COURANTS RÉSIDUS ET APPLICATIONS

COURS DE DEA, BORDEAUX, Février-JUIN 1994

ALAIN YGER

Préliminaires

L'objet de ce cours est de présenter une approche la plus élémentaire possible à la notion de résidu telle qu'elle intervient dans certaines questions de division effective en analyse pluricomplexe ou en géométrie algébrique. Notre point de vue est un point de vue analytique. Délibérément, nous avons choisi de définir la notion de résidu comme une intégrale sur une hypersurface réelle (et non un n cycle, où n désigne la dimension complexe de l'espace dans lequel on se place). Le lien sera fait dans la dernière section avec cette approche plus classique, et l'on examinera les conséquences que l'on peut en tirer du point de vue des calculs explicites.

L'aspect effectif est l'un de nos soucis, même si ce cours n'y contient qu'une bien pâle introduction. Nous avons volontairement ajouté à ces notes un appendice rédigé par H. Zhang, consistant à une introduction aux variétés toriques. L'approche des résidus comme courants fera apparaitre, comme on le verra dans la section 4, la construction de tels objets. D'autre part, le cadre des variétés toriques nous parait un cadre naturel pour envisager les calculs de sommes complètes de résidus. Le travail de E. Cattani, A. Dickenstein, B. Sturmfelds [CDS] (où les calculs sont faits dans un $\mathbf{P}^n$ à poids grâce à l'adjonction d'un paramètre) semble l'annoncer. C'est vers l'application de nos formules vers des problèmes de division du type *creux* (ou *sparse* (au sens de E. Canny, P. Pedersen, B. Sturmfelds) que nous aimerions aiguiller le lecteur. Cette direction, si elle n'est pas mentionnée explicitement dans ces notes, en soutend la finalité. Nous comptons ultérieurement utiliser ces quelques éléments de cours dans cette voie. Cette nécessité correspond au rôle joué par les sommes complètes de résidus dans l'expression explicite de formules de division (Nullstellensatz, appartenance dans le cas intersection complète, formulation globale du théorème de Briançon-Skoda). Par souci de simplicité, nous nous sommes cantonnés dans ces notes à la notion de résidu multidimensionnel attachée à un système de générateurs $(f_1, \ldots, f_n)$ d'un idéal de dimension 0. Le bon cadre pour introduire cette notion (et en exploiter les propriétés de dualité intéressantes) est cependant celui des intersections complètes.

Ont été réunis en appendice la bibliographie (loin d'être exhaustive) que nous avons utilisé pour rédiger ces notes de cours ainsi que le texte de l'épreuve proposée en fin de module. Je dois beaucoup aux étudiants (qui les relisaient au jour le jour) la correction des innombrables erreurs figurant dans le texte initial. Il est vraisemblable que beaucoup subsistent. R. Gay, M. Hickel (à qui je dois la compréhension des formules de [Lip], section 3), A. Dickenstein, M. Elkadi (qui m'a indiqué le travail de E. Biernat), Pi. Cassou-Noguès, Q. Liu, H. Zhang, A. Hénaut, Marie Francoise Coste-Roy et J. P. Cardinal (et j'en oublie!) m'ont apporté nombre de suggestions ainsi que beaucoup d'idées nouvelles. Enfin, une partie de ces notes correspond à un travail en cours avec C.A. Berenstein et prolonge (sous un angle plus algébrique) les résultats exposés dans notre récente monographie [BGVY].

SOMMAIRE

1. RESIDUS EN DIMENSION UN

1.1 Résidu global d'un polynôme ou d'une fraction rationnelle.

Etant donnée une fraction rationnelle $F = Q/P$ à coefficients dans un sous corps $\mathbf{K}$ de $\mathbf{C}$, on appelle *résidu global* de R la quantité

$$(1/2i\pi)\int_\Gamma F(\zeta)d\zeta \tag{1.1}$$

où Γ est un lacet continu quelconque de $\mathbf{C}\setminus\{P=0\}$ d'indice 1 par rapport à tous les zéros de P; on sait que cette intégrale ne dépend pas du lacet choisi (et est bien définie car la forme que l'on intègre est fermée). On sait aussi que ce nombre est un élément du corps $\mathbf{K}$. En effet, on peut prendre pour Γ un grand cercle de rayon R entourant tous les zéros de P; on peut écrire le développement en série de Laurent de F à l'infini, soit au voisinage de $\{\zeta, |\zeta| = R\}$, soit

$$F(\zeta) = \sum_{k=-N}^{\infty} a_k \zeta^{-k}, \tag{1.2}$$

où les a_k sont des éléments du corps $\mathbf{K}$ (obtenus par exemple via la division suivant les puissances croissantes). On calcule l'intégrale sur le grand cercle et l'on obtient la valeur du résidu comme étant celle du coefficient a_1.

Cette notion de résidu global peut être comprise de manière différente, en dissociant les rôles du numérateur et du dénominateur de la fraction rationnelle. On peut considérer l'espace vectoriel quotient $\mathbf{V} := \mathbf{K}[X]/P\mathbf{K}[X]$, $\mathbf{K}$-espace de dimension finie $D = deg(P)$, dont une base est constituée des classes des monômes $(1, X, X^2, \dots, X^{D-1})$. On peut considérer le dual $\mathbf{V}^*$ et l'équiper d'une structure de $\mathbf{V}$-module en définissant, pour tout $\overline{H}$ dans V, pour tout Φ dans $\mathbf{V}^*$, le morphisme $\overline{H}\cdot\Phi$ par

$$\overline{H}\cdot\Phi(\overline{Q}) = \Phi(\overline{HQ}), \tag{1.3}$$

où H est un représentant de $\overline{H}$. Parmi les éléments de $\mathbf{V}^*$, l'un va jouer un rôle essentiel; on l'appellera morphisme *résidu global*.

Définition 1.1. *Etant donné un polynôme P de degré au moins égal à 1 et à coefficients dans $\mathbf{K}$, on appelle morphisme résidu global relativement à P, et l'on note Res_P, le morphisme qui à $\overline{H}\in\mathbf{V}$ associe*

$$Res_P(\overline{H}) := \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{H(\zeta)}{P(\zeta)}d\zeta, \tag{1.4}$$

où Γ entoure une fois tous les zéros de P et H est un représentant de $\overline{H}$.

Justification de la définition. Il suffit de remarquer que si H est un multiple de P, l'intégrale figurant dans (1.4) est nulle (on intègre une forme exacte sur un lacet); ceci montre que la définition est indépendante du représentant choisi et nous donne bien un élément du dual $\mathbf{V}^*$.

Remarque 1.1. Si le polynôme est à coefficients dans un anneau $\mathbf{A}$ et est unitaire, alors $\mathbf{U} = \mathbf{A}[X]/P\mathbf{A}[X]$ est un $\mathbf{A}$-module de type fini et l'on vérifie immédiatement que Res_P (défini dans $\mathbf{C}$ comme dans (1.4)) induit un morphisme de A-modules de U (équipé de sa structure de A-module) dans A (Exercice).

Proposition 1.2. $\mathbf{V}^*$ *est engendré par* Res_P *en tant que* V*-module (avec l'action définie par (1.3)).*

Preuve. La clef de la preuve de cette proposition est la formule de Lagrange. On peut représenter tout polynôme Q à l'intérieur d'un disque de rayon R contenant tous les zéros de P en utilisant la formule de Cauchy:

$$Q(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{Q(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

que l'on peut écrire aussi:

$$Q(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{Q(\zeta)P(\zeta)}{P(\zeta)(\zeta - z)} d\zeta, \ |z| < R$$

ou encore:

$$Q(z) = \frac{1}{2i\pi} P(z) \int_\Gamma \frac{Q(\zeta)}{P(\zeta)(\zeta - z)} d\zeta + \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma Q(\zeta) \frac{P(\zeta) - P(z)}{(P(\zeta))(\zeta - z)} d\zeta. \tag{1.5}$$

Puisque

$$(\zeta, z) \mapsto \frac{P(\zeta) - P(z)}{\zeta - z} := \Delta(z, \zeta)$$

est un polynôme en deux variables à coefficients dans $\mathbf{K}$, les deux termes figurant au membre de droite de (1.5) sont des polynômes et la formule (1.5) est une identité polynomiale valable partout. Cette identité s'écrit aussi:

$$Q(X) \equiv Res_P[Q\Delta(X, \cdot)] \ (mod.P\mathbf{K}[X]). \tag{1.6}$$

On voit ainsi que si T est un élément du dual de $\mathbf{V}$, alors, pour tout $Q \in \mathbf{K}[X]$,

$$T(\overline{Q}) = T_X(\overline{Res_P[Q\Delta(\cdot, X)]}), \tag{1.7}$$

ce qui permet d'écrire T sous la forme $\overline{H}_T Res_P$, où

$$\overline{H}_T = \overline{T_X(\Delta(\cdot, X))};$$

on utilise la continuité de T, automatique car on travaille ici en dimension finie. Ceci achève bien la preuve de la proposition. $\diamondsuit$

Remarque 1.2. Le morphisme résidu entre en jeu dans l'expression du reste intervenant dans la division euclidienne. En effet, le reste de la division de Q par P est en fait

$$Res_P[Q\Delta(\cdot, X)].$$

Nous utiliserons ultérieurement la notation suivante pour Res_P:

$$Res_P(Q) = <\overline{\partial}(1/P), Qd\zeta>, \tag{1.8}$$

notation que nous justifierons au paragraphe 2. Il est naturel, tout en restant dans ce cadre algébrique, d'étendre l'action du résidu global relatif à P aux fractions rationnelles à pôles hors de l'ensemble des zéros de P. On définit ainsi:

$$Res_P(R) = <\overline{\partial}(1/P), Rd\zeta> := \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\epsilon} \frac{R(\zeta)}{P(\zeta)} d\zeta, \tag{1.9}$$

où γ_ϵ est un cycle d'indice 1 par rapport aux zéros de P, d'indice 0 par rapport aux pôles de R (par exemple un cycle formé de petits cercles parcourus une fois dans le sens trigonométrique autour des zéros de P).

Proposition 1.3. *Si $P \in \mathbf{K}[X]$, $R \in \mathbf{K}(X)$, et si les pôles de R (dans $\mathbf{C}$) sont disjoints des zéros de P, $Res_P(R)$ est un élément du corps K.*

Preuve. Supposons $R = R_1/R_2$ et introduisons un paramètre α que l'on supposera transcendant par rapport à $\mathbf{K}$. Le calcul de l'intégrale (1.9) par les formules usuelles de calcul de résidu montre que

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\epsilon} \frac{R_1(\zeta)}{(R_2(\zeta)-\alpha)P(\zeta)} d\zeta = \Theta(\alpha),$$

où Θ est une fraction rationnelle à coefficients dans $\overline{\mathbf{K}}$. Il est immédiat de développer cette fraction rationnelle au voisinage de l'infini en utilisant le développement des termes sous l'intégrale. On a, pour $|\alpha| >> 0$,

$$\Theta(\alpha) = -\sum_{k=0}^{\infty} Res_P(R_1 R_2^k)\alpha^{-k-1}. \tag{1.10}$$

Mais un dénominateur de Θ (en tant qu'élément de $\overline{\mathbf{K}}(\alpha)$) est

$$\delta(\alpha) = \prod_{\xi, P(\xi)=0} (R_2(\xi) - \alpha),$$

les zéros étant comptés avec multiplicité; comme fonction symétrique des racines d'un polynôme, le polynôme δ est un polynôme à coefficients dans $\mathbf{K}$, de degré $D = deg(P)$. On peut écrire, pour $|\alpha| >> 0$,

$$\Theta(\alpha)\delta(\alpha) = -\delta(\alpha)(\sum_{k=0}^{D-1} Res_P(R_1 R_2^k)\alpha^{-k-1}) \tag{1.11}$$

(la série à droite est tronquée puisque l'on doit avoir un polynôme); cette identité est une identité polynomiale valable partout. Le nombre que l'on cherche est égal au quotient par $\delta(0)$ du terme constant dans le membre de droite de (1.11). C'est un élément de $\mathbf{K}$ et ce que nous venons de faire donne une manière de le calculer explicitement. $\diamondsuit$

La propriété d'annulation suivante est bien connue et est un résultat du probablement à Lagrange:

Proposition 1.4. *Si P et Q sont deux polynômes à coefficients dans $\mathbf{K}$ tels que $deg(Q) \leq deg(P) - 2$, alors $Res_P(Q) = 0$. En particulier, si P a des racines simples et si l'inégalité sur les degrés est remplie,*

$$\sum_{\xi, P(\xi)=0} \frac{Q(\xi)}{P'(\xi)} = 0. \tag{1.12}$$

Preuve. C'est immédiat; on développe Q/P au voisinage de l'infini et l'on voit que le coefficient a_1 de la formule (1.2) est nul. $\diamondsuit$

Montrons pour terminer cette section comment cette notion de résidu global intervient dans les formules de division. Pour cela, nous considèrerons m polynômes à coefficients dans $\mathbf{K}$ sans zéros communs. On sait qu'en suivant l'algorithme d'Euclide, on peut trouver m polynômes $Q_1, \ldots, Q_m$ à coefficients dans $\mathbf{K}$ tels que

$$1 = \sum_{j=1}^{m} Q_j P_j. \tag{1.13}$$

Une autre manière d'exhiber une telle formule consiste à former le déterminant de Sylvester de P_1 et de $u_1 P_1 + \cdots + u_m P_m$, où les u_i sont des paramètres transcendants sur $\mathbf{K}$; ceci nous donne un polynôme $\mathcal{S}$ en u à coefficients dans $\mathbf{K}$ que l'on peut écrire

$$\mathcal{S}(u) = \sum_{j=1}^{m} \mathcal{S}_j(u, \cdot) P_j; \tag{1.14}$$

en spécifiant les valeurs de u de manière à ce que $\mathcal{S}(u) \neq 0$, on trouve une identité de la forme (1.13). Nous allons atteindre une identité similaire en utilisant les résidus globaux.

