Mémoire original

J. Optics (Paris), 1983, vol. *14*, n° 2, pp. 75-82

UNIVERSITY OF MARYLAND
College Park (U.S.A.) (*)

UNIVERSITY OF MICHIGAN
Ann Arbor (U.S.A.) (**)

ECOLE POLYTECHNIQUE
Palaiseau (France) (***)

CENTRE DE MATHÉMATIQUES DE L'ECOLE POLYTECHNIQUE
« LABORATOIRE DE RECHERCHE ASSOCIÉ AU C.N.R.S. N° 169 »
Plateau de Palaiseau, 91128 Palaiseau (France)

SUR QUELQUES FORMULES EXPLICITES DE DÉCONVOLUTION

C. A. BERENSTEIN (*), B. A. TAYLOR (**), A. YGER (***)

MOTS CLÉS :
Déconvolution, Bezout

KEY WORDS :
Deconvolution, Bezout

On some explicit deconvolution formulas

SUMMARY : Our aim is to solve here the following problem : given several measuring devices defined by convolution with distributions $\mu_1, ..., \mu_m$ of compact support in $\mathbb{R}^n$ one would like to construct *explicitly* deconvolutors, i.e. distributions $\nu_1, ..., \nu_m$, also of compact support, such that :

$$\mu_1 * \nu_1 + \cdots + \mu_m * \nu_m = \delta$$

where $*$ designes the convolution operation; such distributions $\nu_1,..., \nu_m$ define measuring devices which, as soon as they have been constructed, allow us to reconstruct exactly an arbitrary signal $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ which was measured through the original devices defined by convolution with distributions $\mu_1, ..., \mu_m$. By explicit, we mean that $\nu_1, ..., \nu_m$ be given by formulas involving the $\mu_1, ..., \mu_m$, convolution, differentiation, integration and sums. We try to solve that kind of problem under particular hypothesis on $\mu_1, ..., \mu_m$, so as to include all examples where the question was raised up to now and specially the case of the use of two optical devices whose transfert functions are $\frac{1}{\pi R_1} \frac{J_1(rR_1)}{r}$ and $\frac{1}{\pi R_2} \frac{J_1(rR_2)}{r}$, with distinct R_1 and R_2.

RÉSUMÉ : Nous nous proposons d'étudier ici le problème suivant : étant donnés plusieurs appareils, explicitement définis comme convoluteurs avec des distributions $\mu_1, ..., \mu_m$, à support compact dans $\mathbb{R}^n$, on voudrait trouver de manière *explicite*, des distributions $\nu_1, ..., \nu_m$, elles aussi à support compact dans $\mathbb{R}^n$, telles que :

$$\mu_1 * \nu_1 + \cdots + \mu_m * \nu_m = \delta$$

où $*$ désigne l'opération de convolution; les distributions $\nu_1,...,\nu_m$ ainsi construites correspondent à des appareils qui, une fois mis au point, nous permettent de trouver exactement un signal originel φ, de classe C^∞, mesuré grâce aux appareils originaux associés aux distributions μ_j, $j = 1, .., m$. Par *explicite*, nous entendons que $\nu_1, ..., \nu_m$ soient données par des formules où n'interviennent que les opérations de convolution, de différentiation, d'intégration et de sommation, opérations portant sur les distributions $\nu_1, ..., \nu_m$. Nous essaierons ici de résoudre ce type de problème sous certaines hypothèses concernant $\mu_1, ..., \mu_m$ de manière à englober tous les exemples où ce type de question a été soulevé à ce jour, en particulier celui de l'utilisation de deux appareils optiques dont les fonctions de transfert sont $\frac{1}{\pi R_1} \frac{J_1(rR_1)}{r}$ et $\frac{1}{\pi R_2} \frac{J_1(rR_2)}{r}$, avec R_1 et R_2 distincts.

INTRODUCTION

Nous nous proposons d'étudier ici le problème suivant : étant donnés plusieurs appareils, explicitement définis comme convoluteurs avec des distributions $\mu_1, ..., \mu_m$, à support compact dans $\mathbb{R}^n$, on voudrait trouver de manière explicite des distributions $\nu_1, ..., \nu_m$, elles aussi à support compact dans $\mathbb{R}^n$, telles que :

$$\mu_1 * \nu_1 + \cdots + \mu_m * \nu_m = \delta \; ; \tag{1}$$

les distributions $\nu_1, ..., \nu_m$ ainsi construites correspondent à des appareils qui, une fois mis au point, nous permettent de trouver exactement un signal originel φ, de classe C^∞, qui a été mesuré grâce aux appareils originaux associés aux distributions μ_j, $j = 1, ..., m$.

