconde variable. Alors, les bouts de toute solution maximale de l'équation (*) sont inclus dans la frontière de Ω. En particulier, si cette frontière est vide ($\Omega = \mathbf{R}\times E$), il ne saurait y avoir de bouts de solutions, autrement dit, les courbes intégrales ne sauraient disparaitre dans un puits.*

Preuve. Supposons que (τ, b) soit un bout appartenant à Ω. On se donne h et η de manière à ce que

$$[\tau - h, \tau + h] \times \overline{B(b,\eta)} \subset V(\tau,b) \subset \Omega\,.$$

Pour tous les points (t,x) assez voisins de (τ,b), avec t à gauche de τ, les paramètres ρ et σ attachés à la construction d'un tonneau de sécurité au point (t,x) peuvent être choisis indépendants de (t,x) (il n'y a qu'à examiner ce que sont les contraintes (30.4)), soit $\rho = \rho_{\tau,b}, \sigma = \sigma_{\tau,b}$. Dès lors, on est assuré que si $\tau - \frac{\rho_{\tau,b}}{2} < t < \tau$ et $\|x - b\| \leq \frac{\sigma_{\tau,b}}{2}$, il existe un tonneau de sécurité autour de (t,x) contenant (τ,b). Soit t_n une suite de points telle que $(t_n,\varphi(t_n))$ converge vers (τ,b). Pour n assez grand, le point (t_n,x_n), où $x_n = \varphi(t_n)$, est donc bien un point tel que le tonneau de sécurité construit autour de ce point avec les paramètres $\rho_{\tau,b}, \sigma_{\tau,b}$ contienne le point (τ,b). Mais alors, pour un tel n, disons n_0, on pourrait construire (d'après le théorème 30.2) une solution de l'équation dans $]t_{n_0} - \rho_{\tau,b}, t_{n_0} + \rho_{\tau,b}[$, prenant la valeur x_{n_0} en t_{n_0}. À cause de l'unicité locale, cette solution coinciderait près de t_{n_0} avec φ, solution du même problème de Cauchy relatif aux données (t_{n_0}, x_{n_0}). On aurait ainsi la possibilité de prolonger φ au dela de τ à droite, ce qui contredit la maximalité de (I, φ). Le point (τ, b), point d'un bout droit de solution, ne peut qu'appartenir à la frontière de Ω (tandis qu'il est bien sûr par définition dans $\overline{\Omega}$, en tant que limite d'une suite de points de Ω). $\diamondsuit$

Exemple 30.3: un premier exemple d' étude qualitative; barrières et principe de comparaison.

Nous verrons une application importante du théorème des bouts dans la section suivante. Donnons cependant ici un exemple simple d'application avec l'équation (dite de Liouville)

$$\dot{x} = t + x^2 \tag{30.5}$$

(ici $\Omega =]0, \infty[\times \mathbf{R}$ et $f(t,x) = t + x^2$). On se sait pas résoudre cette équation (sauf numériquement bien sûr), mais par contre, on sait résoudre facilement une équation du type

$$\dot{x} = \gamma^2 + x^2,\ \gamma \in \mathbf{R}^*. \tag{30.6}$$

Soit $t_0 > 0$. Les solutions (I, ψ) de l'équation (30.6) telles que $x(t_0) = 0$ s'obtiennent en écrivant que pour tout $t \in I$,

$$\int_0^{x(t)} \frac{du}{\gamma^2 + u^2} = t - t_0\,,$$

soit

$$\frac{1}{\gamma}\mathrm{arctg}(\frac{x(t)}{\gamma}) = t - t_0\,,$$

ou encore

$$x(t) = \gamma \tan\left(\gamma(t - t_0)\right).$$

On voit ici que la solution maximale du problème de Cauchy correspondant à l'équation (30.6) avec données initiales $x(t_0) = 0$ est le couple $(I_{\gamma,t_0}, \psi_{\gamma,t_0})$, où

$$I_{\gamma,t_0} =]\max(0, t_0 - \frac{\pi}{2\gamma}), t_0 + \frac{\pi}{2\gamma}[\,.$$

Cette équation (30.6) est ce que l'on appelle une *équation à variables séparées*. Pour l'équation (30.5), nous n'avons pas d'outils aussi efficaces pour envisager une résolution rapide autre que numérique (méthode d'Euler). Cependant, supposons que (I, φ) soit la solution maximale de (30.5) avec données initiales $(t_0, 0)$, solution pour l'instant inconnue. On a, pour $t \geq t_0$, et $0 < \gamma < \sqrt{t_0}$

$$\dot{\psi}_{\gamma,t_0}(t) = \gamma^2 + \psi^2_{\gamma,t_0}(t) < t_0 + \psi^2_{\gamma,t_0}(t)\,.$$

La fonction $\varphi - \psi_{\gamma,t_0}$ s'annule en t_0 et est strictement croissante; il existe donc h tel que, sur $]t_0, t_0 + h]$, on ait

$$\psi_{\gamma,t_0}(t) < \varphi(t)\,.$$

Si
$$A := \{t \in]t_0, \infty[\cap I_{\gamma,t_0} \cap I,\ \psi_{\gamma,t_0}(t) \geq \varphi(t)\}$$
était non vide et que l'on désigne par t_1 sa borne inférieure, on aurait bien sûr $\varphi(t_1) = \psi_{\gamma,t_0}(t_1)$, mais la fonction $\varphi - \psi_{\gamma,t_0}$ serait strictement croissante au passage de t_1, donc sûrement strictement négative avant, ce qui contredit la définition de t_1 (qui elle implique $\varphi - \psi_{\gamma,t_0} > 0$ sur $]t_0, t_1[$). L'ensemble A est donc vide et de fait,
$$\psi_{\gamma,t_0}(t) < \varphi(t)$$
pour tout t dans $]t_0, \infty[\cap I_{\gamma,t_0} \cap I$. On dit aussi que $(I_{\gamma,t_0}, \psi_{\gamma,t_0})$ est ce que l'on appelle une *barrière inférieure forte* * pour l'équation (*), soit un couple (J, ψ), avec ψ de classe C^1 sur J et
$$\begin{cases} \forall t \in J,\ (t, \psi(t)) \in \Omega \\ \forall t \in J,\ \dot{\psi}(t) < f(t, \psi(t)) \end{cases} \tag{30.7}$$
On vient de démontrer qu'une telle barrière devenait *infranchissable* au dela d'un instant t_0 où elle se trouvait franchie pour une courbe intégrale de (*). Le même raisonnement vaudrait pour les barrières supérieures fortes*. Dans notre cas, l'existence d'une telle barrière force notre solution maximale à avoir un domaine de vie limité à droite de t_0 à un intervalle $[t_0, \beta[$, avec $\beta \leq t_0 + \frac{\pi}{2\gamma}$. Comme aucun point de la droite $t = \beta$ n'est à la frontière de Ω, le théorème des bouts nous assure que
$$\lim_{t \mapsto \beta_-} (\varphi(t)) = +\infty\,.$$
Ainsi, comme sur cet exemple, lemme des bouts et principe de comparaison avec des barrières constituent des guides bien utiles pour dresser un portrait de phases de la situation. Les barrières fortes sont fortement infranchissables (ceci d'ailleurs sans hypothèses sur f autres que la continuité dans Ω), et, dans le cas où f est Lipschitzienne comme fonction de la seconde variable, les barrières faibles sont faiblement infranchissables.

31. Le lemme de Gronwall et quelques critères d'existence.

Dans cette section, on se propose de résoudre une inéquation différentielle et d'en déduire un critère nous permettant de décider de l'espérance de vie des solutions maximales d'une équation différentielle. Ce critère sera capital pour les équations linéaires dans la section suivante.

---

* On utilise le qualificatif faible lorsque l'inégalité dans (30.7) est faible.

* Un couple (J, ψ), avec ψ de classe C^1 sur J et
$$\begin{cases} \forall t \in J,\ (t, \psi(t)) \in \Omega \\ \forall t \in J,\ \dot{\psi}(t) > f(t, \psi(t)) \end{cases}$$

Lemme 31.1 (lemme de Gronwall). *Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$, φ une fonction continue, de classe C^1 par morceaux sur I, à valeurs dans un Banach E, et telle que les discontinuités de $\dot\varphi$ forment un sous ensemble discret de I et soient de première espèce, ce qui signifie qu'il y a une limite à gauche et une limite à droite pour $\dot\varphi$ aux points de discontinuité. On suppose en outre qu'il existe $A, B \geq 0$, avec*

$$\|\dot\varphi(t)\| \leq A\|\varphi(t)\| + B,\ t \in I\,.$$

Alors, si $t_0 \in I$, on a, lorsque $A > 0$,

$$\|\varphi(t)\| \leq \|\varphi(t_0)\| e^{A|t-t_0|} + \frac{B}{A}(e^{A|t-t_0|} - 1)\,,\ \forall t \in I, \tag{31.1}$$

et lorsque $A = 0$,

$$\|\varphi(t)\| \leq \|\varphi(t_0)\| + B|t - t_0|\,, \forall t \in I. \tag{31.2}$$

Preuve. Si $A = 0$, on applique juste l'inégalité des accroissements finis pour obtenir (31.2). Commencons par établir (31.1) lorsque $t = t_0 + s \geq t_0$. Si $A > 0$, posons, pour $s \geq 0$

$$g(s) = \int_{t_0}^{t_0+s} \|\varphi(u)\| du\,.$$

Comme

$$\begin{aligned}\|\varphi(t_0 + s)\| &\leq \|\varphi(t_0)\| + \int_{t_0}^{t_0+s} \|\dot\varphi(u)\| du \leq \|\varphi(t_0)\| + Bs + A\int_{t_0}^{t_0+s} \|\varphi(u)\| du \\ &\leq \|\varphi(t_0)\| + Ag(s) + Bs\,,\end{aligned}$$

on a aussi

$$g'(s) \leq Ag(s) + Bs + \|\varphi(t_0)\|, \tag{31.3}$$

soit encore

$$(e^{-As} g(s))' \leq Be^{-As}s + \|\varphi(t_0)\| e^{-As}\,.$$

Intégrons entre 0 et $s \geq 0$; il vient

$$e^{-As} g(s) \leq B\int_0^s e^{-Au} u du + \|\varphi(t_0)\| \int_0^s e^{-Au} du,$$

soit

$$Ag(s) \leq \Big(e^{As}(\|\varphi(t_0)\| + \frac{B}{A}) - \frac{B}{A}\Big) - (\|\varphi(t_0)\| + Bs)\,. \tag{31.4}$$

Ré-injectons (31.4) dans (31.3) pour obtenir

$$g'(s) \leq e^{As}(\|\varphi(t_0)\| + \frac{B}{A}) - \frac{B}{A},$$

d'où

$$\|\varphi(t_0 + s)\| \leq e^{As}\|\varphi(t_0)\| + \frac{B}{A}(e^{As} - 1),$$

ce qui nous donne (31.1) pour $t \geq t_0$. On change I en $-I$ et toutes les variables en leurs opposées pour obtenir le résultat aussi pour $t \leq t_0$. $\diamondsuit$

Nous déduisons du lemme de Gronwall un premier critère assurant une espérance de vie à priori pour les solution maximales de certaines équations différentielles.