On part pour cela de la formule de Cauchy. Si l'on suppose que P_1 est de degré $D \geq 1$, on est certain, lorsque z est un nombre complexe fixé, qu'il existe $R = R(z) > |z|$ tel que $P_1 - P_1(z)$ ne s'annule pas sur le cercle de rayon $R(z)$; on peut même supposer que tous les zéros de P_1 sont ̀l'intérieur du disque de rayon R. Cauchy donne

$$1 = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|=R(z)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|=R} \frac{P_1(\zeta) - P_1(z)}{(P_1(\zeta) - P_1(z))(\zeta - z)} d\zeta,$$

soit, en développant sous l'intégrale,

$$1 = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|=R(z)} \left(\frac{P_1(\zeta) - P_1(z)}{\zeta - z} \right) \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_1(z)^k}{P_1(\zeta)^{k+1}} \right] d\zeta. \tag{1.15}$$

Si l'on pose

$$g_1(z,\zeta) = \frac{P_1(\zeta) - P_1(z)}{\zeta - z},$$

on a donc

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} P_1(z)^k Res_{P^{k+1}}[g_1(z,\cdot)]; \tag{1.16}$$

mais en appliquant la proposition 1.4, la formule 1.16 s'écrit simplement

$$1 = Res_P[g_1(z,\cdot)] \tag{1.17}$$

et devient une simple identité algébrique (que d'ailleurs on aurait pu atteindre plus vite en remarquant que la différence des deux polynômes impliqués dans (1.17) était un polynôme de degré au plus $deg(P_1) - 1$ divisible par P_1 d'après la remarque 1.2). On introduit maintenant une combinaison linéaire générique à coefficients entiers de $P_1, \ldots, P_m$, soit $u_1 P_1 + \cdots u_m P_m$; on choisit les paramètres u_j dans $\mathbf{Z}$ en imposant

$$\prod_{\xi, P_1(\xi)=0} (\sum_{j=1}^{m} u_j P_j(\xi)) \neq 0. \tag{1.18}$$

Notons que le membre de gauche apparaissant dans (1.18) est un polynôme en u, homogène et de degré $D_1 = deg(P_1)$; ce polynôme est d'ailleurs le résultant de Sylvester introduit précédemment (dans (1.14)). Une fois que u a été spécifié, on écrit (1.17) sous la forme:

$$1 = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_\epsilon(u)} \frac{\begin{vmatrix} g_1(z,\cdot) & 0 \\ 0 & \sum_{j=1}^m u_j P_j(\zeta) \end{vmatrix}}{P_1(\zeta)(\sum_{j=1}^m u_j P_j(\zeta))} d\zeta,$$

où $\gamma_\epsilon(u)$ est un cycle constitué de petits cercles entourant chacun une fois un zéro de P_1 et jamais de zéro de $\sum_{j=1}^m u_j P_j$. Si l'on pose

$$g_j(z,\zeta) = \frac{P_j(\zeta) - P_j(z)}{\zeta - z},$$

on obtient en retranchant à la seconde ligne du déterminant la première multipliée par $\zeta - z$,

$$1 = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_\epsilon(u)} \frac{\sum_{k=1}^m u_k \begin{vmatrix} g_1(z,\cdot) & g_k(z,\zeta) \\ P_1(z) - P_1(\zeta) & P_k(z) \end{vmatrix}}{P_1(\zeta)(\sum_{j=1}^m u_j P_j(\zeta))} d\zeta, \tag{1.19}$$

ce que l'on peut encore écrire

$$1 = \sum_{k=1}^{m} u_k Res_P \left[\frac{g_1(X,\cdot)P_k(X) - g_k(X,\cdot)P_1(X)}{\sum_{j=1}^m u_j P_j(\zeta)} \right]. \tag{1.20}$$

Cette formule est une identité du type (1.13); tous les quotients ont été exprimés en termes de résidus et il serait intéressant de comparer la formule (1.20) avec la formule obtenue à partir de (1.14) en divisant par $\mathcal{S}$. Ce que nous venons de faire consiste à traduire en termes de résidus l'expression des quotients $\mathcal{S}_j(u,\cdot)/\mathcal{S}$ intervenant dans (1.14). Ceci montre bien le rôle joué par notre morphisme résidu (lorsqu'il est étendu aux fractions rationnelles) dans le processus de division; on le retrouve à la fois dans l'expression du reste (remarque 1.2) dans la division euclidienne et dans l'expression des quotients intervenant dans l'identité de Bezout, que l'on peut regarder comme l'aboutissement d'une recherche de PGCD.

1.2. La notion de courant résidu.

On souhaite maintenant s'affranchir de la rigidité algébrique des objets introduits au paragraphe 1. Si f est une fonction holomorphe au voisinage d'un point β, non identiquement nulle au voisinage de ce point, on peut écrire, au voisinage de β,

$$f(\zeta) = u_\beta(\zeta)(\zeta-\beta)^{m_f(\beta)},$$

où $m_f(\beta) = m$ désigne la multiplicité du zéro et u_β est une fonction ne s'annulant pas au voisinage de β. L'application

$$\zeta \mapsto w = (u_\beta(\zeta))^{1/m}(\zeta-\beta)$$

réalise un difféomorphisme local θ_β entre un voisinage V_β de β (dans $\mathbf{C}_\zeta$) et un voisinage de 0 dans $\mathbf{C}_w$. Ce difféomorphisme nous permet d'affirmer que si ϵ est assez petit, $V_\beta \cap \{|f| = \epsilon\}$ est une courbe fermée lisse que l'on peut considérer comme le support d'un cycle $\sigma_{\epsilon,\beta}$ d'indice 1 par rapport à β. Ainsi, si l'on associe au polynôme P du paragraphe 1 un cycle $\sigma_\epsilon(P)$ obtenu en ajoutant les cycles $\sigma_{\epsilon,\beta}$ correspondant aux diverses racines de P, on peut écrire, en déformant les contours:

$$< \overline{\partial}(1/P), Qd\zeta >= \frac{1}{2i\pi}\int_{\sigma_\epsilon(P)} \frac{Q(\zeta)}{P(\zeta)}d\zeta. \tag{1.21}$$

On aimerait s'affranchir du fait que Q soit holomorphe, tout en conservant l'holomorphie de P (nous avons l'intention d'étudier les problèmes de division relatifs à des idéaux engendrés par des fonctions holomorphes). En fait, on peut se placer dans un ouvert U de $\mathbf{C}$, considérer une fonction holomorphe dans U, non identiquement nulle, et définir l'action du résidu $\overline{\partial}(1/f)$ sur les (1,0) formes différentielles à coefficients dans $\mathcal{D}(\mathbf{R}^2)$. Pour ce faire, on prouve tout d'abord le résultat suivant:

Proposition 1.5. *Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert Ω et s'annulant en un seul point β avec la multiplicité $m(\beta) = m$. Soit ϕ une fonction de $\mathcal{D}(\Omega)$. Pour ϵ assez petit, Supp$(\phi) \cap \{|f| = \epsilon\}$ est une courbe de Jordan de classe $\mathcal{C}^1$ portant un cycle (que l'on notera encore $\{|f| = \epsilon\}$) d'indice 1 par rapport à β. Alors, la limite de*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{|f|=\epsilon} \frac{\phi(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta$$

existe et vaut

$$\frac{1}{(m_f(\beta)-1)!}\left[\frac{\partial}{\partial\zeta}\left((\zeta-\beta)^{m_f(\beta)}\phi(\zeta)\right)\right]_{\zeta=\beta}. \tag{1.22}$$

Preuve. Pour ϵ suffisamment petit, $Supp(\phi)\cap\{|f|=\epsilon\}$ est inclus dans V_β et le cycle correspondant est l'image par θ^{-1} du cycle $\{|w|=\epsilon^{1/m}\}$. On peut alors écrire:

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{|f|=\epsilon}\frac{\phi(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta=\int_{\{|w|=\epsilon^{1/m}\}}\frac{\phi(\theta_\beta^{-1}(w))}{\theta_\beta'(\theta_\beta^{-1}(w))}\frac{dw}{w^m}. \tag{1.23}$$

Posons

$$\psi(w)=\frac{\phi(\theta_\beta^{-1}(w))}{\theta_\beta'(\theta_\beta^{-1}(w))}\ ;$$

développons en série de Taylor à l'ordre $m-1$ la fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ ψ au voisinage de l'origine; on peut écrire ce développement sous la forme

$$\psi(w)=\sum_{k,lk+l\leq m-1}\frac{\partial^{k+l}}{\partial w^k\partial\overline{w}^l}[\psi](0)w^k\overline{w}^l+O(|w|^m) \tag{1.24}$$

et reportons ce développement dans (1.23). Lorsque ϵ tend vers 0, le terme

$$\int_{\{|w|=\epsilon^{1/m}\}}\frac{O(|w|^m)}{w^m}dw$$

tend vers 0. D'autre part, l'intégrale

$$\int_{\{|w|=\epsilon^{1/m}\}}w^{k-m}\overline{w}^l dw$$

vaut 0 si $k-l-m\neq-1$ et vaut $2i\pi$ si $k-l=m-1$. On voit donc immédiatement que l'expression (1.22) a pour limite lorsque ϵ tend vers 0 la quantité $\partial^{m-1}/\partial w^{m-1}[\psi](0)$. Si ϕ est une fonction holomorphe au voisinage de β, les calculs usuels de résidus montrent que la valeur de la limite est donnée par la formule (1.22). Si maintenant ϕ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$, on peut séparer dans le développement de Taylor à l'ordre $m-1$ de ϕ au voisinage de β la *partie holomorphe* soit

$$\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\partial^k}{\partial\zeta}[\phi](\beta)(\zeta-\beta)^k, \tag{1.25}$$

du reste, à savoir

$$\sum_{k+l\leq m-1,l\geq 1}\frac{\partial^{k+l}}{\partial\zeta^k\partial\overline{\zeta}^l}[\phi](\beta)(\zeta-\beta)^k(\overline{\zeta}-\overline{\beta})^l+O(|\zeta|^m).$$

Ce que nous venons de faire en transportant le problème via le difféomorphisme biholomorphe θ (qui respecte holomorphie et antiholomorphie) nous montre que seule la partie holomorphe (1.25) contribue à la limite. Par conséquent, la valeur de cette limite s'obtient en remplacant ϕ par sa partie holomorphe à l'ordre $m-1$ au voisinage de β. Pour calculer la valeur de la limite, on est donc ramené au cas holomorphe, cas que nous savons traiter via les calculs de résidus usuels. $\diamondsuit$

Cette limite sera dénotée par la suite

$$< \partial(1/f), \phi(\zeta)d\zeta >_{\beta}$$

et appelée *résidu local* de la forme $\phi d\zeta$ relativement à f au point ζ. On peut considérer aussi une notion globale.