Le fait que les distributions $\nu_1, ..., \nu_m$ soient explicites signifie qu'elles sont données par des formules simples liées aux distributions $\mu_1, ..., \mu_m$ et rendant possible la construction en laboratoire d'appareils associés aux convoluteurs correspondants.

Ce type de construction est connu dans les problèmes d'optique ou de théorie du contrôle sous le nom de problème de Bezout, problème que l'on sait résoudre dans le cas où les distributions $\mu_1, ..., \mu_m$ sont toutes des distributions à support l'origine, ou, en tout cas, toutes à support ponctuel (pour $n = 1$, la solution de ce problème est donnée — *via* la transformation de Fourier — par l'algorithme d'Euclide de division des polynômes ; dans le cas où $n > 1$, un tel algorithme n'existe pas mais il peut être remplacé par des méthodes d'élimination classique [1] ou par le recours à des formules données par Berndtsson [2, 3] et basées sur des techniques de fonctions de plusieurs variables complexes). Il est clair cependant — et nous pensons par exemple aux applications de ce type de construction en optique — que l'on ne peut se limiter au cas où les distributions $\mu_1, ..., \mu_m$ sont toutes à support ponctuel ; un cas simple et fréquent est celui où les convoluteurs correspondants correspondent à des fonctions caractéristiques de sous-ensembles compacts de $\mathbb{R}^n$ (figurés par exemple par des disques plans dans le cas où $n = 2$).

Nous essaierons ici de résoudre ce type de problème explicitement, sous certaines hypothèses concernant les distributions $\mu_1, ..., \mu_m$, de manière à englober tous les exemples où ce type de question a été jusqu'à ce jour soulevé. Nous donnerons ici les formules explicites de déconvolution dans le cas où $n = 1$ et où $m = 2$ (valables aussi dans le cas de distributions planes radiales), et nous donnerons les majorations d'erreur rendant possible leur application numérique ; nous renvoyons d'autre part le lecteur à des travaux ultérieurs où nous donnerons à la fois les preuves mathématiques de ces résultats et leur extension au cas de plusieurs variables.

MM. les professeurs Berenstein et Taylor tiennent à remercier la National Science Foundation pour l'appui qu'elle leur a apporté.

SECTION 1

Nous utiliserons constamment, en ce qui concerne les distributions, les notations de Schwartz [4, 5] ; toutes les distributions intervenant ici seront à support compact dans $\mathbb{R}^n$, et l'on notera, pour une telle distribution ν et une fonction C^∞ φ :

$$\langle \nu, \varphi \rangle = \int \varphi(t)\, \nu(t)\, \mathrm{d}t\,.$$

Rappelons qu'avec ces notations, la transformée de Fourier d'une telle distribution ν est la fonction holomorphe de n variables complexes définie dans $\mathbb{C}^n$ par

$$\hat{\nu}(z) = \int \exp(-\,\mathrm{i}(t_1 z_1 + \cdots + t_n z_n))\, \nu(t)\, \mathrm{d}t\,. \tag{2}$$

Le théorème de Paley-Wiener permet de caractériser, parmi les fonctions holomorphes de n variables, les transformées de Fourier de distributions à support compact dans $\mathbb{R}^n$; ce sont les fonctions holomorphes satisfaisant une estimation du type :

$$|\, F(z)\,| \leqslant A(1 + \|\, z\,\|)^B \exp(C \textstyle\sum |\, \mathrm{Im}\, z_j\,|)\,. \tag{3}$$

Le problème (1) se ramène donc à trouver m fonctions holomorphes de n variables $G_1, ..., G_m$ satisfaisant des estimations du type (3) et la relation :

$$\hat{\mu}_1\, G_1 + \cdots + \hat{\mu}_m\, G_m = 1\,. \tag{4}$$

On veut ici de plus que l'inversion, par la transformation de Fourier, des fonctions $G_1, ..., G_m$, soit à peu près immédiate, car ce sont les distributions $\nu_1, ..., \nu_m$ associées aux fonctions G_j qui satisfont l'équation (1).

