TP3 - Convolution et détection de contours sur les images

Exercice 1 (Réalisation de masques gaussiens et brouillage d'une image).

(1) Réalisez en exploitant la routine `meshgrid` un masque gaussien normalisé

$$(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}/N_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/N_2\mathbb{Z} \mapsto \Big[\exp\Big(-\frac{k_1^2}{2\sigma_1^2} - \frac{k_2^2}{2\sigma_2^2}\Big)\Big]_{\rm norm}$$

(N_1 et N_2 étant deux entiers non nuls et σ_1, σ_2 deux écarts-type). La notation $[\ ]_{\rm norm+per}$ signifie qu'il s'agit de la somme de toutes les entrées est ramenée à 1 de manière à ce qu'il s'agisse d'une matrice de taille (N_1, N_2) dont la somme des entrées est égale à 1.

(2) En utilisant la routine `fft2` et son inverse (transformation de Fourier discrète bidimensionnelle), réalisez une routine `convolution2D` opérant la convolution discrète de deux images digitales de même taille (N_1, N_2). La transformation de Fourier discrète `fft2 (N1,N2)` transforme une matrice de taille `N1,N2` dont les entrées sont indexées comme `[0:N1-1,0:N2-1]` en la matrice dont les entrées (indexées de la même manière) sont les

$$\widehat{I}(k_1, k_2) = \sum_{j_1=0}^{N_1-1} \sum_{j_2=0}^{N_2-1} I(j_1, j_2)\, W_{N_1}^{j_1 k_1}\, W_{N_2}^{j_2 k_2}.$$

(3) Téléchargez l'image `hibiscus.bmp` et testez l'effet de la convolution de masques gaussiens en modifiant les valeurs des écarts-type.

Exercice 2 (gradient discret d'une image).

(1) Le gradient discret d'une image `I` digitale (indexée sur $\mathbb{Z}/N_1\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/N_2\mathbb{Z}$) est par convention l'opération associant à `I` deux images `nablaIx` et `nablaIy` dont les entrées sont définies respectivement par

$$\texttt{nablaIx}(k_1, k_2) = \texttt{I}(k_1, k_2) - \texttt{I}(k_1, k_2 + 1)$$

(dérivation « horizontale ») et

$$\texttt{nablaIx}(k_1, k_2) = \texttt{I}(k_1, k_2) - \texttt{I}(k_1 + 1, k_2)$$

(dérivation « verticale »). Réalisez une routine `[nablaIx,nablaIy] = gradient(I)` qui opère ce calcul (on pourra exploiter la routine `cat`).

(2) Testez cette routine avec l'image `hibiscus` préalablement brouillée. Affichez en particulier la norme euclidienne du gradient. Il convient d'amplifier l'image par un facteur de multiplication convenable pour profiter des potentialités de `imshow`.

(3) Réalisez un seuillage binaire de l'image correspondant à la norme du gradient (vous pourrez par exemple exploiter l'algorithme d'Otsu).

Exercice 3 (divergence et laplacien).

(1) La divergence d'un champ de vecteurs $(x,y) \mapsto (I_1(x,y), I_2(x,y))$ (où I_1 et I_2 sont des fonctions régulières des deux variables réelles (x,y) dans un ouvert U du plan est définie par
$$\mathrm{div}(I_1, I_2) \ : (x,y) \mapsto \frac{\partial I_1}{\partial x} + \frac{\partial I_2}{\partial y};$$
Pourquoi dans le cadre discret, ce calcul de divergence (à partir de deux images digitales `I1` et `I2` de même taille `(N1,N2)`) revient-il à former l'image digitale dont les entrées sont les :
$$\texttt{divI (k1,k2)} = (\texttt{I1(k1,k2+1)} - \texttt{I1(k1,k2)}) + (\texttt{I2(k1+1,k2)} - \texttt{I2(k1,k2)}).$$
On aurait pu prendre l'opposé de cette expression (conformément à la prise de gradient) mais la divergence est classiquement définie dans le cadre discret comme l'opposé de l'adjoint de la prise de gradient. Réalisez cette transformation avec un code `divI = divergence(I1,I2)` à partir de deux images de même taille.

(2) Contruisez une routine `laplacien` qui calcule le laplacien d'une image (dans le domaine continu, le laplacien d'une fonction de deux variables est la divergence de son gradient). Le Laplacien discret est donc $-\nabla^* \circ \nabla$, ∇ désignant le gradient discret. Il s'agit d'un opérateur symétrique (d'où son intérêt) négatif, cette fois du second ordre.

(3) Testez votre résultat sur l'image `hibiscus`.