Définition 1.6. *Soit f une fonction holomorphe non identiquement nulle dans un ouvert connexe de $\mathbf{C}$. L'application qui à une (1,0) forme à support compact dans U associe la somme des résidus locaux aux zéros de f inclus dans le support de ϕ est un (0,1) courant, c'est à dire un élément du dual de l'espace $\mathcal{A}_c^{(1,0)}(U)$ (par celle de $\mathcal{D}(U)$. Si les zéros de f dans U sont au plus d'ordre m_U, ce courant est un courant d'ordre au plus $m_U - 1$, ce qui signifie $\overline{\partial}(1/f) = T_U d\overline{\zeta}$, où T_U est une distribution d'ordre au plus $m_U - 1$, d'ailleurs portée par l'ensemble des zéros de U.*

Il existe d'autres procédés très simples pour retrouver l'action du courant résidu. L'un d'eux consiste en la chose suivante. Son intérêt est d'éviter le problème de l'intégration sur les cycles $|f| = \epsilon$, problème qui, on s'en doute, sera source de difficultés en dimension plus grande que 1. Si l'on considère une fonction ϕ dans $\mathcal{C}(U)$, on peut, pour $\Re(\lambda) > 1$, considérer la fonction continue

$$J_f(\cdot, \phi) : \ \mu \mapsto J_f(\mu, \phi) := \frac{\mu}{2i\pi} \int_{\mathbf{C}} |f(\zeta)|^{2(\mu-1)} \overline{\partial f} \wedge \phi(\zeta) d\zeta. \tag{1.26}$$

Lorsque $\Re(\mu) > 2$, cette intégrale se transforme via la formule de Stokes en

$$J_f(\mu, \phi) = -\int_{\mathbf{C}} \frac{|f(\zeta)|^{2\mu}}{f(\zeta)} \frac{\partial \phi}{\partial \overline{\zeta}}(\zeta) d\overline{\zeta} \wedge d\zeta \tag{1.27}$$

(puisque l'intégrale sur $\mathbf{C}$ de la forme $\overline{\partial}(\frac{|f|^{2\mu}}{f}\phi)$ est nulle comme il s'agit du $\overline{\partial}$ d'une forme à support compact). Nous avons le lemme suivant:

Lemme 1.7. *Soit un entier positif N et ϕ un élément de $\mathcal{D}(U)$. La fonction $J_f(\cdot, \phi, N)$ définie pour $\Re(\mu) > 1$ par*

$$J_f(\mu, \phi, N) := -\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbf{C}} \frac{|f(\zeta)|^{2\mu}}{f(\zeta)^N} \frac{\partial \phi}{\partial \overline{\zeta}}(\zeta) d\overline{\zeta} \wedge d\zeta \tag{1.28}$$

se prolonge en une fonction méromorphe dans tout le point complexe dont les pôles sont dans $\mathbf{Q}^-$; ce prolongement est en particulier holomorphe au voisinage de l'origine et, *lorsque $N = 1$, la valeur en 0 est le résidu global de $\phi d\zeta$ relativement à f dans l'ouvert U, tel qu'il est introduit dans la définition 1.6. On peut donc écrire*

$$J_f(0,\phi) =< \overline{\partial}(1/f), \phi(\zeta)d\zeta >_U . \tag{1.29}$$

Preuve. Comme

$$J_f(\mu,\phi,N) = J_{f^N}(\mu,\phi,1),$$

il est clair qu'il suffit de prouver la proposition dans le cas $N = 1$. On a recours, avant même d'effectuer la transformation (1.27), à une partition de l'unité (ψ_j) subordonnée à un recouvrement de $Supp(\Phi)$ par des boules B_j, soit centrées en un zéro β de f et de rayon assez petit pour que le difféomorphisme biholomorphe θ_β y soit défini, soit ne contenant aucun zéro de f. Ainsi

$$J_f(\mu,\phi) = \sum_j J_f(\mu,\psi_j\phi).$$

Si l'indice j correspond à une boule du second type, la fonction

$$\mu \mapsto J_f(\mu,\phi\psi_j)$$

se prolonge en une fonction entière (f ne s'annule pas sur le support de $\phi\psi_j$). Dans le second cas, on peut écrire, en utilisant le difféomorphisme θ_β (si $\psi_j = \psi_\beta$):

$$J_f(\mu,\phi\psi_\beta) = -\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbf{C}} \frac{|w|^{m(\beta)\mu}}{w^{m(\beta)}} \frac{\partial(\phi\psi_\beta)}{\partial\overline{\zeta}}[\theta^{-1}(w)]|(\theta^{-1})'(w))|^2 d\overline{w}\wedge dw. \tag{1.30}$$

Si p est un entier positif, on a, pour $\Re(\mu)$ suffisamment grand (cela dépendant de p), en posant pour simplifier $m(\beta) = m$, l'identité

$$\frac{\partial}{\partial\overline{w}}\left(\frac{|w|^{2m\mu}}{\overline{w}^p}\right) = (m\mu - p)\frac{|w|^{2m\mu}}{\overline{w}^{p+1}} \tag{1.31}$$

En utilisant sucessivement (1.31) pour $p = -1, p = -2, \ldots, p = -m$ et la formule de Stokes qui nous assure, à p fixé, pour $\Re(\mu)$ assez grand et ψ à support compact,

$$\int_{\mathbf{C}} \overline{\partial}\left(\frac{|w|^{2m\mu}}{\overline{w}^p}\right)\wedge\psi(w)dw = -\int_{\mathbf{C}} \frac{|w|^{2m\mu}}{\overline{w}^p}\overline{\partial}(\psi(w)dw),$$

on obtient pour $\Re(\mu)$ assez grand

$$J_f(\mu,\phi\psi_\beta) = \frac{(-1)^m}{(2i\pi)\prod_{k=1}^m(m\mu+k)}\int_{\mathbf{C}} |w|^{2m\mu}\left(\frac{\overline{w}}{w}\right)^m \frac{\partial^m}{\partial\overline{w}^m}[\Theta_{\phi,\beta}(w)]d\overline{w}\wedge dw \tag{1.32}$$

où

$$\Theta_{\phi,\beta}(w) := \left(\frac{\partial(\phi\psi_\beta)}{\partial\overline{\zeta}}[\theta^{-1}(w)]\right)|(\theta^{-1})'(w))|^2.$$

Si l'on passe en coordonnées polaires, on voit que

$$J_f(\mu,\phi\psi_\beta) = \frac{(-1)^m}{\pi\prod_{k=1}^m(m\mu+k)} = -2\pi\int_0^R\int_0^{2\pi}|\rho|^{2m\mu+1}e^{-2mi\theta}\Theta_{\phi,\beta}(\rho e^{i\theta})d\rho d\theta\,. \quad (1.33)$$

La seconde intégrale dans (1.33) définit une fonction holomorphe de μ dans le demi plan $\Re(2\mu+1) > -1$, soit $\Re(\mu) > -1/m$; la fonction du paramètre μ figurant au second membre de (1.33) est en fait holomorphe dans $\Re(\mu) > -1/m = -1/m(\beta)$; il est clair que pour tout $K > 0$, en itérant davantage ce processus d'intégration par parties, on aurait pu identifier $J_f(\cdot,\phi\psi_\beta)$ pour $\Re(\mu)$ suffisamment grand avec une fonction méromorphe dans $\Re(\mu) > -K$, à pôles dans $\mathbf{Q}^-$. Ceci prouve que la fonction $J_f(\cdot,\phi\psi_\beta)$, et par conséquent aussi $J_f(\cdot,\phi)$, se prolonge au plan complexe tout entier en une fonction méromorphe à pôles dans $\mathbf{Q}^-$.
Il reste à calculer la valeur du prolongement en 0; comme $J_f(0,\phi\psi_j)$ est nul si le support de ψ_j ne contient aucun zéro de f, on se limitera, pour prouver (1.29), au cas où $\psi_j = \psi_\beta$. Nous avons vu (proposition 1.5) que la fonction

$$s\in\mathbf{R}^+ \mapsto I(\phi\psi_\beta,\sqrt{s}) = \frac{1}{2i\pi}\int_{|f|^2=s}\frac{\phi\psi_\beta d\zeta}{f(\zeta)}$$

est une fonction continue, y compris en zéro. Cette fonction est aussi à support compact puisque f est bornée sur le support de ψ_β. Nous pouvons considérer ce que l'on appelle la *transformée de Mellin* de $I(\phi\psi_\beta,\cdot)$, soit la fonction $K_f(\cdot,\phi\psi_\beta)$ du paramètre complexe μ, holomorphe dans $\Re(\mu) > 1$, où elle est définie par

$$K_f(\cdot,\phi\psi_\beta) := \mu\int_0^{+\infty}s^{\mu-1}I(\phi\psi_\beta,\sqrt{s})ds.$$

Les fonctions $K_f(\cdot,\phi\psi_\beta)$ et $J(\cdot,\phi\psi_\beta)$ coïncident pour $\Re(\mu)$ suffisamment grand. Nous allons en donner une preuve volontarement un peu compliquée, mais qui introduit des idées que l'on pourra ensuite transposer au cadre de plusieurs variables. On introduit une suite (χ_ν) de fonctions cut-off de $\mathbf{R}$ dans $[0,1]$, de classe $\mathcal{C}^\infty$, approchant -au sens des distributions- la fonction caractéristique de $[1,+\infty[$; ceci signifie que pour toute fonction $u\in\mathcal{D}(\mathbf{R})$, on a

$$\int_{\mathbf{R}}\chi_\nu(\xi)u(\xi)d\xi \to \int_1^\infty u(\xi)d\xi$$

lorsque ν tend vers l'infini. Calculons, pour μ fixé de partie réelle suffisamment grande et $\eta > 0$,

$$K_f^{(\nu,\eta)}(\mu,\phi\psi_\beta) := \frac{\mu}{2i\pi}\int_0^\infty s^{\mu-1}\left(\int_{\mathbf{C}}\overline{\partial}[\chi_\nu(|f|^2/s)](\zeta)\wedge\frac{\phi\psi_\beta(\zeta)d\zeta}{f(\zeta)}\right)ds;$$

par Fubini, il vient

$$K_f^{(\nu,\eta)}(\mu,\phi\psi_\beta) = \frac{\mu}{2i\pi}\int_{\mathbf{C}}\Theta_{\nu,\eta}(\zeta)\overline{\partial f(\zeta)}\wedge\phi\phi_\beta(\zeta)d\zeta,$$

où

$$\Theta_{\nu,\eta}(\zeta) := \int_\eta^\infty s^{\mu-2}\chi'_\nu(\frac{|f(\zeta)|^2}{s})ds.$$

Si maintenant on fait tendre ν vers l'infini (η étant toujours bloqué), puis ensuite η vers 0, on obtient, puisque la suite $\Theta_{\nu,\eta}$ converge de manière dominée vers $|f(\zeta)|^{2(\mu-1)}$ (ceci découlant de la définition des χ_ν, ce que l'on vérifiera en exercice)

$$\lim_{\eta\to 0}\lim_{\nu\to\infty} K^{(\nu,\eta)}(\mu,\phi\psi_\beta) = J_f(\mu,\phi\psi_\beta). \tag{1.34}$$

Si l'on calcule la limite de $K_f^{(\nu,\eta)}(\mu,\phi\psi_\beta)$ avant d'utiliser Fubini comme on vient de le faire, on trouverait en utilisant le théorème de Stokes

$$\lim_{\nu\to\infty} K_f^{(\nu,\eta)}(\mu,\phi\psi_\beta) = \mu\int_\eta^\infty s^{\mu-1}I(\phi\psi_\beta,\sqrt{s})ds,$$

ce qui donne aussi

$$\lim_{\eta\to 0}\lim_{\nu\to\infty} K_f^{(\nu,\eta)}(\mu,\phi\psi_\beta) = \mu\int_0^\infty s^{\mu-1}I(\phi\psi_\beta,\sqrt{s})ds. \tag{1.35}$$

En comparant (1.34) et (1.35), on a bien représenté $J_f(\cdot,\phi)$ comme la transformée de Mellin de $I(\phi,\sqrt{\cdot})$ que l'on notera pour simplifier ρ. On a

$$\mu\int_0^\infty s^{\mu-1}\rho(s)ds - \rho(0) = \mu\int_0^A s^{\mu-1}(\rho(s)-\rho(0))ds + (A^\mu - 1)\rho(0). \tag{1.36}$$

Ainsi, pour $0 < \eta < A$,

$$\left|\mu\int_0^\infty s^{\mu-1}\rho(s)ds - \rho(0)\right| \leq \eta^\mu \max_{|s|\leq\eta}|\rho(s)-\rho(0)| + 2Max(|\rho|)(A^\mu - \eta^\mu). \tag{1.37}$$

En utilisant la continuité de $\rho = I(\phi,\cdot)$ en 0, ce qui nous autorise à choisir convenablement η, on voit que la transformée de Mellin $J_f(\cdot,\phi)$ est holomorphe dans $\Re(\mu) > 0$ et a pour limite en 0 $\rho(0)$, soit précisément $<\overline{\partial}(1/f),\phi(\zeta)d\zeta>$. $\diamondsuit$

Remarque. Si cette approche du résidu est techniquement plus agréable puisqu'on ne manie que l'intégration dans **C**, elle n'est pas intéressante du point de vue du calcul effectif du résidu local puisque l'on n'a pas accès au prolongement analytique aussi aisément qu'à l'intégration sur les cycles. Cette difficulté se trouve cachée en dimension 1, mais apparaitra de manière évidente par la suite.

