TP noté (à préparer pour la semaine 15)

Ce TP noté (dans lequel vous êtes guidés) combine des questions théoriques et des questions pratiques (implémentation sous `MATLAB`). Il doit aussi vous aider à consolider vos acquis théoriques. Le texte est bâti à partir des textes des examens finaux (session 1 et session 2) de 2011-2012, dont il reprend l'essentiel [1] en y intégrant l'approche pratique (sous `MATLAB`) développée en TP (aidez vous des quatre feuilles de TP en ligne). Répondez aux questions sur une copie, insérez des figures au format `epsc` imprimées depuis `MATLAB` (commande `print`, suivant `print figureactive -depsc`, voir le `help` de `print`) ainsi que des codes `.m` (dont vous imprimerez la syntaxe et dont vous m'enverrez également les sources dans un fichier [2]).

I. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. La *N-transformée de Fourier discrète* d'une suite $\mathtt{s} = (s(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ N-périodique est la suite (elle aussi N-périodique) $\mathcal{F}_N[\mathtt{s}]$ définie par

$$\forall\, k \in \mathbb{Z},\ \mathcal{F}_N[\mathtt{s}](k) = \sum_{j=0}^{N-1} s(j)\, W_N^{jk} \quad \text{ou} \quad W_N := \exp(-2i\pi/N).$$

La transformation inverse est notée $\mathcal{F}_N^{-1}$; elle agit sur les suites N-périodiques $\widehat{\mathtt{s}}$ indexées par $\mathbb{Z}$ de la manière suivante :

$$\forall\, k \in \mathbb{Z},\ \mathcal{F}_N^{-1}[\widehat{\mathtt{s}}](k) = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} \widehat{s}(j)\, W_N^{-jk}.$$

(1) Soient $N \geq 2$ et k_1, k_2 deux entiers tels que $0 \leq k_1 < k_2 \leq N-1$. Calculez à la main (sur $\{0,...,N-1\}$) la N-transformée de Fourier discrète de la suite N-périodique $\mathtt{s}_{[k_1,k_2]}$ définie par

$$\forall\, k \in \{0,...,N-1\},\ s_{[k_1,k_2]}(k) = \begin{cases} 1 \text{ si } k_1 \leq k \leq k_2 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Soit encore $N \geq 2$ et $\omega > 0$. Calculez (toujours à la main, sur $\{0,...,N-1\}$) la N-transformée de Fourier discrète de la suite N-périodique $\mathtt{s}^\omega$ définie par

$$\forall\, k \in \{0,...,N-1\},\ s^\omega(k) = e^{2i\pi k\,\omega}.$$

Soit enfin N un entier supérieur ou égal à 2 qui se factorise sous la forme $N = N_1 \times N_2$, où ni N_1, ni N_2 ne sont égaux à 1. Calculez (toujours à la

1. Les quatre exercices de l'examen de session 1, organisés différemment et parfois précisés si nécessaire ; pour ce qui est de l'examen de session 2 : l'exercice 1, l'exercice 2, et les idées générales de l'exercice 3 (la question 10 de cet exercice 3 ayant déjà été traitée dans le TP4).

2. Envoyez moi pour cela un dossier `VotreNom.zip` dans lequel vous mettrez ces codes source (fichiers `.m`) ainsi que les figures couleur (au format `deps`). Vous joindrez à la copie papier les figures imprimées en noir et blanc.

main, sur $\{0,...,N-1\}$) la N-transformée discrète de la suite N-périodique $\mathtt{s}_{N_1,N_2}$ définie par :

$$\forall\, k \in \{0,...,N-1\},\ s_{N_1,N_2}(k) = \begin{cases} 1 \text{ si } N_1 \text{ divise } k \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

(2) Rédigez (*via* la routine `fft`) trois routines `fenetreHat.m`, `oscillHat.m` et `trousHat.m` :

```
>> S = fenetreHat (N,k1,k2) ;
>> S = oscillHat (N, omega) ;
>> S = trousHat (N1,N2) ;
```

permettant respectivement de calculer les N-transformées de Fourier discrètes des signaux digitaux $\mathtt{s}_{[k_1,k_2]}$, $\mathtt{s}^{\omega}$, et $\mathtt{s}_{N_1,N_2}$ sur $\{0,...,N-1\}$. Imprimez les codes `.m` de ces routines (vous m'enverrez également les sources).