Proposition 31.1 (critère d'existence 1). *Soit E un Banach, I un intervalle de $\mathbf{R}$, f une fonction continue localement Lipschizienne dans $\Omega = I \times \mathbf{R}^p$. On suppose que pour tout compact K de I, il existe des constantes A_K et B_K avec*

$$\forall (t,x) \in K \times E,\ \|f(t,x)\| \leq A_K\|x\| + B_K\,.$$

Alors toute solution maximale de

$$\dot{x} = f(t,x) \tag{$*$}$$

(posée dans Ω) est définie sur I tout entier.

Exemple capital 31.1. Si

$$f(t,x) = A(t).x + B(t),$$

où A est continue de I dans $\mathcal{L}(E,E)$ et B continue de I dans $\mathbf{R}$, les hypothèses sont vérifiées. Ceci est le cadre des équations linéaires, envisagées dans la section suivante.

Preuve. Soit $]\alpha,\beta[$ l'intervalle de vie d'une solution maximale $(]\alpha,\beta[,\varphi)$, et supposons que β soit un point de I, t_0 un point de $]\alpha,\beta[$, avec $\varphi(t_0) = x_0$. Si $K = [t_0,\beta]$, on a

$$\forall (t,x) \in K \times E,\ \|f(t,x)\| \leq A_K\|x\| + B_K,$$

et donc, en particulier

$$\forall t \in [t_0,\beta[,\ \|\dot{\varphi}(t)\| \leq A_K\|\varphi(t)\| + B_K\,.$$

Utilisant le lemme de Gronwall (supposons $A_K > 0$), il vient, pour $t_0 \leq t < \beta$,

$$\|\varphi(t)\| \leq \|x_0\|e^{A_K(t-t_0)} + \frac{B_K}{A_K}(e^{A_K(t-t_0)} - 1) \leq M = \|x_0\|e^{A_K(\beta-t_0)} + \frac{B_K}{A_K}(e^{A_K(\beta-t_0)} - 1)\,.$$

Par ricochet

$$\|\dot{\varphi}(t)\| \leq A_K M + B_K,\ t \in [t_0,\beta[\,.$$

Grâce aux accroissements finis et au fait que E est un Banach, on voit que $\varphi(t)$ a une limite lorsque t tend vers β. Mais alors on peut prolonger φ en une fonction continue (notée encore φ pour simplifier) et l'on a

$$\lim_{t\mapsto\beta} \varphi(t) = b = x_0 + \int_{t_0}^{\beta} \dot{\varphi}(u)du\,.$$

Ainsi (β,b) serait un bout de solution maximale, ce qui est en contradiction avec le lemme des bouts. $\diamondsuit$

Plus général que ce critère, mais aussi plus lourd à manier, nous avons la

Proposition 31.2 (critère d'existence 2). *Soit E un Banach, Ω un ouvert de $\mathbf{R} \times E$, f une fonction continue de Ω dans $\mathbf{R}$, localement Lipschitzienne par rapport à la seconde variable. Soit (t_0, x_0) un point de Ω et I un intervalle ouvert contenant t_0 et tel que toute courbe intégrale (J, φ) de l'équation $\dot{x} = f(t,x)$ passant par (t_0, x_0) (et telle que J soit relativement compact dans I) ait son graphe piégé dans une bande $J \times K_J$, où K_J est un compact de E tel que $\overline{J} \times K_J \subset \Omega$. Alors la solution maximale de $\dot{x} = f(t,x)$ sous les conditions initiales (t_0, x_0) est au moins définie dans I.*

Preuve. Supposons que la solution maximale est définie sur $]\alpha, \beta[$ et que $\beta \in I$. Prenons $J =]t_0 - \epsilon, \beta[$, de manière à ce que $\overline{J} \subset I$. Comme par hypothèses $\overline{J} \times K_J$ est compact et que $\varphi(J) \subset K_J$, il existe une valeur d'adhérence (disons b) pour une suite $(\varphi(t_n))_n$, où t_n tend vers β par valeurs inférieures. Ainsi, il y aurait un bout droit de la solution maximale (à savoir (β, b)) qui serait dans Ω, puisque le compact $\overline{J} \times K_J$ (qui contient (β, b)) est inclus dans Ω. On a une contradiction avec le lemme des bouts. On repète la preuve si $\alpha \in I$ en construisant cette fois un bout gauche de solution maximale. $\diamondsuit$

32. Les équations linéaires.

Définition 32.1. *Soit E un espace de Banach, Ω un ouvert de E, f une fonction continue de Ω dans E. On dit que l'équation différentielle*

$$\dot{x} = f(t,x) \qquad (*)$$

(posée dans Ω) est linéaire si $\Omega = I \times E$, avec I intervalle de $\mathbf{R}$, et s'il existe une application A continue de I dans $\mathcal{L}(E,E)$, une application B continue de I dans E, telles que

$$f(t,x) = A(t).x + B(t)\,.$$

Lorsque $B \equiv 0$, on dit que l'équation est homogène, ou encore sans second membre; sinon, on dit que l'équation est une équation linéaire avec second membre.

Exemple 32.1 (et définition). Une équation d'ordre k du type

$$x^{(k)} = A_0(t).x + \cdots + A_{k-1}(t).x^{(k-1)} + B(t)\,,$$

(posée dans $I \times E^k$, I étant un intervalle de $\mathbf{R}$), où $A_0, \ldots, A_{k-1}$ sont des applications continues de I dans $\mathcal{L}(E,E)$, B une application continue de I dans E, sera dite *équation linéaire d'ordre k*.

Le premier résultat essentiel concerne l'espérance de vie des solutions maximales.

Théorème 32.1. *Soit E un espace de Banach, I un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$, A une fonction continue de I dans $\mathcal{L}(E,E)$, B une fonction continue de I dans E. Pour tout point $(t_0, x_0) \in I \times E$, il existe une et une seule solution maximale du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t).x + B(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

définie dans I tout entier.

Preuve. On applique la proposition 31.1 (exemple 31.1). $\diamondsuit$

Corollaire 32.1. *Soit E un espace de Banach, I un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$, A une fonction continue de I dans $\mathcal{L}(E,E)$. L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions maximales de l'équation linéaire sans second membre*

$$\dot{x} = A(t).x \tag{$\dagger$}$$

est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel isomorphe à E au sens algébrique. Si B est une application continue de I dans E, l' ensemble $\widetilde{\mathcal{S}}$ des solutions maximales de l'équation linéaire avec second membre

$$\dot{x} = A(t).x + B(t) \tag{$\dagger\dagger$}$$

est le $\mathbf{R}$-espace affine

$$(I, \varphi_0) + \mathcal{S}$$

où (I_0, φ_0) est une solution maximale particulière de l'équation inhomogène ($\dagger\dagger$) et $\mathcal{S} \simeq E$ l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène

$$\dot{x} = A(t).x$$

associée.

Preuve. Il est évident que $\mathcal{S}$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel, avec les opérations

$$\lambda_1(I, \varphi_1) + \lambda_2(I, \varphi_2) = (I, \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2),\ \ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}\,.$$

Fixons $t_0 \in E$ et considérons l'application

$$\pi_{t_0}:\ \mathcal{S} \mapsto E\ (I, \varphi) \mapsto \varphi(t_0)$$

À cause du théorème 32.1, cette application est linéaire et bijective, c'est un isomorphisme algébrique entre $\mathcal{S}$ et E. Le fait que $\widetilde{\mathcal{S}}$ soit un $\mathbf{R}$ espace vectoriel affine du type $(I, \varphi_0) + \mathcal{S}$, où (I, φ_0) est une solution maximale particulière de l'équation ($\dagger\dagger$) est évident. $\diamondsuit$

Exemples 32.2. Si E est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension p, l'espace $\mathcal{S}$ est un $\mathbf{R}$ espace vectoriel de dimension p. Si E est un espace vectoriel de dimension p, I un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$, $A_0, ..., A_{k-1}$ des applications continues de I dans $\mathcal{L}(E,E)$, l'ensemble des solutions maximales de l'équation d'ordre k homogène

$$x^{(k)} = A_0(t).x + \cdots + A_{k-1}(t).x^{(k-1)}$$

est un $\mathbf{R}$ espace vectoriel de dimension pk. En particulier, si $p = 1$ (resp. $p = 2$) et $a_0, ..., a_{k-1}$ sont des applications continues de I dans $\mathbf{R}$ (resp. $\mathbf{C}$), l'espace des fonctions k fois dérivables sur I, à valeurs dans $\mathbf{R}$ (resp. $\mathbf{C}$), est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension k (resp. $2k$). Si l'on ajoute un second membre, les espaces vectoriels de solutions deviennent des espaces affines (avec bien sûr comme dimension la dimension de l'espace vectoriel sous-jacent).

Étant donnée une équation linéaire homogène

$$\dot{x} = A(t).x \tag{$\dagger$}$$

(posée dans $I \times E$), où A est continue de I dans $\mathcal{L}(E,E)$, on peut définir *la résolvante* de l'équation (†) comme l'application

$$R: \ I \times I \mapsto \mathrm{GL}(E)$$

(ici $\mathrm{GL}(E)$ désigne le groupe des isomorphismes au sens algébrique de E dans lui même, sans aucune continuité en jeu) définie par

$$R(t_1, t_2) = \pi_{t_1} \circ (\pi_{t_2})^{-1}$$

($R(t_1, t_2).x$ est la valeur en t_1 de la solution maximale de l'équation avec conditions initiales $x(t_2) = x$).

Pour une équation linéaire avec second membre

$$\dot{x} = A(t).x + B(t) \tag{††}$$

(toujours posée dans $I \times E$), on appelle *résolvante* de léquation (††) la résolvante de l'équation sans second membre

$$\dot{x} = A(t).x \tag{†}$$

correspondante.