La condition (4) montre clairement que, pour que (1) admette une solution, il est nécessaire que les fonctions $\hat{\mu}_1, ..., \hat{\mu}_m$ n'aient pas de zéros communs dans $\mathbb{C}^n$; une telle condition implique en général que m soit strictement supérieur à n. On connaît d'ailleurs, grâce aux travaux de Hörmander, Kelleher-Taylor, Skoda [6, 7, 8], une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (4) et par conséquent le problème (1) admettent une solution ; cette condition est la suivante :

$$\exists \varepsilon > 0\,, \quad \exists N \geqslant 0\,, \quad \exists D \geqslant 0\,,$$

telles que

$$\forall z \in \mathbb{C}^n\,, \quad \sum_{j=1}^{m} |\, \hat{\mu}_j(z)\,| \geqslant \frac{\varepsilon}{(1 + \|\, z\,\|)^N}\, \mathrm{e}^{-D\Sigma|\mathrm{Im}\, z_j|}\,. \tag{5}$$

Malheureusement, ce résultat est un théorème d'existence dans le cadre de la théorie des fonctions holomorphes de n variables et il ne fournit pas de solution explicite au problème (1). Dans un récent article [2], Berdntsson-Andersson ont donné, sous la condition (5), des formules permettant de résoudre le problème (4) ; ces formules ne sont explicites que dans le cas où les $\hat{\mu}_j$ sont des polynômes, c'est-à-dire le cas où les μ_j sont des opérateurs différentiels à coefficients constants. Pour des raisons de commodités, nous reproduirons plus loin dans ce papier leur solution à ce problème dans le cas polynomial.

Nous avons trouvé que pour résoudre le problème (1), il fallait exhiber, parmi tous les m-uplets $(\hat{\nu}_1, ..., \hat{\nu}_m)$ solutions du problème (4), un m-uplet que l'on puisse construire grâce aux techniques d'interpolation des fonctions holomorphes ; ceci nous est possible sous des conditions plus restrictives que la condition (5).

Les deux principaux exemples que nous voudrions étudier ici sont les suivants.

Dans le premier exemple (où $n = 1$, $m = 2$), μ_1 et μ_2 correspondent à des prises de moyenne sur des segments de longueur 2 et 2 a, où a est un nombre positif. Comme dans ce cas on a

$$\hat{\mu}_1(z) = \frac{\sin z}{z} \quad \hat{\mu}_2(z) = \frac{\sin az}{az} \tag{6}$$

on voit que $\hat{\mu}_1$ et $\hat{\mu}_2$ n'ont aucun zéro commun si et seulement si a est irrationnel; par contre, la condition (5) est de nature plus subtile; elle signifie que a est mal approché par les rationnels, ou plus précisément qu'il existe un réel positif N (en fait supérieur ou égal à 2) et une constante positive C tels que

$$\left| a - \frac{P}{q} \right| \geqslant \frac{C}{|q|^N} \tag{7}$$

pour tout rationnel P/q.

Le cas optimal où $N = 2$ est satisfait par tous les nombres quadratiques non rationnels, comme $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, etc... ; tout dans cet exemple sera fait sous ces conditions optimales.

Dans le second exemple ($n = 2$, $m = 2$) μ_1 et μ_2 correspondent à la prise de moyenne sur deux disques plans de rayon R_1 et R_2 distincts. Comme on a dans ce cas

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_1(z) &= \frac{1}{\pi R_1} \frac{J_1(R_1 \sqrt{z_1^2 + z_2^2})}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}, \\ \hat{\mu}_2(z) &= \frac{1}{\pi R_2} \frac{J_1(R_2 \sqrt{z_1^2 + z_2^2})}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}} \end{aligned} \tag{8}$$

(où J_1 est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre 1 [9]), $\hat{\mu}_1$ et $\hat{\mu}_2$ n'ont aucun zéro commun si et seulement si R_1/R_2 n'est pas un quotient ξ/η de deux zéros de J_1 ; on sait par ailleurs (voir par exemple [10, 11]) que, sous cette condition, pour tout signal φ C^∞ dans le plan, les conditions $\mu_1 * \varphi = \mu_2 * \varphi = 0$ impliquent $\varphi = 0$.

Quant à la condition (5), elle est impliquée dans cet exemple par des conditions de type arithmétique analogues à (7) portant cette fois sur le quotient R_1/R_2, conditions que nous n'expliciterons pas pour le moment. Nous verrons que l'on peut expliciter les convoluteurs ν_1 et ν_2 satisfaisant (1) lorsque le quotient R_1/R_2 est un nombre entier.

Remarquons que ce second exemple se traite, puisqu'il s'agit de distributions radiales, exactement comme si nous avions affaire à un problème à une seule variable. Nous pourrions également — mais les formules sont trop compliquées pour être explicitées ici, aussi nous renvoyons pour cela le lecteur à notre publication ultérieure [12] — envisager certains autres exemples dans le cas où $n > 1$ sans que l'on puisse cette fois se ramener au cas d'une variable. Nous citerons ici le cas où μ_1, μ_2, μ_3 correspondent, dans le plan, à des prises de moyenne (ou aux problèmes optiques correspondants) sur des carrés identiques convenablement tournés par rapport au premier (les angles faits par les deux derniers carrés avec le premier étant par exemple respectivement 36° et 45°).