(3) On considère dans cette question[3] des signaux $t \in \mathbb{R} \mapsto s(t)$ enregistrés à une certaine fréquence (en Hertz) et ainsi discrétisés. Téléchargez depuis le site :

`http://www.math.u-bordeaux1.fr/~yger/MATLABSignal/TPnote`

les fichiers `spectrogramme.m` et `signalQ3.mat`. Le signal `signalQ3.mat` (que vous chargerez dans votre environnement `MATLAB` *via* `load signalQ3`) correspond ainsi à l'enregistrement d'un signal analogique à une fréquence de 400 Hz. Combien de temps a duré l'enregistrement ? Étudiez la syntaxe du code `spectrogramme.m`, puis exploitez ce code (vous utiliserez comme en TD pour `w` une fenêtre de Hamming : `w = hamming (N)`, avec `N` judicieusement choisi, à vous de voir) pour décrire le contenu fréquentiel du signal `signalQ3`, à savoir :
- les fréquences présentes pendant toute la durée de l'enregistrement (vous en donnerez une valeur approchée en Hz) ;
- les fréquences apparaissant de manière sporadique ; vous en donnerez aussi une valeur approchée (en Hz) et préciserez chaque fois le nombre de fenêtres temporelles où, à votre avis, l'apparition sporadique de cette fréquence concernée a lieu ;
- les évolutions linéaires de fréquences, s'il en existe, en en précisant la pente.

Accompagnez votre travail de quelques figures justificatives (utiliser la routine `print` pour imprimer une figure sous `MATLAB`), en faisant varier la longueur `N` de la fenêtre (de Hamming) d'observation.

II. Étant donnée une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, 1-périodique et telle que

$$\int_{-1/2}^{1/2} |f(\omega)|\, d\omega < +\infty,$$

3. Directement inspirée de ce qui a été fait en TP dans la feuille de TP 3 concernant l'analyse (et la synthèse) des signaux analogiques (discrétisés) à la fois en temps et en fréquences, c'est-à-dire selon le codage ≪ musical ≫ suivant deux axes, celui des temps (horizontal, de gauche à droite) et celui des fréquences (vertical, de haut en bas).

(*i.e.* de norme L^1 sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ finie), on définit la liste de ses *coefficients de Fourier complexes* comme la liste $(c_k(f))_{k\in\mathbb{Z}}$, où :

$$c_k(f) := \int_0^1 f(\omega)\, e^{-2i\pi k\omega}\, d\omega, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

La *série de Fourier* $S[f]$ *de* f est alors (formellement) la série de fonctions

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} c_k(f)\, e^{2i\pi k\omega}$$

et l'on dit qu'elle converge normalement si

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(f)| < +\infty.$$

Dans ce cas, sa somme

$$\omega \in \mathbb{R} \longmapsto \lim_{M\to+\infty} \sum_{k=-M}^{M} c_k(f)\, e^{2i\pi k\omega}$$

définit une fonction continue 1-périodique qui, si f est supposée continue, coincide avec f partout. On rappelle que les routines `spectre` et `ispectre` (que vous téléchargererez sur le même site `TPnote` que celui où a été téléchargé le matériel pour la question **3**), utilisées sous la forme :

```
>> C = spectre(fM,1/2) ;
>> fM = ispectre(C,2*pi*M) ;
```

permettent :

– étant donné un entier `M`, de calculer de manière approchée la liste `C` des `2M` coefficients de Fourier de f pour k variant entre $-$`M` et `M` -1 (dans cet ordre) à partir de l'échantillonnage `fM` de f sur $[-1/2, 1/2[$ avec un pas de $1/(2\texttt{M})$;
– étant donné ce même entier `M` et une liste `C` de nombres complexes de longueur `2M`, `C`$=[c_{-M}, ..., c_{M-1}]$, de récupérer la liste des valeurs du polynôme trigonométrique

$$\omega \longmapsto \sum_{k=-M}^{M-1} c_k\, e^{2i\pi k\omega}$$

aux `2M` points $\omega = -1/2 + j/(2\texttt{M}),\ j = 0, ..., 2\,\texttt{M} - 1$.

Ces deux routines ont été abondamment exploitées dans la feuille de TP2.