2. REPRESENTATIONS INTEGRALES TRACES ET MULTIPLICITES

2.1. Les formules de Bochner-Martinelli et d'Andreotti-Norguet.

Le fait que la fonction

$$\zeta \in \mathbf{R}^{2n} \mapsto G(\zeta) = \|\zeta\|^{2-2n}$$

soit solution (au sens des distributions) de l'équation $\Delta G = C(n)\delta_0$ dans $\mathbf{R}^{2n}$ (quand $n > 1$, sinon on prend $G(\zeta) = ln\|\zeta\|^2$ lorsque $n = 1$) induit des formules de représentation classiques pour les fonctions holomorphes de n variables généralisant la formule de Cauchy. Rappelons qu'une fonction F holomorphe dans un ouvert de $\mathbf{C}^n$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ (comme fonction de $2n$ variables réelles) solution du système différentiel de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial}{\partial \overline{\zeta_j}}(F)(\zeta) \equiv 0,\ j = 1, \ldots, n. \tag{2.1}$$

Nous avons les formules de représentation de Bochner-Martinelli.

Proposition 2.1. *Soit h une fonction holomorphe au voisinage de la boule de rayon R dans $\mathbf{C}^n$. On a:*

$$h(0) = \frac{(n-1)!(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2i\pi)^n} \int_{\|\zeta\|=R} h(\zeta) \frac{\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1}\overline{\zeta_k} d\overline{\zeta_{[k]}} \wedge d\zeta}{\|\zeta\|^{2n}} \tag{2.2}$$

où

$$d\zeta := d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n$$

et, pour $k \in \{1, \ldots, n\}$,

$$d\overline{\zeta_{[k]}} = \bigwedge_{1 \leq j \leq n, j \neq k} d\overline{\zeta}_j.$$

Remarque. Dans le cas où $n = 1$, la formule ci dessus généralise la formule de Cauchy.

Preuve. On calcule cette intégrale en utilisant simplement la formule de Stokes; la forme que l'on intègre est fermée sur $\mathbf{C}^n \setminus \{0\}$ et la formule de Stokes nous autorise à remplacer R par r arbitrairement petit. On doit donc calculer

$$\int_{\|\zeta\|=r} h(\zeta) \frac{\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1}\overline{\zeta_k} d\overline{\zeta_{[k]}} \wedge d\zeta}{\|\zeta\|^{2n}} = \frac{1}{r^{2n}} \int_{\|\zeta\| \leq r} h(\zeta) \overline{\partial} \left(\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \overline{\zeta_k} d\overline{\zeta_{[k]}} \right) \wedge d\zeta. \tag{2.3}$$

La seconde intégrale dans (2.3) vaut

$$n \int_{\|\zeta\| \leq r} h(\zeta) \overline{d\zeta} \wedge d\zeta. \tag{2.4}$$

Si l'on utilise le changement de variables polaires $\zeta_j = r_j e^{i\theta_j}$, on voit que l'on ne modifie l'intégrale (2.4) en remplacant h par $h(0)$ (on utilise ici le fait qu'une fonction holomorphe au voisinage d'une boule de rayon R se développe en série entière de $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ au voisinage de cette boule). La seconde intégrale dans (2.3) vaut donc

$$(2i)^n (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} Vol_n(B(0,r)),$$

le volume étant le volume pour la mesure de Lebesgue dans $\mathbf{r}^{2n}$; ce volume vaut

$$r^{2n}\pi^n \int_{\tau_1+\cdots+\tau_n\leq 1} d\tau_1 \cdots d\tau_n = \frac{\pi^n r^{2n}}{n!}.$$

La formule (2.2) en résulte. $\diamondsuit$

Nous allons donner maintenant les formules de représentation plus générales, déduites immédiatement de la proposition 2.1.

Proposition 2.2 (formules de Bochner-Martinelli). *Soit U un ouvert borné de $\mathbf{R}^{2n}$ dont la frontière est constituée d'une union finie de nappes $\Sigma_j = \{\rho_j = 0\}$, où ρ_j est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de Σ_j, à valeurs réelles, vérifiant $d\rho_j \neq 0$ sur Σ_j; de plus les contacts des différentes nappes doivent se faire avec un ordre fini (on dit encore que U est un ouvert de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux). Soit z^0 un point fixé dans U et s une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ d'un voisinage W de ∂U dans $\mathbf{C}^n$ telle que*

$$< s(\zeta), \zeta - z_0 >:= \sum_{k=1}^{n} s_k(\zeta)(\zeta_k - z_k^0) \neq 0,\ \zeta \in W.$$

Pour toute fonction h dans l'algèbre de Banach (pour la norme uniforme) $B(U)$ des fonctions holomorphes dans U et continues dans $\overline{U}$, on a

$$h(z^0) = \frac{(n-1)!(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2i\pi)^n} \int_{\partial U} h(\zeta) \frac{\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} s_k(\zeta) ds_{[k]}(\zeta) \wedge d\zeta}{< s(\zeta), \zeta - z^0 >^n}. \qquad (2.5)$$

Preuve. On peut supposer h de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de U par exemple en introduisant un point z^1 tel que, pour η strictement positif et suffisamment petit, le contracté

$$z^1 + (1-\eta)(U - z^1)$$

soit strictement inclus dans U; on remplace alors h par

$$\zeta \mapsto h_\eta(\zeta) := h(z^1 + (1-\eta)(\zeta - z^1))$$

et l'on a bien une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de U. La formule (2.5) s'obtient à partir de la même formule écrite pour h_η après avoir fait tendre η vers 0.
Considérons une fonction χ, de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de U, identiquement 1 sur ∂U, de support dans W (on supposera que W ne contient pas z^0); une telle fonction se réalise

grâce à une partition de l'unité relative à un recouvrement du compact ∂U par des boules incluses dans W. On définit la fonction $\tilde{s}$ de $(U \cup W) \setminus \{z^0\}$ dans $\mathbf{C}^n$ par

$$\tilde{s}(\zeta) := \chi(\zeta) \frac{s(\zeta)}{< s(\zeta), \zeta - z^0 >} + (1 - \chi(\zeta)) \frac{\overline{\zeta} - \overline{z^0}}{\|\zeta - z^0\|^2}.$$

Il est immédiat de constater que $\tilde{s}$ (qui est de classe $\mathcal{C}^1$ dans $(U \cup W) \setminus \{z^0\}$) satisfait dans cet ouvert

$$< \tilde{s}(\zeta), \zeta - z^0 >= 1. \tag{2.6}$$

Ceci implique

$$\overline{\partial} \tilde{s}(\zeta) := \bigwedge_{k=1}^{n} \overline{\partial} \tilde{s}_k(\zeta) = 0, \, \zeta \in (U \cup W) \setminus \{z^0\}. \tag{2.7}$$

On déduit de (2.7) que l'on a dans $(U \cup W) \setminus \{z^0\}$,

$$d \left[\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \tilde{s}_k d\tilde{s}_{[k]} \wedge d\zeta \right] = \overline{\partial} \left[\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \tilde{s}_k d\tilde{s}_{[k]} \wedge d\zeta \right] \equiv 0. \tag{2.8}$$

On peut reécrire l'intégrale figurant dans (2.5) sous la forme:

$$\int_{\partial U} h(\zeta) \left[\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \tilde{s}_k d\tilde{s}_{[k]} \wedge d\zeta \right],$$

expression que l'on transforme en utilisant le théorème de Stokes (compte tenu du fait que h est holomorphe et de (2.8)) en

$$\int_{\|\zeta - z^0\| = r} h(\zeta) \left[\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \tilde{s}_k d\tilde{s}_{[k]} \wedge d\zeta \right],$$

avec r arbitrairement petit, soit

$$\int_{\|\zeta - z^0\| = r} h(\zeta) \frac{\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} (\overline{\zeta_k} - \overline{z_k^0}) d\overline{(\zeta - z^0)[k]} \wedge d\zeta}{\|\zeta - z^0\|^{2n}}.$$

Il ne reste plus qu'à appliquer la proposition 2.1 à la fonction

$$\zeta \mapsto h(z^0 + \zeta)$$

et à effectuer le changement de variables $\zeta \mapsto \zeta - z^0$ dans l'intégrale (2.2) pour conclure à la formule (2.5). $\diamondsuit$

On peut aussi reproduire avec ces formules les dérivées successives (par rapport à z) des fonctions holomorphes. On a ainsi la

Proposition 2.3. *Soient U, h, s et z^0 comme dans l'énoncé de la proposition 2.2. Pour tout multiexposant $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ de $\mathbf{N}^n$ (de longueur $|\beta| = \beta_1 + \cdots \beta_n$), on a*

$$\left(\frac{\partial^{|\beta|} h}{\partial z^\beta}\right)(z^0) = \frac{(n-1+|\beta|)!(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2i\pi)^n} \int_{\partial U} \left(h \prod_{j=1}^n s_j^{\beta_j} \right) \frac{\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} s_k ds_{[k]}(\zeta) \wedge d\zeta}{< s(\zeta), \zeta - z^0 >^n}. \tag{2.9}$$

avec les notations standard:

$$\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial z^\beta} := \prod_{j=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial z_j} \right)^{\beta_j}.$$

Preuve. Il suffit de différentier par rapport au paramètre z l'intégrale (2.2), la formule (2.2) continuant à être valable au voisinage de z^0. $\diamondsuit$

De manière tout à fait analogue à la preuve de la proposition 2.1, nous démontrons aussi le résultat suivant:

Proposition 2.4. *Soit h une fonction holomorphe au voisinage du pseudoellipsoide de $\mathbf{R}^{2n}$*

$$U_{R,\beta+\mathbf{1}} := \{\zeta, \sum_{k=1}^n |\zeta_k|^{2(\beta_k+1)} \leq R^2\}.$$

où β un multiindice dans $\mathbf{N}^n$. On a:

$$\frac{\partial^{|\beta|} h}{\partial z^\beta}(0) = \frac{(n-1)!\beta_1! \cdots \beta_n!(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2i\pi)^n} \int_{\partial U_{R,\beta+1}} h(\zeta) \frac{\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \overline{\zeta_k}^{\beta_k+1} d\overline{\zeta_{[k]}^{\beta+\mathbf{1}}} \wedge d\zeta}{\left(\sum_{k=1}^n |\zeta_k|^{2(\beta_k+1)}\right)^n} \tag{2.10}$$

où

$$\zeta^{\beta+\mathbf{1}} := (\zeta_1^{\beta_1+1}, \dots, \zeta_n^{\beta_n+1}).$$

Preuve. On raisonne comme pour la preuve de la proposition 2.1 en utilisant d'abord la formule de Stokes. L'intégrale figurant dans (2.10) devient grâce à Stokes

$$\frac{n}{r^{2n}} \int_{U_{r,\beta+1}} h(\zeta) d\overline{\zeta_1^{\beta_1+1}} \wedge \cdots \wedge d\overline{\zeta_n^{\beta_n+1}} \wedge d\zeta \tag{2.11}$$

avec r arbitairement petit. On calcule l'intégrale dans (2.11) en coordonnées polaires; on pose $\zeta_k = r_k^{\beta_k+1} exp(i\theta_k)$ pour $1 \leq k \leq n$ et l'on développe h en série de Taylor au voisinage de 0. Compte tenu de l'orthogonalité des $\theta \mapsto exp(ik\theta)$ dans $L^2([0, 2\pi])$, le seul terme contribuant à une valeur non nulle dans (2.11) est

$$\left(\frac{\partial^{|\beta|} h}{\partial z^\beta}(0)\right) \frac{n}{r^{2n} \prod_{k=1}^n \beta_k!} \int_{U_{r,\beta+1}} \left(\prod_{k=1}^n \zeta_k^{\beta_k} \right) d\overline{\zeta_1^{\beta_1+1}} \wedge \cdots \wedge d\overline{\zeta_n^{\beta_n+1}} \wedge d\zeta. \tag{2.12}$$

Un calcul immédiat en coordonnées polaires nous montre que (2.12) est indépendant de R et vaut en fait

$$\frac{1}{(n-1)! \left(\prod_{k=1}^n \beta_k!\right)} \frac{\partial^{|\beta|} h}{\partial z^\beta}(0),$$

ce qui donne la formule 2.10. $\diamondsuit$

Proposition 2.5 (formules d'Andreotti-Norguet). *Soit U un ouvert borné de $\mathbf{C}^n$ à frontière de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, comme dans l'énoncé de la proposition 2.2. Soit z^0 un point fixé dans U, β un n-uplet de $\mathbf{N}^n$, et s une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ d'un voisinage W de ∂U dans $\mathbf{C}^n$ telle que*

$$< s(\zeta), (\zeta - z_0)^{\beta+\mathbf{1}} >:= \sum_{k=1}^{n} s_k(\zeta)(\zeta_k - z_k^0)^{\beta_k+1} \neq 0, \, \zeta \in W. \tag{2.13}$$