On a immédiatement les règles de calcul suivantes pour la résolvante de l'équation (†):

$$\begin{aligned} &R(t,t) = \mathrm{Id}_E, \ t \in I \\ &R(t_2, t_1) \circ R(t_1, t_0) = R(t_2, t_0), \ t_0, t_1, t_2 \in I \\ &[R(t_1, t_2)]^{-1} = R(t_2, t_1), \ t_1, t_2 \in I \end{aligned} \tag{32.1}$$

En fait, comme on pouvait le pressentir, la résolvante d'une équation linéaire prend ses valeurs dans $\mathrm{Iso}(E,E)$, ouvert de $\mathcal{L}(E,E)$ constitué des isomorphismes (cette fois bicontinus) de E dans lui même. C'est l'objet du lemme suivant

Lemme 32.1. *Soit E un espace de Banach, I un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$, A une fonction continue de I dans $\mathcal{L}(E,E)$, B une fonction continue de I dans E. Si $R : I \times I \mapsto \mathrm{GL}(E)$ désigne la résolvante de l'équation*

$$\dot{x} = A(t).x + B(t), \tag{††}$$

on a $R(t_1, t_2) \in \mathrm{Iso}(E,E)$ pour tout t_1, t_2 dans I.

Preuve. Soit $\mathbf{A}$ l'application

$$I \mapsto \mathcal{L}(\mathcal{L}(E,E), \mathcal{L}(E,E))$$

définie par

$$\mathbf{A}(t).u = A(t) \circ u, \ u \in \mathcal{L}(E,E)\,.$$

Comme
$$\|A(t)\circ u\| \le \|A(t)\|\,\|u\|,\ t\in I,$$
l'application $\mathbf{A}$ est linéaire continue de I dans $\mathcal{L}(\mathcal{L}(E,E),\mathcal{L}(E,E))$. On peut considérer l'équation différentielle homogène (posée dans $I\times\mathcal{L}(E,E)$)
$$\dot u = \mathbf{A}(t).u\,. \tag{32.2}$$
Soit $t_1,t_2\in I$ et (I,u_{t_2}) la solution maximale du problème de Cauchy
$$\begin{cases}\dot u = \mathbf{A}(t).u\\ u(t_2)=\mathrm{Id}_E\end{cases}$$
On a, si $x\in E$,
$$\frac{d}{dt}\,[u_{t_2}.x] = \dot u_{t_2}.x = A(t).(u_{t_2}.x),$$
ce qui montre que
$$(I,u_{t_2}.x)$$
est une solution du problème de Cauchy
$$\begin{cases}\dot x = A(t).x\\ x(t_2)=x\end{cases}$$
Elle coincide donc avec $(I,R(\cdot,t_2).x)$ et l'on a
$$R(t_1,t_2).x = u_{t_2}(t_1).x,$$
d'où $R(t_1,t_2)=u_{t_2}(t_1)\in\mathcal{L}(E,E)$. Comme l'inverse est $u_{t_1}(t_2)$, on a bien $R(t_1,t_2)\in \mathrm{Iso}(E,E)$. $\diamondsuit$

Remarque 32.1. On a montré aussi ici que si t_0 est fixé dans I, l'application
$$t\mapsto R(t,t_0)=u_{t_0}(t)$$
est C^1 de I dans $\mathcal{L}(E,E)$. Il en est de même pour l'application
$$t\mapsto R(t_1,t)=[R(t,t_1)]^{-1}$$
(par la chain-rule, puisque $T\mapsto T^{-1}$ est un difféomorphisme C^∞ de $\mathrm{Iso}(E,E)$ sur lui même). L'application
$$(t,t')\mapsto R(t,t')=R(t,t_0)\circ R(t_0,t')$$
est donc C^1 de $I\times I$ dans $\mathcal{L}(E,E)$ car elle admet des dérivées partielles continues. Ceci nous autorisera à manipuler la résolvante dans des expressions intégrales, telles que par exemple la formule de Lagrange suivante.

Proposition 32.1 (formule de Lagrange). *Soit E un espace de Banach, I un intervalle ouvert de* $\mathbf{R}$*, A une fonction continue de I dans $\mathcal{L}(E,E)$, B une fonction continue de I dans E et $R : I \times I \mapsto \mathrm{Iso}(E,E)$ la résolvante de l'équation*

$$\dot{x} = A(t).x + B(t), \tag{††}$$

La solution maximale du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t).x + B(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

est donnée par

$$\varphi(t) = R(t,t_0).x_0 + \int_{t_0}^{t} R(t,u).B(u)du\,. \tag{32.3}$$

Preuve. On a immédiatement $\varphi(t_0) = x_0$ et il suffit donc de prouver que φ est solution de l'équation (††). On peut écrire

$$\varphi(t) = R(t,t_0).x_0 + R(t,t_0)\int_{t_0}^{t} R(t_0,u).B(u)du = R(t,t_0).\Big(x_0 + \int_{t_0}^{t} R(t_0,u).B(u)du\Big) \tag{32.4}$$

On trouve en dérivant par rapport à t

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(t) &= A(t)\circ R(t,t_0).x_0 + A(t)\circ R(t,t_0).\Big(\int_{t_0}^{t} R(t_0,u).B(u)du\Big) + R(t,t_0)\circ R(t_0,t).B(t) \\ &= A(t).\dot{\varphi}(t) + B(t), \end{aligned}$$

ce qui prouve ce que l'on voulait. La méthode que nous venons de développer et qui consiste (voir par exemple (32.4)) à rechercher la solution (I,φ) sous la forme

$$\varphi(t) = R(t,t_0).C(t)$$

avec la contrainte $C(t_0) = x_0$ s'appelle *méthode de variation des constantes* (la "constante" variable est ici la fonction C). Nous reviendrons un peu plus loin sur cette méthode lorsque E est de dimension finie. $\diamondsuit$

Exemple 32.2. Le cas où la fonction A est constante.

Comme E est un espace de Banach, la série de fonctions

$$X \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!}\,,\ \mathcal{L}(E,E) \mapsto \mathcal{L}(E,E)$$

est une série normalement convergente (sur toute partie bornée) dans l'espace de Banach $\mathcal{C}(\mathcal{L}(E,E),\mathcal{L}(E,E))$; elle converge donc vers une fonction continue

$$X \mapsto \exp(X)\,.$$

Cette fonction exponentielle est d'ailleurs de classe C^1 et l'on a

$$d(\exp(X)).H = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} dX^k.H$$

où

$$dX^k.H = H \circ X^{k-1} + X \circ H \circ X^{k-2} + \cdots + X^{k-2} \circ H \circ X + X^{k-1} \circ H$$

(ici bien sûr

$$X^k = X \overset{k \text{ fois}}{\circ \cdots \circ} X \,.)$$

L'exponentielle, comme on le voit en différentiant respectivement les applications

$$t \mapsto \exp(-tX) \circ \exp(tX)$$

et

$$t \mapsto \exp(-X) \circ \exp(X + tY) \circ \exp(-tY)$$

satisfait $[\exp(X)]^{-1} = \exp(-X)$ et, *seulement* si X et Y commutent, aussi

$$\exp(X + Y) = \exp(X) \exp(Y) \,.$$

Cette fonction exponentielle va nous permettre d'exprimer la résolvante d'une équation

$$\dot{x} = A.x + B(t)$$

où $A \in \mathcal{L}(E, E)$ et B est une fonction continue de I dans E. On vérifie immédiatement si $t_0 \in \mathbf{R}$, $x_0 \in E$, que

$$\frac{d}{dt}[e^{(t-t_0)A}.x_0] = Ae^{(t-t_0)A}.x_0,$$

ce qui prouve, lorsque $t_0 \in I$, que

$$t \mapsto e^{(t-t_0)A}.x_0$$

est la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = A.x \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

posé dans $I \times \mathbf{R}$. Dans ce cas la résolvante de l'équation

$$\dot{x} = A.x + B(t)$$

(posée dans $I \times E$) est

$$(t, t') \mapsto \exp((t - t')A) \,.$$

La formule de Lagrange nous donne dans ce cas, pour la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases},$$

(posé dans $I \times \mathbf{R}$)

$$\varphi(t) = \exp((t - t_0)A) + \int_{t_0}^{t} \exp((t-u)A).B(u)du\,.$$

On reviendra sur cette exemple dans le cas où E sera de dimension finie (section 33).

33. Le cas où E est de dimension finie p

Lorsque E est de dimension finie p, l'espace des solutions d'une équation linéaire homogène

$$\dot{x} = A(t).x \tag{†}$$

(posée dans $I \times E$, A étant continue de I dans $\mathcal{L}(E, E) \simeq \mathcal{M}_{p,p}(\mathbf{R})$) est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension p. Connaitre toutes les solutions revient à connaitre une base de solutions indépendantes.

Définition 33.1. *Soit $(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$ un système de p solutions maximales de (†). On appelle Wronskien de ce système la fonction*

$$w(t) = \det(\varphi_1(t), ..., \varphi_p(t))\,,$$

le déterminant étant normalisé une fois pour toutes une fois qu'une base particulière $\mathcal{B}_0$ de l'espace des solutions de (†) a été choisie.

En fait, soit le wronskien est identiquement nul, soit il ne s'annule jamais comme le montre la

Proposition 33.1. *Si $(\varphi_1, ..., \varphi_p)$ est une base de l'espace des solutions de l'équation (†) (on dit aussi un système fondamental) et t_0 un point de I, on a*

$$w(t) = (\det(R(t, t_0)))w(t_0) = w(t_0)\exp\Big(\int_{t_0}^{t} \mathrm{Tr}\,(A(u))du\Big) \tag{33.1}$$

Si le wronskien est identiquement nul, les solutions $(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$ sont liées.

Preuve. Si l'on note $W(t)$ la matrice des vecteurs $(\varphi_1(t), ..., \varphi_p(t))$ dans la base $\mathcal{B}_0$ de l'espace des solutions, on a

$$W(t) = R(t, t_0)W(t_0)$$

pourvu que $R(t, t_0)$ représente la matrice de $R(t, t_0) \in \mathcal{L}(E, E)$ lorsque E est rapporté à $\mathcal{B}_0$. En prenant les déterminants, on a bien

$$w(t) = (\det R(t, t_0))w(t_0).$$

On a d'autre part

$$R(t+h,t_0)\circ R(t_0,t) = (R(t,t_0) + h\frac{d}{dt}R(t_0,t) + \mathbf{o}(|h|))\circ R(t_0,t) = \mathrm{Id}_E + hA(t) + \mathbf{o}(|h|)\,.$$

En prenant le déterminant

$$\det R(t+h,t_0)\det R(t_0,t) = 1 + h\mathrm{Tr}\,(A(t)) + \mathbf{o}(|h|)\,.$$

On a donc

$$\frac{d}{dt}\det(R(t,t_0)) = \mathrm{Tr}(A(t))\ \det(R(t,t_0)),\ \det(R(t_0,t_0)) = 1.$$

Ceci donne

$$\det R(t,t_0) = \exp\Big(\int_{t_0}^{t}\mathrm{Tr}\,(A(u))du\Big)$$

et conclut donc la preuve de (33.1). $\diamondsuit$

Exemple 33.1. Application aux équations d'ordre k.

