

## TP6-2013. Transformées de Hough et de Radon

EXERCICE 1 (Construction de la transformée de Hough d'une image binaire). Soit  $I$  une image binaire de taille  $(N_1, N_2)$ , considérée comme inscrite dans le cadre  $[0, N_1 - 1] \times [0, N_2 - 1]$  du plan. On note  $(x_c, y_c)$  le centre de symétrie de cette image.

- (1) Si  $\theta \in [0, 2\pi]$ , quelle est le maximum  $R_{\max}$  des valeurs possibles pour

$$\cos \theta \times (x - x_c) + \sin \theta \times (y - y_c)$$

lorsque  $(x, y)$  parcourt le cadre  $[0, N_2 - 1] \times [0, N_1 - 1]$  ?

- (2) Pour une valeur  $\theta \in [0, 2\pi]$  fixée, réalisez, après avoir formé la grille cartésienne :

```
>> [X,Y] = meshgrid(0:N2-1,0:N1-1);
```

une routine qui :

- dans un premier temps identifie les pixels  $(j, k)$  de  $I$  où

$$r_\theta(j, k) := \cos \theta \times (x(j, k) - x_c) + \sin \theta \times (y(j, k) - y_c) \geq 0$$

en leur assignant la valeur 0 si ce n'est pas le cas, la valeur 1/2 si cette quantité est nulle, la valeur 1 si elle est strictement positive (exploitez pour cela la fonction `sign`);

- dans un second temps construit une image  $I_\theta$  de même taille que  $I$  telle que

$$I_\theta(k, l) = 0 \quad \text{si } I(k, l) = 0$$

$$I_\theta(k, l) = \text{eps}/2 \quad \text{si } I(j, k) = 1 \quad \text{et} \quad r_\theta(j, k) = 0$$

$$I_\theta(k, l) = r_\theta(j, k) + \text{eps} \quad \text{si } I(j, k) = 1 \quad \text{et} \quad r_\theta(j, k) > 0.$$

- dans un troisième temps, liste en une colonne  $C_\theta$  les entrées non nulles (mais pouvant valoir `eps/2`) de l'image  $I_\theta$ .
- calcule enfin l'histogramme :

$$h_\theta = \text{histc}(C_\theta, 0:\text{tauR}:R_{\max});$$

où `tauR` désigne un pas strictement inférieur à  $R_{\max}$  fixé.

- (3) En utilisant la routine auxiliaire construite à la question 2, construisez une routine

```
>> H = Hough(I, tauTheta, tauR);
```

qui, étant donné un pas angulaire `tauTheta`  $< 2\pi$  et un pas en la "distance au centre" `r` (`tauR`  $< R_{\max}$  (`size(I)`)), construit l'image de la transformée de Hough de l'image  $I$  rapportée à la grille cartésienne

$$[0:\text{tauTheta}:2*\text{pi}] \times [0:\text{tauR}:R_{\max}].$$

- (4) Testez cette routine sur une image de contour `Contour1` ou `Contour2` binaire réalisée morphologiquement ainsi :

```
>> II = seuillagebinaire(I,seuilOTSU,N);
>> Contour1 = II - erosionbinaire(II,a,b,p);
>> Contour2 = dilatationbinaire(II,a,b,p) - II;
```

où `I` est une image codée sur `N` niveaux de gris, `seuilOTSU` désigne le seuil optimum fourni par l'algorithme d'Otsu, `a, b` sont choisis suffisamment petits et  $p \geq 1$  (par exemple  $p = 1$  ou  $2$ ). Prenez l'image `I` dans le vivier habituel (`bordeaux.jpg`, `lena.jpg`, `alsace.jpg`, `venise.jpg`, `hibiscus.bmp`, `cameraman.jpg`, etc.).

EXERCICE 2 (transformation de Radon discrète). Cet exercice reprend à la lumière du cours sur la transformation de Hough l'exercice 4 de la feuille de TP 2 (cisaillements et rotation d'une image). On rappelle que, si `I` désigne une image (codée sur `N` niveaux de gris entre 0 et 1) et `theta`  $\in [0, 2\pi[$ , la routine

```
>> [Iinit,Irot] = rotationdirect(I,theta);
```

- d'une part place l'image au centre d'un cadre (`zeropadding` conduisant à l'image agrandie `Iinit`) carrée de taille minimale  $(M, M)$  pour qu'elle puisse pivoter dans ce cadre par rapport à son centre de symétrie sans sortir de ce cadre rectangulaire imparti;
- d'autre part transforme l'image `Iinit` en sa transformée par rotation d'angle `theta` (dans le sens trigonométrique) et de centre le centre de symétrie commun du cadre des images `I` ou `Iinit`.