(4) Calculez (à la main) les coefficients de Fourier $c_k(f)$ ($k \in \mathbb{Z}$) des fonctions 1-périodiques définies respectivement sur $[-1/2, 1/2[$ par :

$$f_1(\omega) := |\omega|, \quad f_2(\omega) := \omega^2.$$

Vérifiez vos calculs numériquement avec la routine `spectre` lorsque $k = -1024 : 1023$. Quelle est la régularité de ces fonctions considérées comme des fonctions 1-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (sont-elles continues ? C^1 ? C^1 par morceaux ?). Que pouvez vous en déduire concernant la convergence des séries de Fourier de f_1 et f_2 ? Du fait que $f_2 \equiv f_1 \times f_1$, quelle relation relie la liste $(c_k(f_1))_{k\in\mathbb{Z}}$ à la liste $(c_k(f_2))_{k\in\mathbb{Z}}$ des coefficients de f_2 ?

(5) Calculez (à la main) les coefficients de Fourier $c_k(f)$ de la fonction 1-périodique définie qur $[-1/2, 1/2[$ par

$$f(\omega) := \frac{e^{\pi\omega} + e^{-\pi\omega}}{2}$$

et vérifiez que ces calculs sont bien conformes à ceux que vous faites numériquement grâce à `spectre` lorsque $k = -1024 : 1023$.

(6) Si $\omega \in [-1/2, 1/2[$, que vaut, si $\tilde{f}$ désigne la fonction 1-périodique obtenue en périodisant la fonction $\omega \in [-1/2, 1/2[\mapsto \chi_{[0,1/2[}(\omega)\, f(\omega)$ (f désignant la fonction introduite à la question **5**)

$$\lim_{M \to +\infty} \sum_{k=-M}^{M-1} c_k(\tilde{f})\, e^{2i\pi k\omega} = \lim_{M \to +\infty} \sum_{k=-M}^{M} c_k(\tilde{f})\, e^{2i\pi k\omega} \ ?$$

(discutez suivant les valeurs de ω et précisez le théorème du cours que vous invoquez). Justifiez aussi pourquoi les deux limites ci-dessus sont les mêmes. Mettez en évidence numériquement le *phénomène de Gibbs* (observé en TP, *cf.* la feuille de TP 2) et imprimez les figures à l'appui de vos constatations. Pourquoi ce phénomène de Gibbs se trouve-t-il « gommé » lorsque l'on regarde, au lieu de celles qui précèdent, la limite :

$$\lim_{M \to +\infty} \sum_{k=-M}^{M-1} \Big(1 - \frac{|k|}{M}\Big)\, c_k(\tilde{f})\, e^{2i\pi k\omega} \ ?$$

Étayez encore vos affirmations avec des figures.

(7) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On suppose que la fonction $\omega \mapsto P(\omega)$ est un polynôme trigonométrique :

$$P \ : \omega \longmapsto \sum_{k=0}^{N} c_k e^{2i\pi k\omega}$$

(il n'y a pas de fréquences correspondant à des $k < 0$). On rappelle que le noyau de Fejér F_N est défini comme le polynôme trigonométrique

$$\omega \longmapsto F_N(\omega) = \sum_{k=-N}^{N} \Big(1 - \frac{|k|}{N}\Big)\, e^{2i\pi k\omega}.$$

Affichez le graphe de ce noyau pour des valeurs de $N = 10, 20, 50$ et confrontez le au graphe du noyau de Dirichlet D_N, défini, lui, par

$$\omega \longmapsto \sum_{k=-N}^{N} e^{2i\pi k\omega}$$

(utilisez la routine `ispectre` pour tracer sur une les graphes de ces noyaux sur $[-1/2, 1/2[$, avec un pas de $1/2048$, et imprimez ces graphes, en imprimant chaque fois sur une même figure le graphe de K_N en plein et celui de D_N en pointillés, ceci pour $N = 10, 20, 50$).

– Si Q est le polynôme trigonométrique défini par

$$\forall\, \omega \in \mathbb{R},\ Q(\omega) = P(\omega) \times e^{-2i\pi N\omega},$$

comparez la convolée 1-périodique[4] des deux fonctions 1-périodiques Q et F_N avec le polynôme trigonométrique P'/N.

– Déduisez en l'*inégalité de Bernstein* :

$$\sup_{\mathbb{R}} |P'| \leq 2\pi \ N \sup_{\mathbb{R}} |P|.$$

(8) Soit encore $N \in \mathbb{N}^*$. On considère une fonction réelle 1-périodique f de classe C^1, non identiquement nulle, et dont tous les coefficients de Fourier $c_k(f)$ sont nuls lorsque $-N < k < N$.