Nous supposerons ici $E = \mathbf{R}$ et nous nous intéresserons à l'équation différentielle

$$x^{(k)} = a_0(t)x + \cdots + a_{k-1}(t)x^{(k-1)} + b(t) \tag{33.2}$$

où les fonctions a_j et la fonction b sont continues sur un intervalle ouvert I de $\mathbf{R}$, à valeurs dans $\mathbf{R}$. Le wronskien d'un système $(\varphi_1, ..., \varphi_k)$ de solutions est la fonction

$$w = w[\varphi_1, ..., \varphi_n] : t \mapsto \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \dots & \dots & \dots & \varphi_k(t) \\ \dot\varphi_1(t) & \dots & \dots & \dots & \dot\varphi_k(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_1^{(k-2)}(t) & \dots & \dots & \dots & \varphi_k^{(k-2)}(t) \\ \varphi_1^{(k-1)}(t) & \dots & \dots & \dots & \varphi_k^{(k-1)}(t) \end{vmatrix}$$

La formule (33.1) devient

$$w(t) = w(t_0)\exp\Big(\int_{t_0}^{t} a_{k-1}(u)du\Big) \tag{33.3}$$

Enfin, si l'on connait une base de solutions $(\varphi_1, ..., \varphi_k)$, on peut en calculer le Wronskien $w[\varphi_1, ..., \varphi_k] = w$, exprimer aussi la résolvante $R(t,t_0)$ par

$$R(t,t_0) = W(t).W(t_0)^{-1}$$

où

$$W(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \dots & \dots & \dots & \varphi_k(t) \\ \dot\varphi_1(t) & \dots & \dots & \dots & \dot\varphi_k(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_1^{(k-2)}(t) & \dots & \dots & \dots & \varphi_k^{(k-2)}(t) \\ \varphi_1^{(k-1)}(t) & \dots & \dots & \dots & \varphi_k^{(k-1)}(t) \end{pmatrix}$$

désigne la matrice Wronskienne, enfin écrire la formule de Lagrange pour la solution de l'équation du premier ordre correspondante

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_0(t) & a_1(t) & \dots & \dots & a_{k-2}(t) & a_{k-1}(t) \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

telle que $X(t_0) = X_0 = (x_0, \dot{x}_0, ..., x_0^{(k-1)})$. La formule de Lagrange nous donne

$$X(t) = R(t, t_0).X_0 + \int_{t_0}^{t} W(t).W(u)^{-1}(B(u))du\,. \tag{33.4}$$

En ne conservant que la première ligne de l'identité matricielle, on trouve que la solution φ du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x^{(k)} = a_0(t)x + \cdots + a_{k-1}(t)x^{(k-1)} + b(t) \\ x(t_0) = x_0, \dots, x^{(k-1)}(t_0) = x_0^{(k-1)} \end{cases}$$

est donnée par

$$\varphi(t) = \varphi_0(t) + \sum_{l=1}^{k} \varphi_l(t) \int_{t_0}^{t} \frac{b(u)w_l(u)}{w(u)} du$$

où par définition w_l, $l = 1, \dots, k$, est le déterminant obtenu à partir du Wronskien w en remplacant la colonne d'indice l par la colonne

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et φ_0 est la solution du problème de Cauchy homogène

$$\begin{cases} x^{(k)} = a_0(t)x + \cdots + a_{k-1}(t)x^{(k-1)} \\ x(t_0) = x_0, \dots, x^{(k-1)}(t_0) = x_0^{(k-1)} \end{cases}$$

Exemple 33.2: équations $\dot{x} = A.x + B$ lorsque $E = \mathbf{R}^p$.

On reprend ici l'exemple développé dans la section 32 (exemple 32.2) mais cette fois en supposant que $E = \mathbf{R}^p$. Il est plus aiser en fait de complexifier le problème en travaillant plutôt avec $E = \mathbf{C}^p$, considéré comme $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension p. L'espace des solutions de l'équation homogène pensée en ces termes ($E = \mathbf{C}^p$ comme $\mathbf{C}$-espace vectoriel) est de dimension complexe p (l'application π_{t_0} est $\mathbf{C}$-linéaire et toujours bijective). Lorsque $E = \mathbf{C}^p$, le calcul de l'exponentielle d'une matrice A de type (p,p) (qui représente dans ce cas A) se fait après avoir écrit $A = PJP^{-1}$, où J est une matrice

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & J_{l-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & J_l \end{pmatrix}$$

dont les blocs diagonaux sont des blocs de Jordan, c'est à dire des matrices J_j, $j = 1, ..., l$, de la forme

$$J_j = \lambda_j \mathrm{Id}_{\mu_j, \mu_j} + N_j$$

avec N_j nilpotente et triangulaire supérieure (en fait constituée de 1 ou de 0 sur la sur-diagonale) et λ_j valeur propre de A. On a alors

$$\exp A = P(\exp \widetilde{A})P^{-1}$$

et donc, dans ce cas

$$\exp((t-t')A) = P(\exp(t-t')\widetilde{A})P^{-1}\,.$$

Il est cependant plus rapide dans le cas où $E = \mathbf{C}^p$ (plutôt que de Jordaniser la matrice et d'utiliser ensuite la formule de Lagrange) de chercher directement la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = A.x + B(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

via la méthode de variation des constantes en s'appuyant sur le fait que les solutions de l'équation homogène sont de la forme

$$\varphi(t) = \sum_{j=1}^{l} e^{\lambda_j t} \Big(\sum_{\nu_j = 0}^{\mu_j - 1} \vec{c}_{j,\nu_j} t^j \Big) \tag{32.5}$$

où les $\vec{c}_{j,\nu_j}$ sont dans $\mathbf{R}^p$ et

$$\prod_{j=1}^{l} (\lambda - \lambda_j)^{\mu_j}$$

est le polynôme caractéristique de A. On substitue alors, j étant fixé,

$$x(t) = e^{\lambda_j t} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \end{pmatrix}, \ c_1, ..., c_p \in \mathbf{R},$$

dans l'équation

$$\dot{x} = A.x$$

ce qui nous donne un sytème linéaire que l'on résout en déterminant autant de solutions indépendantes que possibles. On continue ensuite, si l'on n'a pas su trouver que $n_j < \mu_j$ solutions indépendantes, en substituant cette fois

$$x(t) = e^{\lambda_j t}\begin{pmatrix} c_{11} + tc_{12} \\ \vdots \\ c_{p1} + tc_{p2} \end{pmatrix},\ c_{11}, c_{12}, ..., c_{p1}, c_{p2} \in \mathbf{R},$$

et en cherchant de nouvelles solutions indépendantes (et indépendantes de celles déjà trouvées),etc... Dès que l'on a réussi (en augmentant progressivement le degré des expressions polynomiales en t) à trouver μ_j solutions indépendantes de la forme

$$x(t) = e^{\lambda_j t}\Big(\sum_{\nu_j=0}^{\mu_j-1} \vec{c}_{j,\nu_j} t^j\Big),$$

on passe à une autre valeur propre. En opérant avec les diverses valeurs propres, on trouve ainsi une base de solutions pour l'équation homogène, à priori base de solutions à valeurs complexes, l'espace des solutions étant muni de sa structure de $\mathbf{C}$-espace vectoriel. Si A est réelle, on peut rester dans le cadre réel en remarquant qu'il est aiser de construire avec le procédé décrit ci dessus une base de solutions réelles. Il n'y a pas de problème avec les étapes de la construction où l'on opère avec une valeur propre λ_j réelle. En revanche, lorsque l'on a trouvé en opérant avec la valeur propre $\lambda_j \notin \mathbf{R}$ un système indépendant

$$(\varphi_{\lambda_j,1}, ..., \varphi_{\lambda_j,\mu_j})$$

enrichissant le système précédemment obtenu, on le remplace par le système

$$(\mathrm{Re}(\varphi_{\lambda_j,1}), ..., \mathrm{Re}(\varphi_{\lambda_j,\mu_j}), \mathrm{Im}(\varphi_{\lambda_j,1}), ..., \mathrm{Im}(\varphi_{\lambda_j,\mu_j}))$$

et bien sûr on ne prendra plus en considération l'autre valeur propre $\overline{\lambda}_j$. En nous pliant à ce processus, nous construisons bien un système libre de p solutions réelles.

Une fois la base $(\varphi_1, ..., \varphi_p)$ construite, on utilise la méthode de variations des constantes pour déterminer une solution

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{p} c_k(t)\varphi_k(t)$$

de l'équation inhomogène.

EXERCICES

Produits scalaires, Espaces de Hilbert

1. Rappeler la définition des espaces $l^p(\mathbf{N}) = l^p(\mathbf{N}, \mathbf{C})$ pour $p \geq 1$. Calculer, pour $\epsilon > 0$,

$$\|(\epsilon, 0, 0, \cdots) + (0, 1, 0, \cdots)\|_p^2 .$$

Montrer que, si $p \neq 2$, la norme sur $l^p(\mathbf{N})$ ne dérive pas d'un produit scalaire.

2. Soient $x_1, \ldots, x_N$ N éléments d'un espace préhilbertien H, tels que

$$\|x_i - x_j\| \geq \epsilon, \; i, j \in \{1, \ldots, N\} .$$

Montrer que le rayon minimal d'une boule centrée en l'origine et contenant tous les x_j est au moins $\epsilon\sqrt{\frac{N-1}{2N}}$. On montrera pour cela (par récurrence sur N) que

$$\sum_{i<j} \|x_i - x_j\|^2 = N \sum_{i=1}^{N} \|x_i\|^2 - \|\sum_{i=1}^{N} x_i\|^2 .$$

3. Soit H un espace préhilbertien et $(x_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ une famille *presque orthogonale*, i.e il existe une suite $(\omega(n))_{n\in\mathbf{N}}$ de réels positifs avec $\sum_n \omega(n) < \infty$ telle que

$$| < x_{n_1}, x_{n_2} > | \leq \omega(|n_1 - n_2|) , \; n_1, n_2 \in \mathbf{Z} .$$

a. Montrer que, si $(a_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ est une suite de nombres complexes telle que $\sum_n |a_n|^2 < \infty$, alors, pour tout $p \in \mathbf{Z}$, la famille $(a_n a_{n+p})_{n\in\mathbf{Z}}$ est sommable, et

$$\Big| \sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n a_{n+p} \Big| \leq \sum_n |a_n|^2 .$$

b. Montrer que, si $C = \sum_{n\in\mathbf{N}} \omega(n)$, alors, pour toute famille finie d'entiers $A \subset \mathbf{Z}$, pour toute famille de nombres complexes $(\lambda_i)_{i\in A}$, on a

$$\| \sum_{i\in A} \lambda_i x_i \| \leq C \big(\sum_{i\in A} |\lambda_i|^2 \big)^{1/2} .$$

c. On considère l'espace préhilbertien $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{T})$ des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ et 2π périodiques de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$, avec le produit scalaire

$$< f_1, f_2 >= \int_0^{2\pi} f_1(t) \overline{f_2(t)} dt .$$

Soit $(m_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ une famille d'éléments de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{T})$ dont les dérivées jusqu'à l'ordre 2 sont uniformément bornées (par rapport à k) sur $[0,2\pi]$. Montrer (en utilisant de judicieuses intégrations par parties) que l'opérateur linéaire de *modulation d'amplitude* défini par

$$T(e^{ikt}) = \phi_k(t),\ \phi_k(t) = m_k e^{ikt},\ k\in\mathbf{Z},$$

satisfait, pour tout polynôme trigonométrique $P=\sum_k c_k e^{ikt}$,

$$\|T(P)\| \leq C\big(\sum_k |c_k|^2\big)^{1/2}$$

pour une certaine constante positive C.