Réalisez en utilisant cette routine `rotationdirect` une routine

```
>> [Iinit,S] = Radon(I,tauTheta);
```

qui, étant donné un pas `tauTheta` tel que `tauTheta`  $< \pi$ , renvoie l'image « encadrée » `Iinit` ainsi qu'une matrice `S` dont le nombre de lignes est  $M(N_1, N_2)$  et le nombre de colonnes la longueur du vecteur `Theta`  $= 0 : \text{tauTheta} : \text{pi}$ , de manière à ce que la colonne d'indice `k` de cette matrice figure le vecteur obtenu comme la moyenne des  $M(N_1, N_2)$  vecteurs lignes de l'image `Irotk` obtenue par

```
>> [Iinit,Irotk] = rotationdirect(I,Theta(k));
```

Étant donné un nombre  $R > 0$  et une fonction positive bornée

$$(x, y) \in \{x^2 + y^2 \leq R^2\} \mapsto f(x, y) \in [0, \infty[$$

la transformée de Radon de  $f$  est définie comme la fonction

$$R[f] : (\theta, r) \in [0, \pi] \times [-R, R] \mapsto \int_{-R}^R f(r \cos \theta - t \sin \theta, r \sin \theta + t \cos \theta) dt.$$

En quoi la transformation qui à l'image discrète `I` (considérée ici comme « encadrée » dans l'image carrée `Iinit`) associe `S` est-elle la version discrète de la transformation de Radon (lorsque  $R = \text{ceil}(M/2)$ ) ? Dégagez un lien entre la transformation de Hough implémentée à l'exercice 1 et cette transformation de Radon discrète `Radon` envisagée ici. Testez cette transformation sur des images binaires de contours obtenues par exemple à partir de `lena.jpg` et comparez avec les résultats obtenus *via* la transformation de Hough.

EXERCICE 3 (inversion de la transformée de Radon discrète par rétro-projection). Soit `I` une image discrète de taille  $(N_1, N_2)$  (tous les deux pairs) et `Iinit, S` les variables obtenues par transformation discrète de `I` (exercice 2) :

>> [Iinit,S] = Radon(I,tauTheta).

L'inversion de la transformation de Radon (continue)  $f \mapsto R[f]$  introduite à la question **3** de l'exercice **2** s'obtient ainsi (on l'admettra dans cet exercice centré sur la rédaction d'un code), lorsque  $f$  est une fonction définie dans le disque  $D(0, R)$  et nulle hors de ce disque :

- on prolonge  $R[f]$  à  $[0, 2\pi] \times [-R, R]$  en observant que

$$R[f](\theta + \pi, r) = R[f](\theta, -r) \quad \forall \theta \in [0, \pi]$$

(pourquoi est-ce naturel ?) ;

- on calcule  $(\partial R[f]/\partial r)(\theta, r)$  sur  $[0, 2\pi] \times [-R, R]$  ;
- on calcule pour chaque valeur de  $\theta$  le spectre de la fonction

$$r \mapsto \frac{\partial R[f]}{\partial r}(r, \theta)$$

et on « fenêtré » le spectre obtenu (pour chaque valeur de  $\theta$ ) par une fenêtre de Hamming pour « adoucir » la brutalité de la coupure inévitable liée à la troncature des hautes fréquences ;

- pour chaque valeur de  $\theta$ , on multiplie le spectre tronqué obtenu précédemment par la fonction

$$\omega \mapsto i \operatorname{sign}(\omega)$$

(transformation de Hilbert), ce qui donne dans le domaine fréquentiel pour chaque valeur de  $\theta$  un signal  $\omega \mapsto u(\theta, \omega)$  vivant dans le domaine des fréquences ;

- pour chaque valeur de  $\theta$  dans  $[0, 2\pi]$ , on cherche l'antécédent  $r \mapsto g(\theta, r)$  du signal  $\omega \mapsto u(\theta, \omega)$  obtenu précédemment dans le domaine fréquentiel ;
- on construit enfin la fonction

$$(x, y) \in D(0, R) \mapsto \int_0^{2\pi} g(\theta, x \cos \theta + y \sin \theta) d\theta$$

(c'est l'étape dite de *rétroprojection*).

- dans le contexte continu, la fonction de deux variables ainsi obtenue doit être multipliée par un facteur  $1/(4\pi)$  (cette dernière opération est irrelevante dans le contexte discret).

Le résultat de toutes ces opérations est la fonction  $f$  dont la transformée de Radon  $R[f]$  était connue.

En utilisant les routines `Gradient.m` (voir le TP3) [pour le point 2], puis `hamming.m`, `spectre.m`, `ispectre.m` (voir le TP4) [pour les points 3, 4 et 5], enfin un code adhoc pour réaliser l'opération de rétroprojection [point 6], réalisez un code

>> II = iRadon(S,tauTheta);

qui reconstitue l'image I à partir de son spectrogramme S calculé avec un pas angulaire tauTheta par la routine Radon élaborée à l'exercice **2**.