SECTION 2

Nous donnons ici l'énoncé d'un théorème d'interpolation de fonctions d'une variable complexe qui nous permettra de résoudre le problème 1 dans les deux exemples mentionnés ci-dessus.

Toutes les fonctions holomorphes d'une variable intervenant dorénavant seront des transformées de Fourier de distributions à support compact, caractérisées donc par la condition (3).

On considère deux fonctions F_1 et F_2 d'une variable complexe, n'ayant toutes les deux que des zéros simples, tous inclus dans une bande

$$|\operatorname{Im} z| \leqslant T((1 + \operatorname{Log}(1 + |z|)) . \tag{9}$$

On suppose de plus que les ensembles $\{ F_1 = 0 \}$, $\{ F_2 = 0 \}$ sont d'interpolation, c'est-à-dire qu'il existe deux constantes positives ε et κ telles que :

$$F_j(z) = 0 \Rightarrow |F_j'(z)| \geqslant \frac{\varepsilon}{(1 + |z|)^\kappa}, \quad j = 1, 2 . \tag{10}$$

On suppose d'autre part — et c'est ce qui joue ici le rôle de la condition (5) — qu'il existe deux constantes positives (que l'on supposera aussi être ε et κ) telles que :

$$\left\{ \begin{aligned} F_1(z) = 0 &\Rightarrow |F_2(z)| \geqslant \frac{\varepsilon}{(1 + |z|)^\kappa} \\ F_2(z) = 0 &\Rightarrow |F_1(z)| \geqslant \frac{\varepsilon}{(1 + |z|)^\kappa} . \end{aligned} \right. \tag{11}$$

On suppose également qu'il existe une suite de nombres réels positifs $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$, avec $\lim_{n \to \infty} r_n = +\infty$, une suite de courbes de Jordan Γ_n, telles que pour tout n, Γ_n soit incluse dans l'intérieur de Γ_{n+1}, et un entier M, positif, tels que :

$$\text{sur } \Gamma_n, \ |z| \sim r_n \text{ et également longueur } (\Gamma_n) \leqslant \text{constante}.r_n ; \tag{12}$$

$$\text{sur } \Gamma_n, \ |z^M F_1(z) F_2(z)| \geqslant (\text{constante}).(1 + |z|) . \tag{13}$$

Théorème : Sous les conditions (9) à (13), il existe un entier calculable p (que l'on donnera explicitement dans chacun de nos exemples) et un polynôme P (que l'on explicitera de même dans nos mêmes exemples), de degré p − 1, tels que si :

$$(14)\quad \begin{cases} G_1(z) = \displaystyle\sum_{\{F_2(\beta)=0\}} \frac{1}{\beta^p F_1(\beta) F_2'(\beta)} \frac{F_2(z)}{z-\beta} \\ G_2(z) = \displaystyle\sum_{\{F_1(\alpha)=0\}} \frac{1}{\alpha^p F_2(\alpha) F_1'(\alpha)} \frac{F_1(z)}{z-\alpha} \end{cases}$$

on ait alors l'identité :

$$(15)\quad 1 = z^p F_1(z) G_1(z) + z^p F_2(z) G_2(z) + F_1(z) F_2(z) P(z).$$

Remarque 1 : p doit simplement être choisi supérieur ou égal à M, et assez grand pour que les séries définissant G_1 et G_2 soient normalement convergentes et définissent donc des fonctions holomorphes.

Remarque 2 : La formule (15) fournit une solution explicite au problème (1) ; en effet, si $F = \hat{\mu}$, où μ est une distribution à support compact dans $\mathbb{R}$, et si γ est un zéro de F, la fonction $\dfrac{F(z)}{z-\gamma}$ est la transformée de Fourier, au sens des distributions, de la distribution à support compact $I(\mu, \gamma)$ dont l'action sur une fonction test φ s'écrit :

$$(16)\quad \langle I(\mu, \gamma), \varphi \rangle = -\mathrm{i} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^x \varphi(t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma(t-x)}\, \mathrm{d}t \right) \mu(x)\, \mathrm{d}x.$$

En utilisant ce théorème, explicitons v_1 et v_2 dans le cas des deux exemples mentionnés dans la section 1.

Exemple 1 : Il s'agit, rappelons-le, de celui où μ_1 et μ_2 sont définies par :

$$(17)\quad \langle \mu_1, \varphi \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \varphi(t)\, \mathrm{d}t, \qquad \langle \mu_2, \varphi \rangle = \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} \varphi(t)\, \mathrm{d}t,$$

avec a irrationnel quadratique.