4. On considère l'espace H des fonctions F de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$ de la forme

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

où $a_k z^k$, $k\in\mathbf{N}$, est le terme général d'une série entière de rayon de convergence infini (F est une fonction *holomorphe* de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$), telles que de plus

$$\int\int_{\mathbf{R}^2} |f(z)|^2 e^{-|z|^2} dxdy < \infty.$$

a. Montrer que l'application Φ de $H\times H$ dans $\mathbf{C}$ définie par

$$\Phi(f_1,f_2) = \frac{1}{\pi}\int\int_{\mathbf{R}^2} f_1(z)\overline{f_2(z)} e^{-|z|^2} dxdy\,.$$

définit bien un produit scalaire sur H. Montrer que la collection $(z^n)_{n\in\mathbf{N}}$ définit une famille orthogonale pour ce produit scalaire. Calculer en fonction de ses coefficients a_k le carré de la norme du polynôme

$$P(z)=\sum_{k=0}^{N} a_k z^k\,.$$

Calculer la norme (relativement à ce produit scalaire) des fonctions $f(z)=e^z$, $f(z)=\cos z$, $f(z)=\sin z$.

b. Montrer, en utilisant l'inégalité de Bessel, que si $F\in H$ et $F(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, alors

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 k! < \infty\,.$$

En déduire la densité des polynômes dans H.

c. Vérifier, pour tout élément F de H, la formule

$$F(z) = < F, e^{\zeta\,\overline{z}} >, z\in\mathbf{C},$$

après avoir vérifié au préalable que

$$\zeta \mapsto e^{\zeta\,\overline{z}}$$

est dans H pour tout $z \in \mathbf{C}$.

5. Soit $N \in \mathbf{N}$ et E_N l'espace des fonctions affines par morceaux sur $[0,1]$, avec noeuds aux points (k/N), $k = 0, \dots, N$ et à valeurs réelles. Déterminer une base orthonormée de E_N relativement au produit scalaire

$$< f_1, f_2 >= \int_0^1 f_1(t) f_2(t) dt$$

(on vérifiera bien qu'il s'agit d'un produit scalaire).

6. Montrer qu'il existe une suite de constantes positives $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que les polynômes

$$P_n(t) = c_n \frac{d^n}{dt^n}\big[(1-t^2)^n\big],\ n \in \mathbf{N},$$

forment un système orthonormé dans l'espace des fonctions continues sur $[-1,1]$ et à valeurs complexes, équipé du produit scalaire

$$< f_1, f_2 >:= \int_{-1}^1 f_1(t)\overline{f_2(t)} dt\,.$$

7. On considère l'espace des fonctions continues sur $\mathbf{R}$, telles

$$\int_{\mathbf{R}} |f(t)|^2 e^{-t^2} dt < \infty\,.$$

Montrer que l'on définit sur cet espace une structure d'espace préhilbertien grâce au produit scalaire (on vérifiera que c'en est bien un)

$$< f_1, f_2 >:= \int_{\mathbf{R}} f_1(t)\overline{f_2(t)} e^{-t^2} dt\,.$$

Montrer que les polynômes d'Hermite, définis par

$$H_n(t) = 2^{-n/2}\pi^{-1/4}(n!)^{-1/2}(-1)^n e^{t^2}\Big(\frac{d}{dt}\Big)^n [e^{-u^2}](t)\,,\ n \in \mathbf{N}^*\,, H_0(t) = \pi^{-1/4}$$

définissent bien une système orthonormé dans cet espace.

8. Soit E le $\mathbf{C}$-espace vectoriel des polynômes trigonométriques, c'est à dire de fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$, de la forme

$$f(t) = \sum_{j=1}^N \alpha_j e^{i\lambda_j t}$$

où les λ_j sont des nombres réels.
a. Montrer que l'on définit un produit un produit scalaire sur E en posant

$$< f_1, f_2 >:= \lim_{a \mapsto +\infty} \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} f_1(t)\overline{f_2(t)}dt$$

(on montrera l'existence de cette limite) et que l'on a

$$\|f\|^2 = \sum_{j=1}^{N} |\alpha_j|^2$$

si $f(t) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j e^{i\lambda_j t}$, avec les λ_j distincts.
b. Vérifier que le système $(e^{i\lambda t})_{\lambda \in \mathbf{R}}$ est un système orthonormé et donner un exemple d'espace de Hilbert non séparable.

10. Soit H un espace préhilbertien avec une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$. On considère le sous espace fermé A engendré par les $(e_{2p})_{p\in\mathbf{N}}$ et le sous espace fermé B engendré par les $(e_{2p} + \frac{1}{p+1}e_{2p+1})_{p\in\mathbf{N}}$.
a. Montrer que

$$\sup_{x\in A\setminus\{0\}, y\in B\setminus\{0\}} \frac{|< x, y >|}{\|x\|\|y\|} = 1\,,$$

(ce que l'on exprime en disant que A et B font entre eux un angle nul).
b. Montrer que $\overline{A + B} = H$ et que le vecteur

$$\sum_{p\in\mathbf{N}} \frac{e_{2p+1}}{p+1}$$

(dont on justifiera l'existence dans H) ne peut être dans $A + B$; en déduire que $A + B$ n'est pas fermé.
c. Montrer que si H est un Hilbert et si F_1 et F_2 sont deux sous espaces fermés de H tels que

$$\sup_{x\in F_1\setminus\{0\}, y\in F_2\setminus\{0\}} \frac{|< x, y >|}{\|x\|\|y\|} < 1\,,$$

alors la somme $F_1 + F_2$ est aussi fermée.

11. Soit H un espace de Hilbert séparable et $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite bornée de H. Montrer qu'il existe une sous suite de la suite (x_n) et un vecteur x de H tel que, pour tout $z \in H$, on ait

$$\lim_{n\mapsto\infty} < x_n - x, z >= 0\,.$$

12. Soit E l'espace de Banach $\mathcal{C}([0, 1], \mathbf{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme et M l'ensemble

$$M := \{f \in E,\ \int_0^{1/2} f(t)dt - \int_{1/2}^{1} f(t)dt = 1\}\,.$$

Montrer que M est un convexe fermé mais qu'il n'y a aucun élément f_0 de M en lequel la norme réalise son minimum sur M. Conclure.

Opérateurs et espaces de Hilbert

13. Soit $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite décroissante de convexes fermés non vides d'un espace de Hilbert H. Que fait la suite (x_n) des projections orthogonales d'un même élément x sur les F_n?

14. Soit H un espace préhilbertien et P une application de H dans H telle que

$$\begin{cases} P(P(x)) = P(x),\ x \in H \\ < P(x), y > = < x, P(y) >,\ x, y \in H \end{cases} \tag{$*$}$$

Montrer qu'il existe un sous espace fermé F tel que $H = F \oplus F^{\perp}$ et que P soit la projection orthogonale sur F.

15. Soient P_1 et P_2 deux opérateurs de projection orthogonaux d'un Hilbert H sur deux sous espaces fermés F_1 et F_2.
a. Prouver que $P_1 + P_2$ est un opérateur de projection orthogonale sur un certain sous espace fermé si et seulement si $F_1 \perp F_2$.
b. Prouver que $P_1 - P_2$ est un opérateur hermitien positif, c'est à dire un opérateur satisfaisant

$$\forall z \in H,\ < (P_1 - P_2)(z), z > \geq 0,$$

si et seulement si $F_2 \subset F_1$.

16. Soit H un espace de Hilbert et $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'applications de H dans H vérifiant la condition $(*)$ de l'exercice 14. On suppose que les P_j commutent deux à deux et vérifient $P_i \circ P_j = 0$ pour tous indices i et j distincts. Montrer que, pour tout $x \in H$, la famille des $(P_n(x))$ est sommable et que $x \mapsto \sum_n P_n(x)$ est un opérateur de projection sur un sous espace que l'on précisera. La famille (P_n) est elle sommable dans $\mathcal{L}(H, H)$ équipé de la norme d'opérateur?

17. Soit F une partie convexe fermée d'un espace de Hilbert complexe H, a un élément de H, a^* un élément du dual H^*. Montrer qu'il existe un élément x de E réalisant le minimum de la fonction

$$z \mapsto \mathrm{Re}\left(\|z - a\|^2 + a^*(z)\right).$$

18. Soit T un opérateur linéaire continu d'un Hilbert H dans lui même. Montrer que l'orthogonal du noyau de T est aussi l'adhérence de l'image de T^*.

19. Soit T une contraction linéaire d'un espace de Hilbert H.
a. Montrer que les points fixes de T sont aussi ceux de T^*.
b. Montrer (en utilisant le résultat de l'exercice 18) que

$$H = \mathrm{Ker}\,(Id - T) \oplus \overline{\mathrm{Im}(Id - T)}\,.$$

c. Montrer, pour tout $x \in H$, que

$$\lim_{n\mapsto\infty} \frac{1}{n+1}(x + T(x) + \cdots + T^n(x)) = \mathrm{Proj}_{\mathrm{Ker}\,(Id-T)}(x)$$

20. On considère l'espace $l^2(\mathbf{Z})$. Quel est l'adjoint de l'opérateur de translation $x \mapsto T(x)$, où $(T(x))_n = x_{n-1}$?

21. Soit H un espace de Hilbert complexe et T un opérateur compact de H dans lui même. Soit $\delta > 0$. Montrer qu'il ne peut exister de suite (x_n) de vecteurs indépendants et de suite de nombres complexes (λ_n) telles que

$$\begin{cases} T(x_n) = \lambda_n x_n \\ |\lambda_n| \geq \delta \end{cases}$$

En déduire que le spectre de T (c'est à dire l'ensemble Λ des nombres complexes λ tels que $T - \lambda Id$ soit non injectif) est soit fini, soit peut être rangé en une suite convergent vers 0.