– Utilisez la routine `ispectre` pour faire des tests numériques (sur ces exemples) montrant que la fonction f présente au moins $2N$ changements de signe (on dit aussi que le graphe de f présente au moins $2N$ `zerocrossings`) sur $[-1/2, 1/2[$. Générez (avec `ispectre`) et imprimez quelques graphes de telles fonctions f pour illustrer ce fait (en utilisant la commande `print` sous `MATLAB`) avec des valeurs de N de plus en plus grandes ($N = 10, 20, 50$).

– Pourquoi le nombre de changements de signe de la fonction f sur $[0, 1[$ est-il nécessairement pair ? non nul ? (exploitez pour ce dernier point le fait que $c_0(f) = 0$).

– Soient deux fréquences ω_1 et ω_2 telles que $-1/2 \leq \omega_1 < \omega_2 < 1/2$. Déterminez deux réels a_{ω_1,ω_2} et $\varphi_{\omega_1,\omega_2}$ de manière à ce que le signal analogique

$$\omega \longmapsto \cos(2\pi\omega - \varphi_{\omega_1,\omega_2}) - a_{\omega_1,\omega_2}$$

présente exactement deux changements de signe sur $[-1/2, 1/2[$ (précisément en ω_1 et ω_2) (aidez vous pour cela du graphe de la fonction de référence $\omega \longmapsto \cos(2\pi\omega)$ que l'on translaterez horizontalement, puis verticalement, pour l'« ajuster » exactement au problème).

– Soit une liste ordonnée de fréquences

$$-1/2 \leq \omega_1 < \omega_2 \leq \cdots < \omega_{2M-1} < \omega_{2M} < 1/2\,.$$

Rédigez un code `zerocrossings.m`

```
>> C = zerocrossings (L) ;
```

qui, étant donnée la liste ainsi ordonnée `L` de ces $2M$ fréquences, renvoie la liste `C` des coefficients de Fourier[5] entre $-M$ et M d'un polynôme trigonométrique de degré exactement $2M$, à valeurs réelles :

$$P_{\mathtt{L}} : \omega \longmapsto \sum_{k=-M}^{M} c_{\mathtt{L},k}\ e^{2i\pi k\omega}$$

présentant exactement $2M$ changements de signe (`zerocrossings`) sur $[-1/2, 1/2[$; utilisez pour cela la routine `spectre`. Testez ce code et imprimez le ; vous m'enverrez aussi le fichier source.

4. On rappelle que la *convolée 1-périodique* de deux fonctions 1-périodiques f_1 et f_2 est définie par

$$(f_1 * f_2)(\omega) := \int_0^1 f_1(\varpi) f_2(\omega - \varpi)\, d\varpi$$

et que ses coefficients de Fourier s'obtiennent en multipliant terme à terme les coefficients de Fourier de f_1 par ceux de f_2.

5. Il fallait lire ici entre $-M$ et M et non entre $-(2M+1)$ et $2M$, j'ai rectifié.

– Soit f comme dans l'en-tête de cette question, ayant exactement $2M$ changements de signe sur $[-1/2, 1/2[$, avec $1 \leq M \leq N-1$, les $2M$ `zerocrossings` de f étant les points d'une liste ordonnée (en croissant) `L`. Pourquoi a-t'on

$$\int_{-1/2}^{1/2} f(\omega)\, P_{\mathtt{L}}(\omega)\, d\omega = 0.$$

Montrez que la fonction $f\, P_{\mathtt{L}}$ garde un signe constant sur $[-1/2, 1/2[$, et que ceci est en contradiction avec $f \not\equiv 0$. Déduisez en que le graphe de f présente au moins $2N$ `zerocrossings` sur $[-1/2, 1/2[$.

(9) *On reprend dans cette question*[6] *la fonction f de la question* **5**. *On suppose que l'équation différentielle du second ordre*

$$y'' + y = f$$

admet sur $\mathbb{R}$ une solution 1-périodique de classe C^2.