Pour toute fonction h dans l'espace de Banach (pour la norme uniforme) des fonctions holomorphes dans U et continues dans $\overline{U}$, on a

$$\frac{\partial^{|\beta|} h}{\partial z^\beta}(z^0) = \frac{(n-1)!\beta!(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2i\pi)^n} \int_{\partial U} h(\zeta) \frac{\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} s_k(\zeta) ds_{[k]}(\zeta) \wedge d\zeta}{< s(\zeta), (\zeta - z^0)^{\beta+\mathbf{1}} >^n}. \tag{2.14}$$

Preuve. Elle se fait via la proposition 2.4 comme la preuve de la proposition 2.2 à partir de la proposition 2.1. On introduit une fonction χ de support dans W comme dans la preuve de la proposition 2.2 et la fonction $\tilde{s}_\beta$ de $(U \cup W) \setminus \{z^0\}$ dans $\mathbf{C}^n$ définie par

$$\tilde{s}_\beta(\zeta) := \chi(\zeta) \frac{s(\zeta)}{< s(\zeta), (\zeta - z^0)^{\beta+\mathbf{1}} >} + (1 - \chi(\zeta)) \frac{\left(\overline{\zeta} - \overline{z^0}\right)^{\beta+\mathbf{1}}}{\sum_{k=1}^n |\zeta_k - z_k^0|^{2(\beta_k+1)}},$$

où par définition

$$\left(\overline{\zeta} - \overline{z^0}\right)^{\beta+\mathbf{1}} = \left(\left(\overline{\zeta_1} - \overline{z_1^0}\right)^{\beta_1+1}, \ldots, \left(\overline{\zeta_n} - \overline{z_n^0}\right)^{\beta_n+1}\right).$$

Il est clair que l'on a dans $(U \cup W) \setminus \{z^0\}$

$$< \tilde{s}_\beta(\zeta), (\zeta - z^0)^{\beta+\mathbf{1}} >\equiv 1,$$

ce qui implique, toujours dans $(U \cup W) \setminus \{z^0\}$,

$$d\left[\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \tilde{s}_{\beta,k} d\tilde{s}_{\beta,[k]} \wedge d\zeta\right] = \overline{\partial}\left[\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \tilde{s}_{\beta,k} d\tilde{s}_{\beta,[k]} \wedge d\zeta\right] \equiv 0. \tag{2.15}$$

La formule de Stokes nous permet, compte tenu de (2.15), d'écrire l'intégrale figurant dans (2.14) aussi bien

$$\int_{\partial U} \left[\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} s_{\beta,k} d\tilde{s}_{\beta,[k]} \wedge d\zeta\right]$$

(soit son expression originelle, compte tenu de la définition de $\tilde{s}_\beta$), que sous la forme

$$\int_{\zeta - z^0 \in \partial U_{r,\beta+\mathbf{1}}} \left[\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} s_{\beta,k} d\tilde{s}_{\beta,[k]} \wedge d\zeta\right], \tag{2.16}$$

avec r arbitrairement petit. On utilise enfin la proposition 2.4 et une translation de z^0 des variables pour conclure. $\diamondsuit$

2.2 Notions de multiplicité (locale et globale).

Nous considérons d'abord dans cette section un ouvert borné U, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et n fonctions holomorphes au voisinage de cet ouvert telles que $\|f\|^2 := \sum |f_j|^2$ ne s'annule pas sur ∂U et que les hypersurfaces complexes $f_j = 0,\ j = 1, \ldots, n$ se coupent transversalement dans U; cela signifie, si J désigne le Jacobien de l'application $(f_1, \ldots, f_n)$, que, pour tout $\zeta_0 \in U$,

$$f_1(\zeta_0) = \cdots = f_n(\zeta_0) = 0 \Longrightarrow J(\zeta_0) \neq 0. \tag{2.17}$$

Ceci signifie qu'au voisinage de tout zéro commun α de $f_1, \ldots, f_n$ dans U, on peut, modulo une application biholomorphe θ_α entre un voisinage de ce point et un voisinage de l'origine dans $\mathbf{C}_w$, supposer que les f_j sont les applications coordonnées w_j. Nous nous affranchirons ultérieurement de l'hypothèse (2.17). Notons que cette hypothèse implique que les zéros communs des f_j dans U sont isolés et par conséquent en nombre fini. Nous noterons $V_U(f)$ l'ensemble de ces zéros communs. Sous toutes ces hypothèses, on a alors la proposition suivante:

Proposition 2.6. *Pour toute fonction h continue holomorphe dans U et continue sur $\overline{U}$, on a, les notations étant celles de la proposition 2.1 avec f à la place de ζ,*

$$\sum_{\alpha \in V_U(f)} h(\alpha) = \frac{(n-1)!(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2i\pi)^n} \int_{\partial U} \frac{\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \overline{f_k df_{[k]}} \wedge df}{\|f\|^{2n}}. \tag{2.18}$$

De plus, pour tout multiindice $\beta \in \mathbf{N}^n$,

$$\sum_{\alpha \in V_U(f)} \frac{\partial^{|\beta|} h}{\partial f^\beta}(\alpha) = \frac{(n-1)!\beta!(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2i\pi)^n} \int_{\partial U} h \left(\frac{\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \overline{f_k^{\beta_k+1} df_{[k]}^{\beta+\mathbf{1}}} \wedge df}{(\sum_{k=1}^n |f_k|^{2(\beta_k+1)})^n} \right) =$$

$$= \frac{(n-1+|\beta|)!\beta!(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2i\pi)^n} \int_{\partial U} h \left(\prod_{k=1}^n \overline{f_k}^{\beta_k} \right) \left(\frac{\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \overline{f_k df_{[k]}} \wedge df}{\|f\|^{2(n+|\beta|)}} \right) \tag{2.19}$$

Preuve. On remarque que les formes différentielles impliquées dans le s intégrales (2.18) et (2.19) sont des formes fermées dans $U \setminus V_U(f)$ et l'on applique le théorème de Stokes qui nous permet de remplacer l'intégration sur U par l'intégration sur une union de sphères autour des zéros communs des f_j. On calcule l'intégrale sur chaque sphère en utilisant le difféomorphisme local; ceci nous ramène aux propositions 2.1 (pour (2.18)) et 2.3 et 2.4 (pour (2.19)). $\diamondsuit$

Nous pouvons introduire la notion de *multiplicité d'intersection.* Nous envisagerons cette notion localement, puis globalement. Dans ce qui suit, $f_1, \cdots, f_n$ seront n fonctions holomorphes définies au voisinage de l'origine et telles que la matrice jacobienne

$$J(\zeta) = \left[\left(\frac{\partial f_k}{\partial \zeta_l} \right)_{1 \le k,l \le n} \right]$$

définisse un élément non nul dans l'anneau $\mathcal{O}_n$. On admettra le théorème suivant, classique en géométrie différentielle:

Théorème 2.7 (Sard). *Soit F une application de classe $\mathbf{C}^\infty$ d'un ouvert connexe U de $\mathbf{R}^{q_1}$ dans $\mathbf{R}^{q_2}$. On note r le rang du plus grand mineur non identiquement nul extrait de la matrice Jacobienne $\mathcal{J}$ de F. L'ensemble des valeurs critiques de F, c'est à dire l'ensemble des q_2-uplets ξ de réels tels qu'il existe $x(\xi)$ dans U avec*

$$F(x(\xi)) = \xi, \ rang(\mathcal{J}(x(\xi))) < r$$

est un sous ensemble de mesure nulle (au sens de la mesure de Lebesgue) dans $\mathbf{R}^{q_2}$.

Preuve. On se réfèrera aux articles de Sard au Bulletin de l'American Math. Society. 48, 1942 (pages 883-890) ou, si l'on veut un résultat plus précis en termes de mesures de Hausdorff, aux Annals of Maths. 68 (1958). Notons que ce résultat analytique a son correspondant algébrique, il s'agit du théorème de Bertini (voir par exemple le livre de J.P. Jouanolou, Progress in Maths 42, Birkhaüser). Puisque nous nous plaçons dans le cas complexe, nous ne nous réfèrerons pas ici aux théorèmes de Bertini. Ceux ci devraient être invoqués si nous nous placions dans un contexte algébrique. $\diamondsuit$

Le concept important que nous utiliserons par la suite sera celui de suite régulière.

Définition 2.8. *Etant donné un anneau $\mathbf{A}$, une suite $(a_1, \ldots, a_n)$ d'éléments de $\mathbf{A}$ est dite régulière (pour cet ordre) si et seulement si, pour tout j dans $\{2, \ldots, n\}$, a_j n'est pas diviseur de 0 dans le quotient $\mathbf{A}/(a_1, \ldots, a_{j-1})$.*

Remarque. Dans un anneau local (comme $\mathcal{O}_n$), on peut montrer que la notion de régularité est indépendante de l'ordre. Ceci est en revanche faux en général: par exemple, dans $\mathbf{C}[X_1, X_2, X_3]$, la suite

$$a_1(X) = X_1(1 - X_3), \ a_2(X) = X_2(1 - X_3), \ a_3(X) = X_3 \tag{2.20}$$

n'est pas régulière tandis que $(a_1(X), a_3(X), a_2(X))$ l'est.

Nous avons alors la

Proposition et Définition 2.9. *Soient $f_1, \ldots, f_n$ n fonctions holomorphes de n variables au voisinage de l'origine dans $\mathbf{C}^n$, telles que le jacobien de $(f_1, \cdots, f_n)$ ne soit pas nul dans $\mathcal{O}_n$. On suppose que l'origine est un zéro commun isolé des f_j (ou encore, ce qui revient au même, que la suite $f_1, \ldots, f_n$ est une suite régulière dans $\mathcal{O}_n$). Alors, la quantité définie pour ρ suffisamment petit par*

$$m_f(0) = m_f(0; \rho) := \frac{(n-1)!(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2i\pi)^n} \int_{\|\zeta\| = \rho} \frac{\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \overline{f_k d f_{[k]}} \wedge df}{\|f\|^{2n}}. \tag{2.21}$$

est indépendante de ρ et est un entier strictement positif, que l'on appellera multiplicité d'intersection des germes d'hypersurfaces $f_j = 0, j = 1, \ldots, n$ à l'origine.

Remarque. L'hypothèse concernant la non nullité du Jacobien est en fait inutile si l'on suppose que $f_1, \ldots, f_n$ définit une suite régulière dans $\mathcal{O}_n$ et qu'en plus $(f_1, \ldots, f_n) \neq \mathcal{O}_n$, ce que l'on suppose en prenant comme hypothèse que l'origine est un zéro commun aux f_j.

Preuve. Le fait que la quantité $m(\rho)$ soit indépendante de ρ résulte simplement du fait que la forme figurant sous l'intégrale est, comme on l'a vu lors de la preuve de la proposition 2.6, une forme fermée dans un voisinage épointé de l'origine. Fixons $\rho = \rho_0$. Il est clair que l'application

$$g \in B(\{\|\zeta\| \leq \rho\})^n \mapsto \frac{(n-1)!(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2i\pi)^n} \int_{\|\zeta\|=\rho} \frac{\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \overline{g_k} \overline{dg_{[k]}} \wedge dg}{\|g\|^{2n}} \tag{2.22}$$

est une application continue dans un voisinage de $(f_1, \dots, f_n)$ dans l'algèbre de Banach $B(\{\|\zeta\| \leq \rho\})^n$ des n-uplets de fonctions holomorphes dans $\{\|\zeta\| < \rho_0\}$ et continues dans $\{\|\zeta\| \leq \rho_0\}$. On utilise maintenant le théorème 2.7 avec l'application $F := (|f_1|^2, \cdots, |f_n|^2)$ définie au voisinage de l'origine dans $\mathbf{R}^{2n}$; pour presque tout $\epsilon \in \mathbf{C}^n$ tel que $\|\epsilon\| < \min_{\|\zeta\|=\rho} \|f(\zeta)\|$, les zéros communs de $g = (f_1 - \epsilon_1, \dots, f_n - \epsilon_n)$ sont simples (car ϵ n'est pas valeur critique de f). D'après la proposition 2.6 (formule (2.18) avec $h \equiv 1$), pour un tel ϵ, la quantité

$$\int_{\|\zeta\|=\rho} \frac{\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \overline{(f_k - \epsilon_k)}\, \overline{df_{[k]}} \wedge df}{\|f - \epsilon\|^{2n}}$$

est un entier strictement positif. Du fait de la continuité de l'application définie en (2.22), on en déduit, puisque $\mathbf{N}$ est discret, que $m = m_f(0)$ est un entier strictement positif; cet entier est égal au nombre de zéros communs dans la boule de rayon ρ_0 d'une application perturbée de manière générique $f - \epsilon$. Ceci achève la preuve de la proposition. $\diamondsuit$

Cette notion de multiplicité locale a aussi une interprétation algébrique: en effet, nous avons la