22. Soit H un espace de Hilbert réel (que l'on supposera séparable) et K un convexe fermé borné de H, non vide.
a. Montrer que toute application Lipschitzienne de K dans lui même, de constante de Lipschitz $k < 1$, admet un unique point fixe x dans K.
b. Soit T une application de K dans K, lipschtizienne et de constante de Lipschtitz 1. Soit $a \in K$. Que peut-on dire, pour chaque $\alpha \in]0,1[$, de l'application de K dans K définie par

$$F_\alpha(x) = \alpha T(x) + (1-\alpha)a \ ?$$

Montrer qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de K telle que $u_n - Tu_n$ tende vers 0 et telle qu'il existe un vecteur $v = v(a) \in H$ avec

$$\forall z \in H\,,\ \lim_{n\mapsto\infty} < z, u_n >=< z, v > \ .$$

c. Soit $x \in H$; montrer qu'il existe un unique point $y \in K$ tel que

$$< x - y, z - y >\leq 0,\ \forall z \in K\,.$$

On appellera ce point $P(x)$.
d. Montrer que le vecteur v du (b) est bien dans K.
e. Montrer que, pour tous x_1, x_2 dans K, on a

$$< x_1 - Tx_1, x_1 - x_2 > + < x_2 - Tx_2, x_2 - x_1 > \geq 0\,,$$

puis que

$$\forall z \in K\,,\ < z - Tz, z - v >\geq 0\,.$$

En prenant $z = v + s(Tv - v)$, $s \in]0,1[$, en déduire que v est un point fixe de T.
f. Montrer que l'ensemble des points fixes de T est un convexe fermé C inclus dans K et que v est la projection de a sur ce convexe C.

23. Soit K une fonction de $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{Z}$ telle que

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}}\sum_{m\in\mathbf{Z}}|K(n,m)|^2<\infty\,.$$

Montrer que, si $u=(u_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ est dans $l^2(\mathbf{Z})$, on définit bien un nouvel élément de $l^2(\mathbf{Z})$ en posant

$$v_n=\sum_{m\in\mathbf{Z}}K(n,m)u_m\,.$$

Montrer que l'opérateur qui à u fait correspondre $v=(v_n)$ est bien un opérateur continu de l'espace de Hilbert $l^2(\mathbf{Z})$ dans lui même. Quel est l'adjoint de cet opérateur?

24. Soit I un ensemble d'indices et E l'espace de Hilbert $l^2(I,\mathbf{C})$; soit $(k_i)_{i\in I}$ un élément de $l^\infty(I)$. Quel est l'adjoint de l'opérateur de E dans E (on montrera d'abord que c'en est bien un!) défini par

$$(x_i)_{i\in I}\mapsto(k_ix_i)_{i\in I}\ \ ?$$

25. Soit H un espace de Hilbert complexe et $(e_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ une base hilbertienne de cet espace; soit $(f_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ un système d'éléments de H tel qu'il existe $\theta\in]0,1[$ avec, pour toute partie finie J de $\mathbf{Z}$, pour toute famille $(a_j)_{j\in J}$ de nombres complexes

$$\|\sum_{j\in J}a_j(e_j-f_j)\|^2\leq\theta^2\sum_{j\in J}|a_j|^2\,.$$

a. Montrer que pour tout $x\in H$, la série $\sum_{n\in\mathbf{Z}}<x,e_n>(e_n-f_n)$ converge vers un élément $K(x)$ de H.
b. Montrer que l'application $x\mapsto K(x)$ définit un opérateur linéaire continu de H dans lui même et que l'opérateur $T:=Id-K$ admet un inverse continu.
c. Montrer que, pour tout $x\in H$,

$$x=\sum_{n\in\mathbf{Z}}<T^{-1}x,e_n>f_n\,.$$

d. Soit $n\in\mathbf{Z}$; montrer que l'on définit un unique vecteur g_n réalisant

$$\forall m\in\mathbf{Z}\,,\ <e_m,g_n>=<T^{-1}(e_m),e_n>\ .$$

Montrer que l'on a, pour tout $n,m\in\mathbf{Z}$,

$$<f_n,g_m>=\begin{cases}0\text{ si }m\neq n\\1\text{ si }m=n\end{cases}$$

c'est à dire que le système est bi-orthonormé.
e. Montrer que tout x de H se représente sous la forme

$$x=\sum_{n\in\mathbf{Z}}<x,g_n>f_n=\sum_{n\in\mathbf{Z}}<x,f_n>g_n\,.$$

26. a. Pourquoi la fonction $1-\sqrt{1-t}$ est-elle uniformément approchable par des polynômes sur $[0,1]$? Montrer que la suite de polynômes définie par récurrence par

$$P_0=0,\ P_{n+1}=\frac{1}{2}(1-t+P_n^2)$$

réalise une telle approximation.
b. Soit H un espace de Hilbert et T un opérateur continu et autoadjoint positif, c'est à dire tel que $<Tx,x>\geq 0$ pour tout $x\in H$. Montrer que si $x,y\in H$,

$$|<Tx,y>|^2\leq <Tx,x><Ty,y>\ .$$

c. On suppose de plus que T est de norme inférieure ou égale à 1. Montrer que la suite d'opérateurs définie par

$$T_0=0,\ T_{n+1}=\frac{1}{2}(I-T+T_n^2)$$

est une suite d'opérateurs hermitiens satisfaisant $0\leq <T_nx,x>\leq \|x\|^2$ pour tout $x\in H$ et que l'on a $<(T_n-T_m)x,x>\geq 0$ si $n\geq m$ (on dit que la suite est croissante). En déduire que pour tout $x\in H$, $T_n(x)$ converge vers une limite $L(x)$ (on montrera au préalable en utilisant le (c) que cette suite est de Cauchy). Montrer que L est un opérateur continu tel que $(\mathrm{Id}-L)^2=T$.
d. Montrer que tout polynôme à coefficients réels positif sur $[0,1]$ peut s'écrire $q_0(t)+tq_1(t)+(1-t)q_2(t)$, où q_0,q_1,q_2 sont des sommes de carrés de polynômes à coefficients réels.
e. Soit p un polynôme à coefficients réels. Montrer que

$$p(T)+\sup_{[0,1]}|p(u)|Id$$

est un opérateur hermitien positif et en déduire

$$\|p(T)\|\leq \sup_{[0,1]}|p(u)|\,.$$

f. En utilisant le théorème de Stone-Weierstrass, montrer que l'on peut définir un opérateur $f(T)$ si f est une fonction continue sur $[0,1]$ et que cet opérateur est aussi hermitien.

27. On considère une fonction continue K de $[0,1]\times[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ et l'opérateur T défini sur l'espace préhilbertien réel $\mathcal{C}([0,1],\mathbf{R})$ équipé du produit scalaire

$$<f,g>=\int_0^1 f(t)g(t)dt\,.$$

a. Montrer que l'opérateur

$$T:\ f\mapsto Tf,\ Tf(t)=\int_0^1 K(t,u)f(u)du$$

est un opérateur continu sur H et peut se prolonger à un opérateur $\widetilde{T}$ continu d'un complété $\widetilde{H}$ dans lui même.
b. Montrer en utilisant le théorème d'Ascoli que tout sous espace propre de $\widetilde{T}$ associé à une valeur propre non nulle est de dimension finie.
c. Montrer en utilisant le théorème de Stone-Weierstrass que $\widetilde{T}$ est limite d'opérateurs de rang fini; en déduire que $\widetilde{T}$ est un opérateur compact (l'image de la boule unité de $\widetilde{H}$ est relativement compacte dans $\widetilde{H}$).
d. Retrouver à partir du (c) le résultat du (b).

28. Soit H l'espace préhilbertien réel des fonctions continuement différentiables de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ équipé du produit scalaire

$$< x, y >= \int_0^1 (x'(t)y'(t) + x(t)y(t))dt$$

(on vérifiera qu'il s'agit bien d'un produit scalaire).
a. Montrer que H est un espace de Hilbert séparable (on se servira du théorème de Stone-Weierstrass).
b. Montrer que toute $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de Cauchy dans H converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction continue u (non nécessairement différentiable) de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$. Montrer que si $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy dans H ayant même limite que $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dans un complété $\widetilde{H}$ de H, alors la suite $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge aussi vers u et en déduire que le complété $\widetilde{H}$ s'identifie à un sous espace de l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ de $\mathbf{R}$.
c. Soit q une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ et α, β, deux nombres réels; montrer que la fonction Φ de H dans $\mathbf{R}$ définie par

$$\Phi(x) = \int_0^1 (x'^2(t) + q(t)x^2(t))dt - \alpha x(0)^2 - \beta x(1)^2$$

est continue sur H et que la borne inférieure μ de Φ sur $S = \{x \in H, \int_0^1 x^2(t)dt = 1\}$ est finie.
d. Montrer que toute suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de S telle que $\Phi(x_n)$ converge vers μ est forcément bornée dans H. Montrer qu'étant donnée une telle suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, il existe une suite extraite d'une telle suite et convergent uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction continue u (qui elle n'a aucune raison d'être dans $\widetilde{H}$).
e. Montrer que Φ est une forme quadratique sur $[0,1]$; on note Ψ la forme bilinéaire correspondante. Vérifier que pour toute telle fonction z, pour tout réel ξ,

$$\lim_{n\mapsto\infty} \frac{\Phi(x_n + \xi z)}{\int_0^1 (x_n(t) + \xi z(t))^2 dt} \geq \mu.$$

En déduire que pour toute fonction z de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ nulle ainsi que ses premières dérivées en 0 et en 1, on a, pour tout $z \in H$

$$\Psi(x, z) = -\int_0^1 x(t)z''(t)dt + \int_0^1 q(t)x(t)z(t)dt\,.$$

En déduire, si u désigne la fonction continue du (d), que

$$\int_0^1 (u(t)z''(t) - q(t)u(t)z(t) + \mu u(t)z(t))dt = 0$$

pour toute fonction z de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ nulle ainsi que ses premières dérivées en 0 et en 1.
f. Montrer que, si y est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ dont la dérivée seconde est $t \mapsto q(t)u(t) - \mu u(t)$ (u désignant toujours la fonction précédente), alors on a, pour toute fonction z de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ nulle ainsi que ses premières dérivées en 0 et en 1,

$$\int_0^1 (u(t) - y(t))z''(t)dt = 0\,. \qquad (*)$$

Montrer que si p est un polynôme de degré 1 convenable, il existe une fonction z de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$, de dérivée seconde $u - y - p$ et telle que $z(0) = z(1) = z'(0) = z'(1)$. En utilisant alors (*), montrer que $u - y$ est un polynôme de degré 1. En déduire que la fonction u du (d) est de classe $\mathcal{C}^2$, satisfait l'équation différentielle

$$u'' - qu + \mu u = 0$$

et que u est bien un élément de S.
g. Vérifier que, pour tout $z \in H$, on a, si u désigne la fonction précédente

$$\forall \xi \in \mathbf{R},\ \Phi(u + \xi z) \geq \mu \int_0^1 (u(t) + \xi z(t))^2 dt$$

et en déduire que u vérifie aussi les conditions *initiales*

$$\begin{cases} u'(0) = -\alpha u(0) \\ u'(1) = \beta u(1) \end{cases}$$

Calcul différentiel

29. Une application d'un espace vectoriel normé E dans un espace normé F est dite homogène de degré r si, pour tout $x \in E$, pour tout $t > 0$, $f(tx) = t^r x$.
a. Montrer que si f est différentiable sur E, $x \mapsto df(x)$ est aussi homogène de E dans $\mathcal{L}(E,F)$, cette fois de degré $r - 1$.
b. Montrer que, toujours dans ce cas, on a l'identité d'Euler:

$$df(x).x = rf(x)\,.$$

30. Soit E un espace vectoriel normé.
a. Montrer que l'application $f : x \mapsto \|x\|$ n'est pas dérivable en 0.

b. Montrer que si cette application est dérivable en $x \neq 0$, on a $df(x).x = \|x\|$, $\|df(x)\| = 1$, et, pour tout $t \in \mathbf{R}^*$, $df(tx) = \text{sign}(t)f(x)$.