Nous pouvons utiliser le théorème avec

$$F_1(z) = \frac{\sin z}{z}, \qquad F_2(z) = \frac{\sin az}{az};$$

dans ce cas, la condition (7) est satisfaite avec $N = 2$; la condition (10) est satisfaite avec $\varepsilon = 1$, $\kappa = 1$; la condition (11) est liée à la condition arithmétique (7) et est satisfaite avec $\kappa = 2$ et ε convenablement choisi. Les courbes Γ_n sont de petites déformations des cercles de rayon $(n + \frac{1}{2})\pi$ et la condition (13) est satisfaite lorsque $M = 4$; on obtient enfin la conclusion du théorème en prenant $p = 4$. Le polynôme P intervenant dans la formule (15) est défini par :

$$P(z) = 1 + \frac{a^2+1}{6} z^2.$$

Dans cet exemple, on peut par exemple écrire G_1 sous la forme :

$$(18)\quad G_1(z) = -H_{1,1}(z) + zH_{1,2}(z),$$

où

$$(19)\quad \begin{cases} H_{1,1}(z) = \displaystyle\sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{+\infty} (-1)^k \frac{a^3}{\pi^3 k^3 \sin\left(\dfrac{k\pi}{a}\right)} F_2(z) \\ H_{1,2}(z) = \displaystyle\sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{+\infty} (-1)^k \frac{a^3}{\pi^3 k^3 \sin\left(\dfrac{k\pi}{a}\right)} \frac{F_2(z)}{z - \dfrac{k\pi}{a}}. \end{cases}$$

L'écriture de G_1 sous la forme (18) et celle, tout à fait symétrique, de G_2, nous permettent d'expliciter ici v_1 et v_2 ; on peut prendre :

$$(20)\quad v_1 = -S_2 \frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}x^4} \mu_2 - \mathrm{i} \frac{\mathrm{d}^5}{\mathrm{d}x^5} \left[\sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{+\infty} (-1)^k \frac{a^3}{\pi^3 k^3 \sin \dfrac{k\pi}{a}} I\left(\mu_2\ \frac{k\pi}{a}\right) \right].$$

où

$$S_2 = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{+\infty} (-1)^k \frac{a^3}{\pi^3 k^3 \sin \frac{k\pi}{a}};$$

(21) $$v_2 = -S_1 \frac{d^4}{dx^4}\mu_1 - i\frac{d^5}{dx^5}\left[\sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{+\infty} (-1)^k \frac{a}{(k\pi)^3 \sin(ak\pi)} I(\mu_1, k\pi)\right] + \mu_1 - \frac{a^2+1}{6}\frac{d^2}{dx^2}\mu_1,$$

où

$$S_1 = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{+\infty} (-1)^k \frac{a}{(k\pi)^3 \sin(ak\pi)}.$$

Cet exemple a déjà été envisagé par Meisters et Richtmyer [13] grâce à une méthode *ad hoc* reposant sur l'utilisation des séries de Fourier.

Exemple 2 : Il s'agit cette fois du cas où μ_1 et μ_2 sont des distributions à support compact dans $\mathbb{R}^2$ définies par :

(22) $$\langle \mu_j, \varphi \rangle = \frac{1}{\pi R_j^2}\iint_{\|t\|\leq R_j} \varphi(t_1, t_2)\, dt_1\, dt_2, \qquad j = 1, 2,$$

où le quotient R_1/R_2 est un nombre entier différent de 1.

Remarque 3 : Cela n'est pas tout à fait vrai car on ne sait rien de la nature arithmétique des quotients des zéros de fonctions de Bessel. Il se pose ici seulement le problème de vérifier que l'entier R_1/R_2 n'est pas un quotient de zéros de la fonction J_1 ; en regardant une table numérique des zéros de J_1 (par exemple [9], p. 748), on trouve sans difficultés que tous les entiers R_1/R_2 de 2 à 7 conviennent (on renvoie ici à [12] pour tous les détails); un calcul informatique a été effectué en moins de 2 s et assure que tous les nombres de 2 à 200 conviennent.

Nous utilisons dans ce cas le théorème avec :

(23) $$F_j(z) = \frac{1}{\pi R_j}\frac{J_1(R_j z)}{z}, \qquad j = 1, 2.$$

La condition (7) est encore satisfaite avec $N = 2$; la condition (10) est remplie pour $\kappa = \frac{3}{2}$ et ε convenablement choisi ; la condition (11) est liée à la condition arithmétique (7) et est cette fois satisfaite lorsque $\kappa = \frac{5}{2}$ pour un choix convenable de ε. Les courbes Γ_n sont les cercles de rayon $n\pi/R_1$ lorsque n est suffisamment grand et la condition (13) est satisfaite avec $M = 4$; on obtient dans ce cas la conclusion du théorème en prenant $p = 6$.