Proposition 2.10. *Soit $(f_1, \dots, f_n)$ une suite régulière dans $\mathcal{O}_n$ telle que $(f_1, \dots, f_n) \neq \mathcal{O}_n$. On supposera aussi (ce qui est en fait redondant, voir la remarque après la Proposition-Définition 2.9) que le jacobien des f_j n'est pas nul dans $\mathcal{O}_n$. Alors, l'espace vectoriel $\mathcal{O}_n/(f_1, \dots, f_n)$ est de dimension finie $m_f(0)$.*

Preuve. Choisissons ρ_0 comme dans la preuve de la proposition 2.9. Soit h une fonction holomorphe au voisinage de $\{\|\zeta\| \leq \rho\}$, représentant un élément donné de $\mathcal{O}_n$. Pour $w \in \mathbf{C}^n$, tel que $\|w\| < \min_{\|\zeta\|=\rho} \|f(\zeta)\|$, et non valeur critique de f, on a, dans la boule de rayon ρ_0, $m = m_f(0)$ racines distinctes (et simples) pour le système d'équations

$$f_j(\zeta) = w_j,\ j = 1, \dots, n,\ \|\zeta\| < \rho_0.$$

Nous pouvons noter ces racines $\zeta^\nu(w), \nu = 1, \dots, m$. Il existe des formules intégrales permettant de représenter toutes les sommes de Newton des fonctions ζ^ν; plus précisément, fixons une fois pour toutes une fonction s définie au voisinage de $\{\|\zeta\|| = \rho_0\}$, à valeurs dans $\mathbf{C}^n$ et telle que sur $\{\|\zeta\| = \rho_0\}$, on ait

$$< s(\zeta), f(\zeta) > \neq 0.$$

On a alors, pour $\|w\| \leq \eta$ (suffisamment petit),

$$< s(\zeta), f(\zeta) - w > \neq 0, \ \|\zeta\| = \rho_0. \tag{2.23}$$

Compte tenu de (2.23), on peut, pour tout polynôme P de n variables, écrire (la preuve est mot pour mot celle de la formule de représentation 2.18):

$$\sum_{\nu=1}^{m} P(\zeta^{\nu}(w)) = \frac{(n-1)!(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2i\pi)^n} \int_{\|\zeta\|=\rho_0} P(\zeta) \frac{\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} s_k(\zeta) ds_{[k]}(\zeta) \wedge df(\zeta)}{< s(\zeta), f(\zeta) - w >^n}. \tag{2.24}$$

Puisque les polynômes symétriques en les $\zeta^{\nu}(w)$ s'expriment comme combinaisons des multi-polynômes de Newton, nous voyons que la fonction définie pour tout ζ au voisinage de $\{\|\zeta\| \leq \rho\}$, pour presque tout w de norme strictement inférieure à η, par

$$\Theta(\zeta, w) := \prod_{\nu=1}^{m} (h(\zeta) - h(\zeta^{\nu}(w)) \tag{2.25}$$

se prolonge en une fonction holomorphe des $2n$ variables (ζ, w) à tout $\{\|\zeta\| \leq \rho\} \times \{\|w\| < \eta\}$. Il est clair que l'on a au voisinage de 0,

$$\Theta(\zeta, f(\zeta)) \equiv 0 \ ,$$

ce qui s'écrit aussi

$$h(\zeta)^m - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k h(\zeta)^{m-k} \equiv 0 \ mod(f_1, \ldots, f_n)$$

où les α_k sont les valeurs à l'origine des fonctions symétriques des $h(\zeta^{\nu})$, $\nu = 1, \ldots, m$. Ainsi tout élément $\overline{h}$ de $\mathcal{O}_n$ satisfait dans l'algèbre $\mathcal{O}_n/(f_1, \ldots, f_n)$ une équation

$$\overline{h}^m - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \overline{h}^{m-k} = 0. \tag{2.26}$$

Ceci implique, puisque ceci est vrai pour tout h, et en particulier pour les applications coordonnées, que l'espace vectoriel quotient $\mathcal{O}_n/(f_1, \ldots, f_n)$ est de dimension finie. En fait, on vient de montrer que l'anneau $\mathcal{O}_n$ est une extension algébrique de degré au plus m du sous anneau $\mathcal{O}_n^f$ des germes de la forme $\gamma(f_1, \ldots, f_n)$, $\gamma \in \mathcal{O}_n$ (le thórème de l'élément primitif nous assure en effet que le degré de l'extension ne peut dépasser m). Ainsi, l'espace quotient $\mathcal{O}_n/(f_1, \ldots, f_n)$ est-il bien de dimension au plus m sur $\mathbf{C}$. Si ce degré était strictement inférieur à m, m ne serait pas le plus petit entier tel qu'il existerait une relation du type (2.26) valable pour un h arbitraire. Il suffit de se donner une fonction h telle que les fonctions $h(\zeta^{\nu}(w))$ soient des fonctions distinctes dans un voisinage de l'origine pour voir que ceci est impossible. La dimension du quotient $\mathcal{O}_n/(f_1, \ldots, f_n)$, comme d'ailleurs le degré de l'extension, vaut donc exactement $m = m(0)$. $\diamondsuit$

La multiplicité joue aussi un rôle dans l'énoncé local du Nullstellensätz, qui est le suivant:

Proposition 2.11. *Soit $(f_1, \ldots, f_n)$ une suite régulière de $\mathcal{O}_n$ définissant un idéal propre $I(f)$. Soit $m = m_f(0)$ la multiplicité d'intersection locale en 0; alors, on a, si $\mathcal{M}$ est l'idéal maximal de $\mathcal{O}_n$,*

$$\mathcal{M}^m \subset I(f). \tag{2.28}$$

Preuve. Considérons un germe h dans $\mathcal{M}$; ceci signifie que h a un représentant s'annulant à l'origine. On forme comme dans la preuve de la proposition 2.10, la fonction Θ de (2.25). Cette fonction Θ, définie au voisinage de l'origine dans $\mathbf{C}^n_\zeta \times \mathbf{C}^n_w$, s'annule identiquement sur le graphe de f. En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, on voit qu'il existe des fonctions $\theta_1, \ldots, \theta_n$ holomorphes dans un voisinage U de l'origine dans $\mathbf{C}^n_\zeta \times \mathbf{C}^n_w$, telles que, dans ce voisinage, on ait

$$\Theta(\zeta, w) = \sum_{k=1}^{n} (f_k(\zeta) - w)\theta_k(\zeta, w). \tag{2.29}$$

On prend enfin $w = 0$ dans (2.29); compte tenu du fait que h s'annule en 0, on peut écrire

$$\Theta(\zeta, 0) = h(\zeta)^m = \sum_{k=1}^{n} \theta_k(\zeta, 0) f_k(\zeta),$$

ce qui montre bien $h^m \in (f_1, \ldots, f_m)$. $\diamondsuit$

Cette notion de multiplicité s'étend au cas plus général où le nombre de générateurs de l'idéal ne coïncide plus avec la dimension de l'espace. Nous avons dans ce cas la proposition-définition suivante.

Proposition et Définition 2.12. *Soient $f_1, \ldots, f_N$ N germes de fonctions holomorphes à l'origine tels que $V(f) = V(f_1, \ldots, f_N) = \{0\}$. l'espace vectoriel $\mathcal{O}_n/(f_1, \ldots, f_N)$ est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{C}$ et sa dimension est appelée multiplicité impropre d'intersection des germes d'hypersurfaces $\{f_j = 0\}$ à l'origine.*

Preuve. On commence à exhiber dans l'idéal engendré par $f_1, \ldots, f_N$ une suite régulière $(g_1, \ldots, g_n)$ dont les éléments sont des combinaisons linéaires des f_j à coefficients dans $\mathbf{C}$. On concluera ensuite en utilisant l'inclusion $(g_1, \ldots, g_n) \subset (f_1, \ldots, f_N)$. La construction des g_j se fait selon ce que l'on appelle le *principe des tiroirs* en utilisant le fait que l'anneau $\mathcal{O}_n$ est un anneau noethérien. On prend $g_1 := f_1$. Soient $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_t$ les idéaux premiers correspondant aux idéaux primaires intervenant dans la décomposition de (f_1). Comme la variété des zéros des f_j est réduite à l'origine, il est impossible que *tous* les $f_j, j = 2, \ldots, N$ soient dans un idéal donné $\mathcal{P}_\tau, 1 \leq \tau \leq t$. On peut donc trouver une combinaison linéaire g_2 des $f_j, j = 2, \ldots N$ qui n'est dans *aucun* $\mathcal{P}_\tau$, $1 \leq \tau \leq t$. La suite (g_1, g_2) est alors régulière. On continue ce processus tant que l'on n'a pas construit n combinaisons linéaires; notons que chaque g_j s'écrit

$$g_j = \sum_{k=j}^{N} \lambda_{j,k} f_k, \ldots, j = 2, \ldots, n.$$

On achève ainsi la preuve de cette proposition. $\diamondsuit$

Revenons maintenant aux notions algébriques globales. Considérons une famille de n polynômes à coefficients dans $\mathbf{K}$ (sous corps de $\mathbf{C}$, tels que la variété des zéros communs soit constituée de points isolés. On sait alors que cette variété est automatiquement finie. C'est le théorème de Bezout dont nous donnons ici une preuve inspirée du maniement des formules intégrales.

Proposition 2.13 (Bézout). *Soient $P_1, \ldots, P_n$ n polynômes de n variables tels que pour tout zéro commun α aux P_j, les germes dans $\mathcal{O}_\alpha$ des P_j définissent une suite régulière. La variété $V(P)$ des zéros communs est finie et l'on a*

$$\sum_{\alpha \in V(P)} m_P(\alpha) \leq \prod_{k=1}^{n} deg(P_k). \tag{2.30}$$

Preuve. Soit e un entier strictement supérieur à 1. On considère un paramètre $\lambda \in \mathbf{C}^*$ et les n polynômes $P_{j,\lambda}$ définis par

$$P_{j,\lambda}(X) := X_j^{edeg(P_j)+1} + \frac{1}{\lambda} P_j(X)^e = X_j^{m_j} + Q_{j,\lambda}(X).$$

Il est immédiat de constater que l'application $(P_{1,\lambda}, P_{n,\lambda})$ est une application polynomiale propre; comme les zéros communs de cette application sont isolés (il est clair que l'espace quotient $\mathcal{O}_\alpha / I_{\lambda,\alpha}$ est de dimension finie, d'ailleurs inférieure au produit des degrés, soit $\prod(edeg(P_j)+1)$), il y en a nécessairement un nombre fini. On peut exprimer en utilisant une formule intégrale la somme des valeurs d'un polynôme Q aux zéros communs des $P_{j,\lambda}$ (comptés avec multiplicité). Considérons le pseudoellipsoïde

$$U_{R,m} := \{\zeta, \sum_{k=1}^{n} |\zeta_k|^{2m_k} \leq R^2\}.$$

On peut écrire, dès que cet ellipsoide contient tous les zéros communs des $P_{j,\lambda}$,

$$\sum_{\alpha \in V(P_\lambda)} Q(\alpha) = \frac{(-1)^{n(n-1)/2}(n-1)!}{(2i\pi)^n} \int_{\partial U_{R,m}} Q(\zeta) \frac{\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \overline{\zeta}_k^{m_k} d\overline{\zeta}_{[k]}^m \wedge dP_\lambda}{< \overline{\zeta}^m, P_\lambda(\zeta) >^n}. \tag{2.31}$$

On applique la formule (2.31) avec $Q \equiv 1$ et l'on développe en série le noyau sous l'intégrale; plus précisément, sur $\partial U_{R,m}$, on peut écrire:

$$(n-1)! \left(\frac{1}{< \overline{\zeta}^m, P_\lambda(\zeta) >} \right)^n = \frac{1}{R^{2n}} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{(p-1+n)!}{p!} \frac{< \overline{\zeta}^m, Q_\lambda(\zeta) >^p}{R^{2p}}. \tag{2.32}$$

On reporte le développement (2.32) dans l'intégrale (2.31). Compte tenu de l'orthogonalité des $\theta \mapsto exp(2ik\theta)$ dans $L^2([0, 2\pi])$, la formule (2.31) s'écrit pour le polynôme $R \equiv 1$,

$$card(V(P_\lambda)) = \mathcal{M} \left[\frac{\zeta_1 \cdots \zeta_n}{\prod_{k=1}^{n} \zeta_k^{deg(P_{\lambda,k})}} J_\lambda(\zeta) \right] \tag{2.33}$$

où J_λ désigne le jacobien de P_λ et $\mathcal{M}$ est la fonctionnelle associant à toute série de Laurent en ζ le coefficient de ζ^0; les zéros de P_λ sont comptés avec multiplicité. Lorsque l'on remplace 1 par un polynôme Q quelconque, on exprime

$$\sum_{\alpha\in V(P_\lambda)} Q(\alpha)$$

sous la forme

$$\mathcal{M}\left[\sum_{k\in\mathbf{N}^n} QJ_\lambda(-1)^{|k|}\frac{(|k|+n-1)!}{|k|!}\frac{\prod_{j=1}^n Q_{\lambda,j}^{k_j}}{\prod_{j=1}^n P_{\lambda,j}^{deg(P_{\lambda,j})-1}}\right], \tag{2.34}$$

la somme dans (2.34) se trouvant automatiquement tronquée comme on le vérifiera en exercice. Le membre de droite de (2.32) est immédiat à calculer; on trouve

$$N(\lambda) := card(V(P_\lambda)) = \prod deg(P_{\lambda,j}) = \prod_{j=1}^n (edeg(P_j)+1).$$