31. À quelle condition sur $\alpha > 0$ la fonction définie dans le plan par $f(0,0) = 0$ et

$$f(x,y) = \frac{|xy|^\alpha}{(x^2+y^2)}$$

est elle différentiable en tout point? La fonction g définie dans le plan par $g(0,0) = 0$ et

$$g(x,y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2+y^2}$$

admet-elle des dérivées partielles suivant toute direction en tout point? Est-ce qu'elle est différentiable en tout point?

32. Montrer, si E est l'espace vectoriel des matrices réelles (n,n), que toutes les applications

$$A \mapsto A^k,\ \ k \in \mathbf{N}^*$$

sont différentiables en tout point. Calculer leur différentielle.

33. Soit H un espace de Hilbert réel, T un opérateur linéaire continu de H dans lui même. Montrer que l'application

$$x \mapsto < T(x), x >$$

est différentiable en tout point; calculer la différentielle.

34. Soit f une application d'un ouvert de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$. Comparer les notions de différenbilité en un point $z_0 = (x_0, y_0)$ au sens réel ou au sens complexe (suivant que l'on considère E comme espace vectoriel de dimension 1 sur $\mathbf{C}$ ou de dimension 2 sur $\mathbf{R}$).

35. On considère l'ouvert Ω des matrices inversibles dans l'espace E des matrices réelles (n,n) et Φ l'application de Ω dans $\mathcal{L}(E,E)$

$$X \mapsto \Phi(X) :\ H \mapsto XHX^{-1}\,.$$

Montrer que Φ est différentiable en tout point; calculer la différentielle de Φ au point I_n.

36. Si E est l'espace des matrices réelles (n,n), montrer que l'application

$$A \mapsto \det A$$

est différentiable en tout point et calculer sa différentielle. Calculer la différentielle en I_n.

37. On considère l'espace normé E des matrices réelles de type (n,n) et l'application exponentielle

$$X \mapsto \exp(X) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!}\,.$$

a. Montrer que l'application

$$t \mapsto \exp(-tX).\exp(tX)$$

est différentiable en tout point et calculer sa différentielle. En déduire

$$\exp(-X) = \exp(X)^{-1}.$$

b. Même question lorsque X et Y sont dans E, avec l'application

$$t \mapsto \exp(-X).\exp(X+tY).\exp(-tY).$$

En déduire que si X et Y commutent, $\exp(X+Y) = \exp(X)\exp(Y)$.
c. Montrer que, si X et Y sont dans E,

$$\|\exp(X) - \exp(Y)\| \leq \|X-Y\| \max(\exp\|X\|, \exp\|Y\|).$$

d. Montrer que si X est une matrice inversible, la différentielle au point X de l'application

$$X \mapsto \det X$$

est l'application linéaire

$$H \mapsto \det X\ \mathrm{Tr}\,(X^{-1}H).$$

En déduire la formule

$$\det \exp(X) = e^{\mathrm{Tr}\,X}.$$

38. Soit U un ouvert convexe d'un espace vectoriel normé et f une fonction convexe et différentiable dans U; montrer que, si $df(x_0) = 0$, x_0 est un minimum global de f sur U.

39. Soit f une bijection d'un ouvert U de $\mathbf{R}^n$ dans un ouvert de $\mathbf{R}^m$ telle que f soit différentiable dans U et f^{-1} dans U'. Montrer que $m = n$.

40. Soit H un espace de Hilbert réel et f une application différentiable de H dans H, telle que $x \mapsto df(x)$ est continue de E dans $\mathcal{L}(H,H)$. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ avec

$$< df(x).h, h > \geq \alpha \|h\|^2,\ x, h \in H.$$

a. Montrer que pour tout $a, b \in H$, on a

$$< f(b) - f(a), b - a > \geq \alpha \|b-a\|^2$$

en utilisant la fonction de $\mathbf{R}$ dans lui même

$$t \mapsto < f((1-t)a + tb), b - a > .$$

b. Montrer que f est une application fermée (l'image directe d'un fermé est encore un fermé).
c. Montrer que, pour tout x de E, $\operatorname{Im} f'(x)$ est un sous espace dense de H. Montrer que $f'(x)$ est bijective pour tout x de E.
d. Dans le cas où $H = \mathbf{R}^2$, montrer que, pour tout a dans H, on a

$$\lim_{\|x\| \mapsto \infty} \|f(x) - a\|^2 = +\infty$$

et en déduire qu'il existe x_0 réalisant le minimum de cette fonction. Que peut-on dire de $f(x_0)$? Montrer que f est bijective, et que l'inverse de f est continu sur E.
e.On revient au cas général. Montrer, en utilisant le théorème d'inversion locale, que f est une application ouverte, puis que f est bijective, enfin que l'inverse de f est continuement différentiable dans H.

41. Soit f une application de l'espace vectoriel normé E des matrices (n, n) dans lui même, de la forme

$$f(X) = \varphi(X^2) + X\,,$$

où φ est une application différentiable de E dans E, nulle en 0, avec $\|d\varphi(x)\| \leq 1$ pour tout X de E.
a. Montrer que f est différentiable en tout point et calculer $df(X)$.
b. Soient A et X_0 deux éléments de E avec $\|A\| < 1/4$ et $\|X_0\| < 1/2$. Montrer que $\|X_0 - (f(X_0) - A)\| < 1/2$.
c. On suppose à partir de maintenant que $\sup_E \|d\varphi(x)\| < 1$. Soit $(X_n)_n$ la suite de matrices définie à partir de X_0 via la relation de récurrence

$$X_{n+1} = X_n - (f(X_n) - A)\,.$$

Après avoir montré

$$\|X_{n+1} - X_n\| < \frac{1}{2}\|X_n - X_{n-1}\|,$$

montrer la convergence de la suite (X_n) vers une matrice X telle que $f(X) = A$.
d. Montrer que f admet un inverse continu à droite dans la boule ouverte de rayon 1/4.

42. Soit E une algèbre de Banach sur $\mathbf{R}$; montrer que l'application

$$x \mapsto f_1(x) := -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$$

est définie et différentiable dans la boule unité ouverte de E et que l'application

$$x \mapsto f_2(x) =: \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

est définie et différentiable dans E. Montrer que dans les deux cas, l'application $x \mapsto df_j(x)$ est continue (dans la boule ouverte de rayon 1 dans le premier cas, dans E dans le second cas). En calculant la dérivée de

$$t \mapsto f_2(f_1(tx)),\ t \in [0, 1],$$

montrer que

$$f_2(f_1(x)) = 1 - x,\ \|x\| < 1\,.$$

43. Soit H un espace de Hilbert réel, $a \in \mathbf{H}$, non nul, et f la fonction de H dans $\mathbf{R}$ définie par

$$f(x) =< a, x > \exp(-\|x\|^2)\,.$$

Vérifier que f est deux fois différentiable, calculer le gradient de f et la différentielle seconde en tout point.

44. Soit H un espace de Hilbert réel et $a \neq 0$ un élément de H. On considère la fonction de H dans $\mathbf{R}$ définie par

$$f(x) =< a, x > e^{-\|x\|^2}\,.$$

a. Montrer que f est différentiable sur H, calculer son gradient, puis les points critiques, c'est à dire les points où le gradient s'annule.
b. Montrer que f est deux fois différentiable et calculer $D^2 f(x)$. Déterminer si les points critiques du (a) sont des extréma locaux (maximum ou minimum) ou non.

45. a. Soit f une application de classe C^2 d'un intervalle I de $\mathbf{R}$, à valeurs dans un espace de Banach F, telles qu'il existe deux constantes C_0 et C_2 avec

$$\|f(t)\| \leq C_0,\ \|f''(t)\| \leq C_2,\ t \in I\,.$$

Montrer, en utilisant une formule de Taylor à l'ordre 2 pour $f(t+h)-f(t)$ et $f(t-h)-f(t)$ que l'on a

$$\|f'(t)\| \leq \frac{C_0}{h} + C_2 h/2$$

si $[t-h, t+h] \subset I$.
b. Soit f une fonction indéfiniment différentiable d'un intervalle I de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, telle que l'on ait, pour tout entier positif ou nul p, pour tout $t \in I$,

$$\|f^{(2p)}(t)\| \leq M(2p)!C^p$$

où M et C sont deux constantes strictement positives. Trouver en utilisant le (a) une majoration pour les

$$\|f^{(2p+1)}(t)\|,\ p \in \mathbf{N},\ t \in I\,.$$

c. Montrer que la série de Taylor de la fonction f introduite dans (b) converge au voisinage de tout point t_0 de I dans un intervalle que l'on précisera.

46. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie dans un ouvert convexe U de $\mathbf{R^n}$, à valeurs dans $\mathbf{R}^m$. Montrer qu'il existe des fonctions $g_1, \ldots, g_n$ continues dans $U \times U$ telles que

$$f(x) - f(y) = \sum_{k=1}^{n} g_k(x,y)(x_k - y_k),\ x, y \in U\,.$$

47. Soient E, F, G trois espaces vectoriels normés, U un ouvert de E, V un ouvert de F, f une application de U dans V, g une application de V dans G; on suppose f trois fois différentiable en x_0, g trois fois différentiable en $f(x_0)$. Montrer que $h = g \circ f$ est trois fois différentiable en x_0 et que

$$\begin{aligned}
&D^3 f(h_1, h_2, h_3) = \\
&= dg(f(x_0).[D^3 f(x_0).(h_1, h_2, h_3)] + D^2 g(f(a)).(df(x_0).h_1, D^2 f(x_0).(h_2, h_3))+ \\
&+ D^2 g(f(a)).(df(x_0).h_2, D^2 f(x_0).(h_1, h_3)) + D^2 g(f(a)).(df(x_0).h_3, D^2 f(x_0).(h_1, h_2))+ \\
&+ D^3 g(f(x_0)).(df(x_0).h_1, df(x_0).h_2, df(x_0).h_3)\,.
\end{aligned}$$

48. Écrire la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2 pour la fonction

$$(x, y) \mapsto \sin(xy)\,.$$

49. Rechercher les extréma locaux de la fonction

$$(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mapsto 3xy - x^3 - y^3\,.$$

Équations différentielles

50. (*La méthode d'Euler*) Soient $t_0 < t_1$ et A trois nombres réels et f une fonction continue de $[t_0, t_1] \times \mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$; étant donné un entier $p \in \mathbf{N}$, on note h_p le pas

$$h_p = \frac{t_1 - t_0}{2^p};$$

ainsi l'intervalle $[t_0, t_1]$ se trouve t'il subdivisé en 2^p intervalles consécutifs de longueur h_p. Étant donné un élément quelconque $t \in [t_0, t_1]$, on notera $t_{[p]}$ l'élément défini par

$$t_{[p]} = t_0 + nh_p\,,$$

n désignant l'unique entier positif tel que

$$t_0 + nh_p < t \leq t_0 + (n+1)h_p\,.$$

On introduit enfin la suite de fonctions $(x_p)_{p\in\mathbf{N}}$ définies sur $[t_0, t_1]$ par

$$\begin{cases} x_p(t_0) = A \\ x_p(t) = x_p(t_{[p]}) + (t - t_{[p]}) f(t_{[p]}, x_p(t_{[p]})) \end{cases},$$

où les nombres $x_p(t_{[p]})$ sont calculés comme les nombres de la suite récurrente

$$\begin{cases} u_0 = A \\ u_{n+1} - u_n = h_p f(t_0 + nh_p, u_n) \end{cases}$$

a. On suppose que la fonction f est telle qu'il existe une constante L avec, pour tout $t \in [t_0, t_1]$, pour tout $u_1, u_2 \in \mathbf{R}$,

$$|f(t, u_1) - f(t, u_2)| \leq L|u_1 - u_2| \,. \tag{$*$}$$

Montrer que la suite des nombres $x_p(t_{[p]})$ est uniformément bornée et qu'il en est de même de la suite de fonctions (x_p).

b. Montrer que la suite de fonctions (x_p) est uniformément convergente sur $[t_0, t_1]$ (après avoir montré qu'elle était uniformément de Cauchy).

c. Montrer que

$$x_p(t) - A = \int_{t_0}^{t} f_p(s) ds \,,$$

où

$$f_p(t) = \begin{cases} f(t_0, A)\,, \ t = x_0 \\ f(t_{[p]}, x_p(t_{[p]}))\,, \ t_0 < t \leq t_1 \,. \end{cases}$$

Prouver enfin que la suite de fonctions f_p converge vers la fonction

$$t \mapsto f(t, x(t))\,,$$

où x et la limite de la suite x_n; en conclure que x est en fait de classe $\mathcal{C}^1$ et est solution de l'équation différentielle

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t))$$

avec la condition initiale $x(t_0) = A$.

d. En quoi cette construction est-elle plus explicite que celle proposée dans l'énoncé de Peano (sans bien sûr l'hypothèse (*))?

51. (*À propos du théorème de Peano*) Soit E l'espace de Banach des suites $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de nombres réels tendant vers 0 à l'infini. On considère l'application f de E dans E telle que

$$f((x_n)_{n \in \mathbf{N}}) = (y_n)_{n \in \mathbf{N}} \,, \ y_n = |x_n|^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{n+1} \,.$$

a. Montrer que f est continue de E dans E.

b. On suppose que x est une fonction définie dans un voisinage I de 0, à valeurs dans E ($x = (x_n)$), avec les x_n, $n \in \mathbf{N}$ à valeurs réelles et de classe $\mathcal{C}^1$ dans I, telle que

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ \forall n \in \mathbf{N}, \ x_n'(t) = f(x(t))_n \end{cases}$$

Calculer $x_n(t)$ pour $t \in I$, $t > 0$ et montrer que la suite $(x_n(t))_{n \geq 0}$ ne peut tendre vers 0 à l'infini.

c. La conclusion du (c) est-elle en contradiction avec le théorème de Peano?

52. (*Le principe de comparaison*) Soient φ et ψ deux fonctions continues de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ telles que $\varphi < \psi$; soient c et d deux nombres réels; montrer qu'il existe un intervalle I contenant c et deux fonctions u et v de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, avec, pour tout $t \in I$,

$$\dot{u}(t) = \varphi(t, u(t)), \ \dot{v}(t) = \psi(t, v(t))$$

ainsi que $u(c) = v(c) = d$. Comparer, pour tout t dans I, les valeurs de $u(t)$ et de $v(t)$ (on montrera $v > u$ à droite de c, $v < u$ à gauche).

53. (*Le principe de bouts*) Soit $t_0 > 0$ et γ un nombre réel.
a. Déterminer la solution maximale de l'équation

$$\dot{x} = \gamma^2 + x^2$$

sous la condition initiale $x(t_0) = 0$.
b. Soit $]\alpha, \beta[$ l'intervalle de définition de la solution maximale du problème de Cauchy

$$\dot{x} = t + x^2, \ x(t_0) = 0\,.$$

Montrer en utilisant le (a) et l'exercice 52 que β est fini et que si $\alpha > 0$, la solution tend vers $-\infty$ si t tend vers α par valeurs supérieures. Montrer que si $t_0 > 3$, alors $\alpha > 0$. Montrer enfin que si t_0 tend vers l'infini, $\beta - t_0$ et $t_0 - \alpha$ sont équivalents à $\pi/(2\sqrt{t_0})$.

54. Faire un portrait de phases (c'est à dire donner l'allure des courbes intégrales) pour l'équation différentielle

$$\dot{x} = \sqrt{|1 - x^2|}\,. \qquad (*)$$

Donner la forme des solutions maximales. Dans quel domaine Ω faut-il poser le problème de la résolution de l'équation (*) pour qu'il y ait unicité de la solution maximale de tout problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{|1 - x^2|} \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad (**)$$

(avec $(t_0, x_0) \in \Omega$, le problème (**) étant posé dans Ω).

55. Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 2x_3 \\ \dot{x}_3 = 2x_1 - x_2 \end{cases}$$

56. Résoudre l'équation du second ordre

$$3\,\ddot{x} + 4\dot{x} - x = \operatorname{ch}(3t)\,.$$

57. Soient E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie, f une fonction continue de $\mathbf{R}$ dans E, A une fonction continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathcal{L}(E, E)$. On suppose que f et A sont T-périodiques,

avec $T > 0$.
a. Montrer que les solutions maximales (I, φ) de l'équation

$$\dot{x} = A(t)x + f(t) \tag{†}$$

sont telles que $I = \mathbf{R}$; montrer que, si $(\mathbf{R}, \varphi)$ est une telle solution, φ est périodique si et seulement si $\varphi(0) = \varphi(T)$.
b. Montrer que si l'équation homogène

$$\dot{x} = A(t).x$$

n'admet pas de solution maximale périodique non nulle, alors l'équation avec second membre (†) admet une unique solution maximale $(\mathbf{R}, \varphi)$ telle que φ soit périodique.

58. Soit V un champ de vecteurs de classe C^1 sur $\mathbf{R}^n$; on suppose que les solutions maximales de

$$\dot{x} = V(x) \tag{†}$$

sont définies sur $\mathbf{R}$ tout entier et que V vérifie

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}^n,\ < V(x_1) - V(x_2), x_1 - x_2 >\geq 0\,.$$

Montrer que, si $(\mathbf{R}, \varphi)$ est une solution maximale de (†) et si $\lim\limits_{t \mapsto +\infty} \varphi(t) = \alpha \in \mathbf{R}^n$, alors $V(\alpha) = 0$.

59. **a.** Soient A et B deux fonctions continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ telles que $A + {}^tB = 0$. Comparer les résolvantes des équations $\dot{x} = Ax$ et $\dot{x} = Bx$.
b. On suppose que A est une application continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, telle que pour tout t, $A(t)$ est une matrice antisymétrique. Soit X_0 une matrice (n, n) orthogonale. Montrer que la solution $t \mapsto X(t)$ du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{X} = A(t).X(t) \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

prend ses valeurs dans le sous groupe des matrices (n, n) réelles orthogonales.

60. Soient a et b deux fonctions continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$; soit l'équation différentielle

$$\ddot{x} + a(t)\dot{x} + b(t)x = 0\,. \tag{†}$$

a. Montrer que les solutions maximales (I, φ) de (†) sont telles que $I = \mathbf{R}$ et que les zéros de φ sont isolés.
b. Montrer que, si $(\mathbf{R}, \varphi)$ et $(\mathbf{R}, \psi)$ sont deux solutions indépendantes de (†), φ et ψ n'ont aucun zéro commun. En étudiant la fonction φ/ψ, montrer que si α et β sont deux zéros consécutifs de φ, ψ s'annule dans $]\alpha, \beta[$.
c. Soit c une fonction continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ majorant la fonction b et soit (††) l'équation différentielle

$$\ddot{x} + a(t)\dot{x} + c(t)x = 0\,. \tag{††}$$

Montrer, si $(\mathbf{R}, \varphi)$ est solution de $(\dagger)$ et $(\mathbf{R}, \psi)$ solution de $(\dagger\dagger)$, que si α et β sont deux zéros consécutifs de φ, ψ s'annule dans $]\alpha, \beta[$ [*on étudiera* $\psi\dot{\varphi} - \dot{\psi}\varphi$].

d. On suppose que b est une fonction continue de $\mathbf{R}$ dans $[\omega^2, \Omega^2]$, où $0 < \omega < \Omega < \infty$. Montrer que les solutions $(\mathbf{R}, \varphi)$ de

$$\ddot{x} + b(t)x = 0$$

sont telles, lorsque $\varphi \not\equiv 0$, que φ admet une infinité de zéros, deux zéros consécutifs α et β satisfaisant toujours

$$\frac{\pi}{\Omega} \leq \beta - \alpha \leq \frac{\pi}{\omega}\,.$$