Examen final

Dans cet examen, les normalisations ci-dessous ont été adoptées:
– La transformée de Fourier discrète est donnée par

$$\mathcal{F}_N[a](k) = \sum_{j=0}^{N-1} a_j e^{-2i\pi jk/N} \qquad \mathcal{F}_N^{-1}[a](k) = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} a_j e^{2i\pi jk/N}.$$

– Les coefficients de Fourier d'une fonction f 1-périodique sont définis par

$$c_k(f) = \int_0^1 f(t)e^{-2i\pi kt}\,\mathrm{d}t \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Les sommes partielles de la série de Fourier de f sont notées

$$S_N(f)(t) = \sum_{k=-N+1}^{N} c_k(f)e^{2i\pi kt}.$$

On note $S(f)$ la somme de la série de Fourier de f (si elle existe).
– $\delta_{k,n} = \begin{cases} 1 & \text{si } k=n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$
– Le noyau de Fejer est défini par

$$F_N(t) = \sum_{k=-N}^{N}\left(1 - \frac{k}{N+1}\right)e^{2i\pi kt}.$$

Exercice 1.

(1) Soit $0 \le k_1 < k_2 \le N-1$ et soit $a = (a_k)$ la suite N-périodique définie pour $0 \le k \le N-1$ par $a_k = 1$ si $k_1 \le k \le k_2$ et $a_k = 0$ sinon. Calculer $\mathcal{F}_N[a]$.

(2) On considère le signal s donné par

$$s(t) = \cos 4\pi t$$

qu'on échantillone sur $N = 8$ points à une fréquence de $16HZ$. C'est-à-dire qu'on considère la suite $a = (a_k)$ N-périodique donnée par $a_k = s(k/16)$ pour $k = 0, \ldots, N-1$.
Calculer $\mathcal{F}_N[a]$.

(3) Supposons que $N = pq$, $p, q \ge 2$ deux entiers. Soit $a = (a_k)$ la suite N-périodique définie par $a_k = 1$ si $k = \ell p$, $\ell \in \mathbb{Z}$ et $a_k = 0$ sinon. Calculer $\mathcal{F}_N[a]$.

Exercice 2. Soit f la fonction 1-périodique définie que $[-1/2, 1/2]$ par

$$f(x) = \cosh \pi x = \frac{e^{\pi x} + e^{-\pi x}}{2}.$$

(1) Montrer que f est continue et $\mathcal{C}^1$-par morceaux sur $\mathbb{R}$. Que pouvez-vous en déduire sur la série de Fourier de f.

(2) Calculer les coefficients de Fourier de f.

(3) On veut résoudre l'équation différentielle

$$y'(x) + y(x) = f(x). \tag{1}$$

On suppose que (1) a une solution y de classe $\mathcal{C}^2$.
(a) Que pouvez vous dire sur les séries de Fourier de y et de y'.
(b) Que pouvez vous dire sur $c_0(y)$.
(c) Déterminer $c_k(y)$ en fonction de $c_k(f)$.

(d) En déduire la série de Fourier de y.

(e) Montrer que cette série converge normalement ainsi que sa série dérivée et en conclure que y est bien de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 3. Soit $P(t) = \sum_{k=0}^{N} c_k e^{2i\pi kt}$ un polynôme trigonométrique de degré N (sans terme de fréquence négative) et $Q(t) = P(t)\, e^{-2i\pi Nt}$.

(1) Comparer $Q * F_{N-1}$ et $P'(t)/N$.

(2) En déduire que $\sup |P'(t)| \leq C.N. \sup |P(t)|$ où C est une constante (indépendante de P et de N) qu'on déterminera.

Exercice 4. Dans cet exercice, on dira qu'une fonction *réelle* f a un nombre fini de changement de signes s'il existe une suite $t_1, \ldots, t_k$ telle que

– pour chaque j, il existe $\eta > 0$ tel que $f(t_j - t)f(t_j + t) < 0$ pour $0 < t < \eta$

– pour chaque j, $f(t)$ est de signe constant sur $[t_j, t_{j+1}]$.

Il est recommandé de faire un dessin d'une fonction qui change de signe en un nombre fini de points.

(1) Montrer qu'une fonction réelle f 1-périodique qui a un nombre fini de changements de signes a un nombre pair de changement de signes sur $[0, 1[$.

(2) Le but de cette question est de construire, pour une suite de points distincts $t_1, \ldots, t_{2N}$ dans $[0, 1[$, un polynôme trigonométrique réel de degré $2N$ qui change de signe en $t_1, \ldots, t_N$.

(a) On fixe $0 \leq t_1 < t_2 < 1$, trouver a et φ pour que $\cos(2\pi t - \varphi) - a$ change de signe en t_1, t_2 et seulement en ces points. (Un dessin peut aider)

(b) On fixe $0 \leq t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < 1$, trouver a_1, a_2 et φ_1, φ_2 pour que

$$\big(\cos(2\pi t - \varphi_1) - a_1\big)\big(\cos(2\pi t - \varphi_2) - a_2\big)$$

change de signe en t_1, t_2, t_3, t_4.

(c) On fixe $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_{2N-1} < t_{2N} < 1$, trouver un polynôme trigonométrique réel de degré $2N$ qui change de signe en $t_1, \ldots, t_{2N}$.

(3) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, telle que ses coefficients de Fourier $c_k(f) = 0$ pour $k = -m+1, \ldots, m-1$. Ainsi

$$f(t) = \sum_{|k| \geq m} c_k(f) e^{2i\pi kt}.$$

Le but de cette question est de montrer que f change au moins $2m$ fois de signe.

(a) Soit $P(t) = \displaystyle\sum_{k=-m+1}^{m-1} p_k e^{2i\pi kt}$ un polynôme trigonométrique de degré $m-1$. Montrer que

$$\int_0^1 f(t)\overline{P(t)}\, \mathrm{d}t = 0.$$

(b) On suppose que f a $2N$ changements de signe avec $N \leq m-1$: $t_1, \ldots, t_{2N}$. On considère le polynôme Q de la question précédente.

– Montrer que $f(t)Q(t)$ ne change pas de signe.

– En déduire que $f = 0$ et conclure.