Le polynôme P intervenant dans la formule (15) est défini par :

$$P(z) = 4\pi^2\left(1 + \frac{R_1^2 + R_2^2}{8} z^2 + \frac{2R_1^4 + 3R_1^2 R_2^2 + 2R_1^4}{192} z^4\right).$$

Dans cet exemple, on peut écrire par exemple G_1 sous la forme :

(24) $$G_1(z) = H_{1,1}(z) - z^2 H_{1,2}(z)$$

où

(25) $$\begin{cases} H_{1,1}(z) = 2\pi^2 R_1 S_2 \dfrac{J_1(R_2 z)}{\pi R_2 z} \\ H_{1,2}(z) = 2\pi^2 R_1 \displaystyle\sum_{\{\beta>0, J_1(R_2\beta)=0\}} u_2(\beta) \frac{J_1(R_2 z)}{\pi R_2 z(z^2 - \beta^2)} \end{cases}$$

avec, si β est un zéro de $J_1(R_2/z)$, et si J_2 désigne la fonction de Bessel d'ordre 2,

$$u_2(\beta) = \frac{1}{\beta^5 J_1(R_1\beta) J_2(R_2\beta)}, \qquad S_2 = \sum_{\{\beta>0, J_1(R_2\beta)=0\}} u_2(\beta).$$

Enfin, si γ est un zéro non nul de la fonction $z \mapsto J_1(Rz)$, la fonction de deux variables :

$$(u, v) \mapsto \frac{J_1(R\sqrt{u^2+v^2})}{\pi R\sqrt{u^2+v^2}(u^2+v^2-\gamma^2)}$$

est la transformée de Fourier, au sens des distributions, de la fonction $I_{R,\gamma}$, à support dans le disque de rayon R, définie à l'intérieur de ce disque par :

$$I_{R,\gamma}(x,y) = \frac{1}{2\pi^2 R}\int_0^\infty \frac{J_1(Rt)}{t^2-\gamma^2} J_0(t\sqrt{x^2+y^2})\,dt \tag{26}$$

ou encore par :

$$I_{R,\gamma}(x,y) = \frac{2}{\pi^2 R^2}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^R \left(\int_t^R (\cos\gamma(t-v))\sqrt{R^2-v^2}\,dv\right)\frac{dt}{\sqrt{t^2-x^2-y^2}}. \tag{27}$$

L'écriture de G_1 sous la forme (24) et celle, tout à fait symétrique, de G_2, nous permettent d'expliciter v_1 et v_2 ; si Δ désigne l'opérateur différentiel Laplacien dans $\mathbb{R}^2$, on peut prendre :

$$v_1 = -2\pi^2 R_1 S_2 \Delta^3\mu_2 - 2\pi^2 R_1 \Delta^4\left[\sum_{\{\beta>0, J_1(R_2\beta)=0\}} u_2(\beta)\, I_{R_2,\beta}\right] \tag{28}$$

$$\begin{aligned} v_2 = {} & -2\pi^2 R_2 S_1 \Delta^3\mu_1 - 2\pi^2 R_2 \Delta^4\left[\sum_{\{\beta>0, J_1(R_1\beta)=0\}} u_1(\beta)\, I_{R_1,\beta}\right] + \\ & + 4\pi^2\mu_1 - \frac{\pi^2}{2}(R_1^2+R_2^2)\Delta\mu_1 + \frac{\pi^2}{48}(2R_1^4+3R_1^2R_2^2+2R_2^4)\Delta^2\mu_1 , \end{aligned} \tag{29}$$

où, lorsque β est un zéro de $J_1(R_1 z)$, on a :

$$u_1(\beta) = \frac{1}{\beta^5 J_1(R_2\beta)J_2(R_1\beta)}, \qquad S_1 = \sum_{\{\beta>0, J_1(R_1\beta)=0\}} u_1(\beta).$$

Remarque 4 : Dans les formules (28) et (29), les termes correspondant aux séries sont en fait des distributions d'ordre 6 ; en effet la distribution $\Delta(I_{R,\beta})$, où $I_{R,\beta}$ est définie par (26) ou (27), est en fait une fonction bornée dont les discontinuités se trouvent à la frontière du disque de centre O et de rayon R, en dehors duquel elle est nulle, et dont la borne supérieure est contrôlée en (Cte $\times\ \beta$).

La même remarque s'applique également au premier exemple : les séries figurant dans l'écriture de v_1 et v_2 (formules (20), (21)) correspondent en fait à des distributions d'ordre 4.