On fait maintenant tendre λ vers zéro; le nombre de zéros communs aux P_j^e (avec multiplicité) dans une boule donnée est égal, pour λ de module assez petit, au nombre de zéros communs aux $P_{\lambda,j}$ dans la même boule. Ce nombre est donc majoré par $N(\lambda)$. Or la somme des multiplicités des zéros des P_j^e vaut, comme on le voit en perturbant les P_j, $e^n\sum_{P(\alpha)=0} m_P(\alpha)$. En divisant par e^n l'inégalité obtenue et en faisant tendre e vers l'infini, on obtient (2.30). $\diamondsuit$

Remarque. On pourrait montrer que la somme des multiplicités d'intersection des hypersurfaces algébriques $P_j = 0$ aux divers points d'intersection est aussi la dimension de l'espace vectoriel quotient $\mathbf{K}[X]/(P_1,\ldots,P_n)$. Cela se voit par exemple en utilisant le fait suivant: pour qu'un élément Q de $\mathbf{K}[X]$ soit dans un idéal $(P_1,\ldots,P_m)$, il faut et il suffit que pour tout idéal premier $\mathcal{P}$ associé à l'un des idéaux primaires de la décomposition de $(P_1,\ldots,P_m)$, Q (considéré comme élément de l'anneau local $\mathbf{K}[X]_\mathcal{P}$) soit dans l'idéal engendré par les P_j dans $\mathbf{K}[X]_\mathcal{P}$. Nous ne prouverons pas ici ce résultat, mais nous terminerons cette section par un exemple important où cette propriété sera vérifiée.

Exemple. On suppose que, pour tout j,

$$P_j = X_j^{r_j+1} + Q_j \;\; deg(Q_j) \leq r_j,\; j=1,\ldots,n. \tag{2.35}$$

Il est facile de voir dans ce cas particulier en utilisant la formule (2.32) que le nombre de zéros communs (avec multiplicité) vaut $\prod(r_j+1)$; quant à la dimension du quotient dans ce cas, il est immédiat de la calculer en remarquant que les monômes

$$\prod_{j=1}^n X_j^{q_j},\; q_j \leq r_j$$

forment une base du quotient. Dans un tel exemple, nous pouvons interpréter l'intégrale figurant au second membre de (2.31) (avec P à la place de P_λ) comme l'expression de la trace de l'opérateur de multiplication par Q de l'espace vectoriel $\mathbf{K}[X]/(P_1, \ldots, P_n)$ dans lui même. En effet, compte tenu du Nullstellensätz local (proposition 2.11), on voit que le polynôme

$$\prod_{\alpha \in V(P)} (Q(X) - Q(\alpha))^{m_P(\alpha)}$$

est, au voisinage de tout $\alpha \in V(P)$, dans l'idéal engendré par les germes des P_j dans $\mathcal{O}_\alpha$. Ceci implique qu'il appartient à tous les idéaux primaires de la décomposition de $(P_1, \ldots, P_n)$ dans $\mathbf{K}[X]$, et par conséquent à l'idéal $(P_1, \ldots, P_n)$ lui même. Compte tenu de son degré, le polynôme

$$\prod_{\alpha \in V(P)} (Y - Q(\alpha))^{m_P(\alpha)}$$

est le polynôme caractéristique de l'opérateur de multiplication par Q. C'est en effet, compte tenu du fait qu'il dépend de manière symétrique des α, un polynôme à coefficients dans $\mathbf{K}$. La trace apparait comme coefficient de ce polynôme caractéristique. On pourra remarquer que

$$Tr[1] = card(V(P)) = dim_{\mathbf{K}}(\mathbf{K}[X]/(P_1, \ldots, P_n)). \tag{2.36}$$

Lorsque les polynômes P_j définissent un variété dicrète, donc finie, la formule (2.18), avec Q en place de h, P en place de f et U contenant *tous* les zéros communs aux P_j, représente encore la trace $Tr[Q]$ de l'opérateur de multiplication par Q dans l'espace quotient $\mathbf{K}[X]/(P_1, \ldots, P_n)$.

3. LA NOTION ALGEBRIQUE DE RESIDU.

3.1. Définition et propriétés du résidu local.

Dans cette section, on considère n germes $f_1, \ldots, f_n$ dans l'anneau $\mathcal{O}_n$; on suppose que ces germes définissent une suite régulière (dans ce anneau) et que l'idéal $(f_1, \ldots, f_n)$ est propre. Considérons des représentants $f_1, \ldots, f_n$ de ces germes (on conviendra de noter de la même manière représentants et germes), définis au voisinage de la boule $\overline{B(0,\rho_0)}$ et n'ayant que l'origine comme zéro commun dans ce voisinage. Pour plus de simplicité, nous noterons Ω_f la $(n,n-1)$ forme différentielle définie dans le voisinage épointé par

$$\Omega_f(\zeta) := \frac{\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \overline{f}_k \overline{df_{[k]}} \wedge d\zeta}{\|f(\zeta)\|^{2n}}. \tag{3.1}$$

Puisque cette forme s'écrit aussi

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \tilde{s}_k d\tilde{s}_{[k]} \wedge d\zeta$$

où le vecteur de fonctions $\tilde{s}$ satisfait

$$< \tilde{s}(\zeta), f(\zeta) >= 1, \ \zeta \neq 0$$

on voit comme dans la preuve de la proposition 2.6 que, pour toute fonction h holomorphe au voisinage de $\overline{B(0,\rho_0)}$, la quantité

$$I_f(h;\rho) := \frac{(-1)^{n(n-1)/2}(n-1)!}{(2i\pi)^n} \int_{\|\zeta\|=\rho} h(\zeta)\Omega_f(\zeta) \tag{3.2}$$

est en fait indépendante de ρ pourvu que $0 < \rho \leq \rho_0$. De plus, nous savons grâce à la formule (2.18) que si J_f désigne le jacobien de $(f_1, \ldots, f_n)$, on a

$$I_f(hJ_f) := I_f(hJ_f;\rho) = h(0). \tag{3.3}$$

Ainsi, si l'origine est un zéro simple des f_j, on a

$$I_f(h) := I_f(h;\rho) = \frac{h(0)}{J_f(0)}. \tag{3.4}$$

L'indépendance de $I_f(h;\rho)$ vis à vis de ρ montre que l'on peut poser

$$I_f(h) := \lim_{\rho \to 0} I_f(h;\rho) \tag{3.5}$$

et que ceci a un sens si h est un germe quelconque dans $\mathcal{O}_n$ (cette définition ne dépend pas du représentant choisi pour le germe h).

Nous avons la proposition-définition suivante:

Proposition-Définition 3.1. *L'application*

$$h \in \mathcal{O}_n \mapsto I_f(h)$$

(comme dans (3.5)) est une forme linéaire sur $\mathcal{O}_n$ nulle sur l'idéal $(f_1, \ldots, f_n)$. L'élément du dual de $\mathcal{O}_n/(f_1, \ldots, f_n)$ induit par passage au quotient sera noté $Res_{f,0}$ et appelé résidu local relativement à f en 0.

Preuve. Considérons un germe de la forme $f_1 g$ et choisissons des représentants pour tous les germes en jeu. On a

$$I_f(f_1 g) = \frac{(-1)^{n(n-1)/2}(n-1)!}{(2i\pi)^n} \int_{||\zeta||=\rho} f_1(\zeta) g(\zeta) \Omega_f(\zeta)$$

pour $\rho > 0$ suffisamment petit. Considérons la fonction entière du paramètre μ définie par

$$j(\mu) = \int_{||\zeta||=\rho} ||f(\zeta)||^{2\mu} f_1(\zeta) g(\zeta) \Omega_f(\zeta). \tag{3.6}$$

On peut utiliser la formule de Stokes pour remarquer que pour $\Re(\mu)$ suffisamment grand, on a

$$j(\mu) = \mu \int_{||\zeta|| \leq \rho} ||f(\zeta)||^{2(\mu-n)} f_1(\zeta) g(\zeta) d\overline{f} \wedge d\zeta. \tag{3.7}$$

Cette expression s'écrit aussi

$$\mu \int_{||\zeta|| \leq \rho} \overline{\partial} \left[\frac{||f(\zeta)||^{2(\mu-n+1)}}{\mu - n + 1} \right] g(\zeta) \wedge d\overline{f_2} \wedge \cdots \wedge d\overline{f}_n \wedge d\zeta,$$

soit encore, à nouveau en utilisant Stokes,

$$n \frac{\mu}{\mu - n + 1} \int_{||\zeta||=\rho} ||f(\zeta)||^{2(\mu-n+1)} g(\zeta) \left(\bigwedge_{k=2}^{n} d\overline{f}_k \right) \wedge d\zeta. \tag{3.8}$$

La nullité de j en 0 est immédiate lorsque j est exprimée sous la forme (3.8). On a donc bien

$$I_f(f_1 g) = 0$$

et de même

$$I_f(f_k g) = 0$$

pour tout g dans $\mathcal{O}_n$. Ceci prouve la proposition puisque la linéarité de $h \mapsto I_f(h)$ est évidente. $\diamondsuit$

La première propriété importante de l'objet que nous venons de définir est *la loi de transformation locale* (nous en donnerons des versions semi locale, puis globale, un peu plus loin).

Proposition 3.2 (loi de transformation, version locale). *On considère deux suites régulières dans $\mathcal{O}_n$, $(f_1,\dots,f_n)$ et $(g_1,\dots,g_n)$, telles que $V(f)=V(g)=\{0\}$. On suppose de plus que $(g_1,\dots,g_n)\subset(f_1,\dots,f_n)$ et l'on se donne une matrice $[a_{j,k}]_{1\le j,k\le n}$ d'éléments de $\mathcal{O}_n$ tels que*

$$g_j=\sum_{k=1}^n a_{j,k}f_k\,,\ j=1,\dots,n. \tag{3.9}$$

Alors, si Δ désigne le déterminant de la matrice $[a_{j,k}]$, on a, pour tout germe h dans $\mathcal{O}_n$,

$$I_f(h)=I_g(\Delta h). \tag{3.10}$$

Preuve. On fixe une fois pour toutes des représentants pour tous les germes impliqués dans le problème, à savoir les f_j, les g_j et les $a_{j,k}$. Soient $0<\rho_1<\rho_2$ tels que tous ces représentants soient définis et holomorphes dans un voisinage W de la boule fermée de rayon ρ_2. Le voisinage W est tel que 0 est le seul zéro commun aux f_j et aussi le seul zéro commun aux g_j dans W. On considère une fonction χ_1 de classe $\mathcal{C}^\infty$, telle que $\chi\equiv 1$ au voisinage de la $\{\|\zeta\|=\rho_1\}$ et $\chi\equiv 0$ au voisinage de $\{\|\zeta\|=\rho_2\}$. On introduit la fonction $s=(s_1,\dots,s_n)$ de $W\setminus\{0\}$ dans $\mathbf{C}^n$ définie par

$$s_k=\chi\left(\frac{\sum_{j=1}^n a_{j,k}\overline{g}_j}{\|g\|^2}\right)+(1-\chi)\frac{\overline{f}_j}{\|f\|^2},\ k=1,\dots,n. \tag{3.11}$$

Il est immédiat de constater que dans $W\setminus\{0\}$, on a

$$<s,f>\equiv 1,$$

ce qui implique la nullité dans ce domaine de la forme

$$\left(\bigwedge_{k=1}^n ds_k\right)\wedge d\zeta.$$

En utilisant la formule de Stokes, on voit que

$$\begin{aligned}\int_{\|\zeta\|=\rho_2} h\Omega_f(\zeta)&=\int_{\|\zeta\|=\rho_2} h\left(\sum_{k=1}^n(-1)^{k-1}s_k ds_{[k]}\right)\wedge d\zeta\\ &=\int_{\|\zeta\|=\rho_1} h\left(\sum_{k=1}^n(-1)^{k-1}s_k ds_{[k]}\right)\wedge d\zeta.\end{aligned} \tag{3.12}$$

Il reste à calculer la forme

$$\sum_{k=1}^n(-1)^{k-1}s_k ds_{[k]}$$

au voisinage de la sphère de rayon ρ_1 en utilisant les expressions (3.11) là où $\chi = 1$. On écrit pour cela

$$s_k = \sum_{j=1}^{n} a_{j,k}\psi_j$$

où $\psi_j := \overline{g}_j/\|g\|^2$. Les calculs algébriques que l'on effectue pour développer la forme