– Que vaut $c_0(y)$?
– Calculez (à la main) les coefficients $c_k(y)$, $k \in \mathbb{Z}$, en fonction des coefficients $c_k(f)$; implémentez le calcul numériquement pour les valeurs $k = -1024 : 1023$;
– Pourquoi la série de Fourier de y converge-t'elle normalement sur $\mathbb{R}$?
– Quelle est la série de Fourier de y' ? Montrez que cette série de Fourier converge aussi normalement ;
– Vérifiez que la fonction y ainsi construite est bien de classe C^2 ;
– Affichez le graphe de la fonction y sur $[-1/2, 1/2[$ (en prenant comme pas $1/2048$) en utilisant la routine `ispectre`. Imprimez le graphe.

III. Cette dernière partie est directement inspirée de ce qui a été fait dans la feuille de TP 4. L'exercice 3 de l'examen de session 2 (2011-2012) lui est aussi relié. Dans le traitement digital de l'information, on appelle *filtre* `ARMA`[7] *stable* toute application $\mathscr{L}$ de $l^1(\mathbb{Z})$ dans $l^1(\mathbb{Z})$ telle qu'il existe deux listes $\mathtt{A} = [1, a_1, ..., a_N]$ et $\mathtt{B} = [b_0, ..., b_M]$ (avec $a_j \in \mathbb{C}$, $b_l \in \mathbb{C}$ et $b_0 \neq 0$) de manière à ce que la relation entre entrée $\mathtt{e} = (e(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ et sortie $\mathscr{L}[\mathtt{e}] = \mathtt{s} = (s(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ soit régie par le jeu de relations

$$s(k) + \sum_{n=1}^{N} a_n\, s(k-n) = \sum_{m=0}^{M} b_m\, e(k-m) \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}.$$

La *réponse impulsionnelle du filtre $\mathscr{L}$* est par définition la suite $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ correspondant à la sortie lorsque l'entrée est l'impulsion à l'origine, c'est-à-dire la suite définie par $e_0(0) = 1$ et $e_0(k) = 0$ si $k \neq 0$. Lorsque $\mathtt{A} = [1]$, le filtre sera dit simplement `MA`[8] .

6. Qui s'inspire de l'exercice 1 traité en TP dans la feuille de TP 3.
7. ≪ Auto-Regressive with Moving Average ≫.
8. ≪ with Moving Average ≫

(10) Si la fraction rationnelle

$$R(z) := \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m}}{1 + \sum_{n=1}^{N} a_n z^{-n}}$$

n'a aucun pôle sur le cercle unité, exprimez à partir de cette fraction rationnelle la fonction 1-périodique

$$\omega \in \mathbb{R} \longmapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \, e^{-2i\pi k\omega}.$$

(11) On suppose de plus que la fraction rationnelle R n'a que des pôles simples, tous hors du cercle unité. Calculez en fonction des coefficients a_n et b_m, $n = 1, ..., N$, $m = 0, ..., M$, et des valeurs des pôles $\alpha_1, ..., \alpha_q$ de la fraction rationnelle R dans $\mathbb{C}$, la réponse impulsionnelle $(h_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ du filtre `ARMA` $\mathscr{L}$ (vous serez amenés à traiter différemment le cas des pôles α_j intérieurs au disque unité ouvert et celui des pôles extérieurs au disque unité fermé, expliquez pourquoi et comment).

(12) Le filtre `ARMA` $\mathscr{L}$ est dit *causal* si sa réponse impulsionnelle est telle que $h_k = 0$ pour tout $k < 0$. Sous quelles hypothèses (portant sur la fraction rationnelle R, supposée simplement avoir tous ces pôles simples et hors du cercle unité) en est-il ainsi ? Vérifiez alors que si $e(k) = 0$ pour $k < 0$, en en est de même pour $s(k)$.

(13) À l'aide de la routine `MATLAB` `fir1`[9], permettant le « design », *via* la construction de suites de nombres complexes `A` $= [1]$ et `B` $= [b_0, ..., b_M]$, de filtres `MA` permettant le filtrage des fréquences dans des bandes passantes (`'bandpass'`), réalisez des filtres `MA` avec `M` $= 20$ permettant de filtrer (en l'éliminant) l'une (et chaque fois une seule) des fréquences apparaissant de manière constante dans la description fréquentielle du signal `signalQ3` étudié à la question **3**. Implémentez l'opération de filtrage sur le signal `signalQ3` en utilisant sous `MATLAB` la routine `filter` dont vous étudierez le `help`. Imprimez les spectrogrammes des signaux filtrés à l'appui de vos constructions.

9. Etudiez le `help` de cette routine.