Dans les deux cas particuliers étudiés ci-dessus, on voit, grâce aux formules explicites (20) et (21) pour le premier exemple, (26) et (27) pour le second, que l'on peut appliquer le mécanisme de déconvolution aux signaux φ quatre fois continûment différentiables dans le premier cas, six fois continûment différentiables dans le second cas. On peut aussi estimer l'erreur commise en tronquant les séries figurant dans les formules (20) et (21) ou dans les formules (26) et (27) au niveau de leur N-(ième) terme ; dans les deux cas, cette erreur est majorée uniformément par CM/N où C est une constante liée au processus, M la borne du signal et de toutes ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre 4 dans le premier cas, jusqu'à l'ordre 6 dans le second cas ; en fait les estimations des laplaciens itérés jusqu'à l'ordre 3 suffisent. Lorsque le signal φ n'est pas borné, on peut contrôler de la même manière l'erreur commise sur le signal sur l'ensemble $\{\|x\| \leqslant K\}$ en prenant cette fois pour M la borne de φ et de toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre convenable sur l'ensemble $\{\|x\| \leqslant K'\}$ où :

$$K' = K + 2\,\text{diamètre}\,(\text{Supp}\,\mu_1 \cup \text{Supp}\,\mu_2).$$

Ces remarques nous montrent également que les problèmes délicats d'arithmétique commandant le choix de a dans le premier exemple n'affectent pas le calcul numérique. Bien que les conditions originelles portant sur a dans le premier exemple ne soient pas stables (le fait que a doive être irrationnel peut par exemple être gênant), on remarque que si l'on utilise les séries tronquées et les estimations d'erreur déjà mentionnées, on peut remplacer a par une approximation rationnelle suffisante de ce nombre. On pourra alors appliquer le mécanisme de déconvolution aux signaux pour lesquels on disposera d'une information préalable sur la croissance des dérivées jusqu'à l'ordre 4.

Rappelons ici encore que cette méthode peut être généralisée au cas de plusieurs variables [12].

Appendice : Comme nous l'avons annoncé dans l'introduction, donnons ici une solution du problème de Bezout pour les polynômes suivant Andersson-Berndtsson [2, 3].

Rappelons ici quelques notations du calcul différentiel complexe et renvoyons pour cela à [14, 15] ; dans l'espace $\mathbb{C}^n$ des n variables complexes $\zeta_1, ..., \zeta_n$, on peut regarder les $2n$ variables $(\zeta_1, ..., \zeta_n, \bar\zeta_1, ..., \bar\zeta_n)$ comme variables indépendantes et considérer toute fonction sur $\mathbb{C}^n$ comme fonction de ces $2n$ variables ; les notations $\frac{\partial}{\partial\zeta_k}$ et $\frac{\partial}{\partial\bar\zeta_k}$ sont celles du calcul différentiel usuel. Dans cet appendice, toutes les fonctions seront des fonctions élémentaires (des polynômes en les $2n$ variables).

Rappelons que si φ est une fonction des $2n$ variables $\zeta_1, ..., \zeta_n, \bar{\zeta}_1, ..., \bar{\zeta}_n$,

$$\partial\varphi = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\varphi}{\partial\zeta_j} \mathrm{d}\zeta_j ;$$

on définit de la même manière $\bar{\partial}\varphi$; de plus, si ω est la forme différentielle :

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} \omega_j \, \mathrm{d}\zeta_j$$

on définit $\bar{\partial}\omega$ par :

$$\bar{\partial}\omega = \sum_{j=1}^{n} \bar{\partial}\omega_j \wedge \mathrm{d}\zeta_j ;$$

on notera $\omega^l = \omega \wedge ... \wedge \omega$ (l fois).

Soit P_k un polynôme des n variables complexes $(\zeta_1, ..., \zeta_n)$; on appelle $g^{(k)}$ la forme différentielle en les variables ζ, à coefficients dépendant des paramètres $z_1, ..., z_n$ de $\mathbb{C}^n$, définie par :

$$g^{(k)}(\zeta, Z) = \sum_{j=1}^{n} g_j^{(k)}(\zeta, z) \, \mathrm{d}\zeta_j$$

avec

$$g_j^{(k)}(\zeta, z) = \int_0^1 \frac{\partial P_k}{\partial\zeta_j}(\zeta_1 + t(z_1 - \zeta_1), ..., \zeta_n + t(z_n - \zeta_n)) \, \mathrm{d}t ;$$

le calcul des $g_j^{(k)}$ se fait de manière explicite et nous remarquons qu'il s'agit d'un polynôme en les $2n$ variables $(\zeta_1, ..., \zeta_n, z_1, ..., z_n)$.

Supposons que $P_1, ..., P_m$ soient m polynômes des n variables $\zeta_1, ..., \zeta_n$, sans zéros communs et considérons la forme différentielle en les variables ζ, $\bar{\zeta}$, paramétrée par les variables $z_1, ..., z_n$, et définie par :

$$Q = \frac{\sum_{k=1}^{m} \bar{P}_k(\zeta) \, g^{(k)}(\zeta, z)}{\sum_{k=1}^{m} | P_k(\zeta) |^2} ;$$

on prend $q = \inf(m, n + 1)$ et on choisit N tel que toutes les intégrales figurant dans la formule que nous allons écrire soient convergentes; pour choisir N, on doit tenir compte de la minoration (dans $\mathbb{C}^N$), de la fonction des n variables $\zeta_1, \dots, \zeta_n$

$$\| P(\zeta) \|^2 = \sum_{k=1}^{n} | P_k(\zeta) |^2 \geqslant \left(1 + \sum_{j=1}^{n} |\zeta_j|^2\right)^{-L} = (1 + \| \zeta \|^2)^{-L}$$

valable parce que les polynômes P n'ont pas de zéros communs; L peut être estimé en fonction du degré des polynômes P_k [16].

On posera, k étant un élément de $\{ 0, ..., q - 1 \}$

$$C_k = \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k)!} \frac{q!}{(q-k)!} \frac{N!}{(N-(n-k))!},$$

et également :

$$\bar{P}(\zeta).P(z) = \sum_{k=1}^{m} \bar{P}_k(\zeta) \, P_k(z)$$

$$\bar{\zeta}.z = \sum_{j=1}^{n} \bar{\zeta}_j.z_j .$$

La formule de Bezout devient, l'intégration se faisant en les variables $\zeta_1, \dots, \zeta_n$,

$$1 = K_n \int_{\mathbb{C}^n} \sum_{k=0}^{q-1} C_k \left(\frac{1 + \bar{\zeta}.z}{1 + \| \zeta \|^2}\right)^{N-(n-k)} \left(\frac{\bar{P}(\zeta).P(z)}{\| P(\zeta) \|^2}\right)^{q-k} (\bar{\partial}\partial \operatorname{Log}(1 + \| \zeta \|^2))^{n-k} \wedge (\bar{\partial}Q)^k$$

où

$$K_n = \frac{1}{n!\,(2\,\mathrm{i}\pi)^n}.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] VAN DER WAERDEN. — Modern Algebra, Vol. *II*, *Ungar Publishing Co*, 1950.

[2] BERNDTSSON (B.), ANDERSSON (M.). — Henkin Ramirez formulas with weight factors, to appear in *Ann. Inst. Fourier*.

[3] BERNDTSSON (B.). — A formula for interpolation and division in $\mathbb{C}^n$, Preprint Universidad Nacional de Mexico, 1982.

[4] SCHWARTZ (L.). — Théorie des distributions, *Hermann*.

[5] SCHWARTZ (L.). — Méthodes mathématiques pour les sciences physiques, *Hermann*.

[6] HÖRMANDER (L.). — Generators for some rings of analytic functions. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1967, *73*, 943-949.

[7] KELLEHER (J. J.), TAYLOR (B. A.). — Finitely generated ideals in rings of analytic functions. *Math. Ann.*, 1971, *193*, 225-237.

[8] SKODA (H.). — Application des techniques L^2 à la théorie des idéaux d'une algèbre de fonctions holomorphes avec poids. *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, 1972, *5*.

[9] WATSON (G. N.). — Theory of Bessel functions. *Cambridge University Press*, 1966.

[10] ZALCMAN (L.). — Analyticity and the Pompeiu Problem. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1972, *47*, 237-254.

[11] BROWN (L.), SCHREIBER (B. M.), TAYLOR (B. A.). — Spectral Synthesis and the Pompeiu Problem. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 1973, *23,3*, 125-154.

[12] BERENSTEIN (C. A.), YGER (A.). — Le problème de la déconvolution. Preprint Ecole Polytechnique (Palaiseau), 1982.

[13] RICHTMYER (R. D.). — On the structure of some distributions discovered by Meisters. *Journal of Functional Analysis*, 1972, *9*, 336-348.

[14] HÖRMANDER (L.). — An introduction to complex Analysis in several variables, *Van Nostrand*, 1966.

[15] WELLS (R. O.). — Differential Analysis on Complex Manifolds, *Springer Verlag*, 1979.

[16] SEIDENBERG (A.). — Constructions in Algebra. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1974, *197*, 273-313.

(Manuscrit reçu le 4 octobre 1982)