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}s_k ds_{[k]} \wedge d\zeta$$

en y injectant les relations

$$\overline{\partial} s_k = \sum_{j=1}^{n} a_{j,k}\overline{\partial}\psi_j \ , \ k = 1, \ldots, n$$

sont formellement les mêmes que ceux que l'on effectuerait en développant suivant la première ligne le déterminant de la matrice $[a_{j,k}]$ et en multipliant par la forme

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\psi_k d\psi_{[k]}$$

(c'est en fait le développement du déterminant d'un produit de matrices, comme on pourra le vérifier cela en exercice). Or on constate facilement que

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\psi_k d\psi_{[k]}\right) \wedge d\zeta = \Omega_g.$$

On obtient donc en utilisant (3.12),

$$I_f(h) = \frac{(-1)^{n(n-1)/2}(n-1)!}{(2i\pi)^n}\int_{\|\zeta\|=\rho_1} h\Delta\Omega_g(\zeta) = I_g(\Delta h),$$

ce qui est bien la formule (3.10) annoncée. $\diamondsuit$

Nous avons en combinant les propositions 3.1 et 3.2 une version semi locale de cette loi de transformation, soit

Proposition 3.3. *Soit U un ouvert borné à frontière de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux comme dans la proposition (2.2). Soient $(f_1, \ldots, f_n)$ et $(g_1, \ldots, g_n)$ deux familles de fonctions holomorphes dans un voisinage W de $\overline{U}$, telles que $\min_{\partial U}(\|f\|, \|g\|) > 0$ et que pour tout zéro commun α des f_j (resp. des g_j), les germes des f_j (resp. des g_j) dans l'anneau local ${}_\alpha\mathcal{O}_n$ forment une suite régulière. On suppose de plus qu'il existe une matrice $[a_{j,k}]_{1\leq j,k\leq n}$ de fonctions holomorphes dans W telles que, pour tout ζ dans W,*

$$g_j(\zeta) = \sum_{k=1}^{n} a_{j,k}(\zeta)f_{j,k}(\zeta), \ j = 1, \ldots, n. \tag{3.13}$$

On a alors, si Δ désigne le déterminant de la matrice des $a_{j,k}$,

$$\sum_{\alpha\in V(f)\cap U} Res_{f,\alpha}(h) = \sum_{\beta\in V(g)\cap U} Res_{g,\beta}(h\Delta). \tag{3.14}$$

Preuve. A chaque point β de $V(g)\cap U$, on associe une boule B_β, incluse dans U, centrée en ce point, et telle que β soit le seul point de $V(g)$ dans un voisinage de cette boule. En utilisant la formule de Stokes, on voit que:

$$\int_{\partial U} h(\zeta)\Delta(\zeta)\Omega_g(\zeta) = \sum_{\beta\in V(g)\cap U} \int_{\partial B_\beta} h(\zeta)\Omega_g(\zeta). \tag{3.15}$$

Si β est un zéro de f, on sait d'après la proposition 3.2 que

$$\frac{(-1)^{n(n-1)/2}(n-1)!}{(2i\pi)^n}\int_{\partial B_\beta} h(\zeta)\Delta(\zeta)\Omega_g(\zeta) = Res_{f,\beta}(h). \tag{3.16}$$

Si maintenant β est un zéro de g non zéro de f, on voit en résolvant (3.13) come un système de Cramer en les f_k que Δ est, au voisinage de B_β, dans l'idéal engendré par les g_j. Compte tenu de la proposition 3.1, on a

$$\frac{(-1)^{n(n-1)/2}(n-1)!}{(2i\pi)^n}\int_{\partial B_\beta} h(\zeta)\Delta(\zeta)\Omega_g(\zeta) = Res_{g,\beta}(h\Delta) = 0. \tag{3.17}$$

En ajoutant les intégrales du type (3.16) et (3.17) et en utilisant (3.15), on montre bien la formule (3.14); en effet, on voit grâce encore une fois à Stokes, que le membre de gauche de (3.14) vaut

$$\frac{(2i\pi)^n(-1)^{n(n-1)/2}}{(n-1)!}\sum_{\beta\in V(g)} Res_{g,\beta}(h\Delta).$$

La proposition est démontrée. $\diamondsuit$

Le dernier point important concernant le résidu local est son rôle dans la formule de Lagrange. Nous avons la

Proposition 3.4. *Soit $(f_1,\dots,f_n)$ une suite régulière dans $\mathcal{O}_n$ telle que $V(f)=\{0\}$. On considère n^2 germes $g_{j,k}$ dans $\mathcal{O}_{2n}$ tels que, en tant que germes à l'origine en les $2n$ variables (z,ζ), ils vérifient*

$$f_j(\zeta) - f_j(z) = \sum_{k=1}^{n} g_{j,k}(z,\zeta)(\zeta_k - z_k). \tag{3.18}$$

Soit J_0 le déterminant de la matrice $[g_{j,k}]_{1\le j,k\le n}$. Alors, pour tout germe h dans $\mathcal{O}_n$, le germe à l'origine de

$$\zeta \mapsto h(\zeta) - Res_{f,0}(hJ_0(\zeta,\cdot))$$

est dans l'idéal $(f_1, \ldots, f_n)$.

Preuve. On choisit des représentants pour les f_j, h et les $g_{j,k}$. Tous ces représentants (considérés comme fonctions de $2n$ variables (z, ζ) au voisinage de l'origine dans $\mathbf{C}^{2n}$) peuvent être supposés définis et holomorphes au voisinage de $\{\|z\| \leq \rho\} \times \{\|\zeta\| \leq \rho\}$. On peut aussi supposer que sur $\{\zeta, \|\zeta\| = \rho\}$, les f_j ne s'annulent pas simultanément. Pour $\|f(z)\| < (1/2) min_{\{\|\zeta\|=\rho\}}[\|f(\zeta)\|] = \eta/2$, on a

$$min_{\{\|\zeta\|=\rho\}} \left[| < \overline{f(\zeta)}, f(\zeta) - f(z) > | \right] > \eta^2/2. \tag{3.19}$$

Pour un tel z, l'application $\zeta \mapsto f(\zeta) - f(z)$ définit une suite régulière au voisinage de chacun de ses zéros communs dans $\{\|\zeta\| \leq \rho\}$. Si l'on applique la proposition 3.3 avec $U = B_\zeta(0, \rho)$ et $g = g_z = f - f(z)$, on déduit de la formule de Cauchy

$$h(z) = Res_{(\cdot)-z,z}$$

la formule

$$h(z) = \sum_{\{\zeta, \|\zeta\|<\rho, f(\zeta)=f(z)\}} Res_{f(\cdot)-f(z),\zeta}(hJ_0(z, \cdot)). \tag{3.20}$$

On peut maintenant représenter cette somme de résidus sous la forme

$$\frac{(-1)^{n(n-1)/2}(n-1)!}{(2i\pi)^n} \int_{\|\zeta\|=\rho} h(\zeta) J_0(z, \zeta) \frac{\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \overline{f}_k d\overline{f_{[k]}} \wedge d\zeta}{< \overline{f(\zeta)}, f(\zeta) - f(z) >^n}. \tag{3.21}$$

Pour z fixé, tel que

$$\|f(z)\| < (1/2) min_{\{\|\zeta\|=\rho\}}[\|f(\zeta)\|],$$

on peut développer le noyau sous l'intégrale en série géométrique. On obtient alors, la série étant normalement convergente (en les variables z) dans tout voisinage de l'origine où $\|f\| \leq \eta_1 < \eta/2$,

$$h(z) = Res_{f,0}(hJ_0(z, \cdot)) + C_n \sum_{k>0} \frac{(n+k-1)!}{k!} \int_{\|\zeta\|=\rho} \frac{hJ_0(z, \cdot) < \overline{f}, f(z) >^k}{\|f\|^{2k}} \Omega_f \tag{3.22}$$

avec, comme toujours $C_n = (-1)^{n(n-1)/2}/(2i\pi)^n$.
La proposition est ainsi démontrée. $\diamondsuit$

Etant donnée une suite régulière $(f_1, \ldots, f_n)$ dans l'anneau $\mathcal{O}_n$ telle que $V(f) = \{0\}$, nous pouvons équiper le dual (topologique) $\mathcal{V}^*$ de l'espace vectoriel quotient $\mathcal{V} := \mathcal{O}/(f_1, \cdots, f_n)$ (de dimension finie égale à la multiplicité $m_f(0)$ d'après la proposition 2.12) d'une structure de $\mathcal{V}$-module: pour $\overline{h} \in \mathcal{V}$ et $T \in \mathcal{V}^*$, on pose

$$\overline{h} \cdot T(\overline{q}) := T(\overline{hq}), \ \overline{q} \in V. \tag{3.23}$$

Nous avons alors l'analogue de la proposition 1.2.

Proposition 3.5. *$\mathcal{V}^*$ est un $\mathcal{V}$-module de rang 1 engendré par $Res_{f,0}$.*

Preuve. Soit T un élément de $\mathcal{V}^*$ et $\overline{q}$ un élément de $\mathcal{O}^n$. Comme T est définie sur le quotient, on peut, en utilisant la proposition 3.4, remplacer tout représentant arbitraire de $\overline{q}$ par

$$\zeta \mapsto Res_{f,0}(qJ_0(\zeta,\cdot)).$$

On a donc, en utilisant la continuité de T (l'intégrale en jeu dans la définition du résidu s'approchant par des sommes de Riemann),

$$T(\overline{q}) = \overline{h}_T \cdot Res_{f,0}(\overline{q}),$$

où

$$h_T(\zeta) = T_\zeta(J_0(\cdot,\zeta)).$$

Ceci achève la preuve de la proposition. $\diamondsuit$

Nous allons maintenant montrer que le calcul du résidu local relatif à une suite régulière $(f_1,\ldots,f_n)$ de $\mathcal{O}_n$ telle que $V(f)=\{0\}$ se ramène à un calcul de trace (au sens trace d'un opérateur linéaire du quotient dans lui même).

Commencons par une remarque préliminaire. Une des propriétés intéressantes du résidu local est la suivante; étant donnée une suite régulière dans $\mathcal{O}_n$ telle que $V(f)=\{0\}$, la suite $(f_1^{m_1},\ldots,f_n^{m_n})$, où m est un n-uplet de $(\mathbf{N}^*)^n$, est aussi régulière. On notera pour plus de simplicité $Res_{f,0}^{[m]}$ la forme linéaire résidu à l'origine correspondante. On a alors la

Proposition 3.6. *Pour tout m tel que l'un des m_k soit strictement supérieur à 1, on a*

$$Res_{f,0}^{[m]}(J) = 0. \tag{3.24}$$

Preuve. On utilise tout d'abord la loi de transformation pour calculer les nombres

$$Res_{f,0}^{[m]}(h),\ h \in \mathcal{O}_n.$$

On se place pour cela dans l'anneau des germes à l'origine en $2n$ variables

$$(\zeta_1,\ldots,\zeta_n,u_1,\ldots,u_n).$$

La suite

$$(u_1^{m_1},\ldots,u_n^{m_n},f_1(\zeta)-u_1,\ldots,f_n(\zeta)-u_n)$$

est régulière dans cet anneau et la variété des zéros communs se réduit à l'origine dans $\mathbf{C}^{2n}_{u,\zeta}$. Notons F_m cette suite et considérons un germe $\zeta \mapsto h(\zeta)$ dans $\mathcal{O}_n$ comme un germe $\tilde{h}$ dans $\mathcal{O}_{2n}$, à savoir

$$\tilde{h}(u,\zeta) := h(\zeta).$$

On a, si l'on pose

$$\delta(u,\zeta) := \prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=0}^{m_j-1} u_j^k P_j(\zeta)^{m_j-1-k}\right),$$

$$Res_{F,0}(\tilde{h}) = Res_{G,0}(\delta\tilde{h}),$$

où G est le vecteur de germes

$$G(u,\zeta) := (u_1^{m_1},\dots,u_n^{m_n},f_1(\zeta)^{m_1},\dots,f_n(\zeta)^{m_n}).$$

Si l'on utilise un argument de perturbation (consistant à remplacer les germes $f_j^{m_j}$ par $f_j^{m_j}-\epsilon_j$ de manière à ramener les calculs de résidus au cas où les zéros sont simples), on voit aisément que, du fait que les variables u et ζ soient séparées dans les différentes composantes de G, on a

$$Res_{G,0}(\delta\tilde{h}) = \left(\prod_{j=1}^n Res_{u_j^{m_j},0}(u_j^{m_j-1})\right) Res_{f,0}^{[m]}(h) = Res_{f,0}^{[m]}(h). \tag{3.25}$$

Mais il est facile d'obtenir, pour ρ suffisamment petit et $\|u\|$ suffisamment petit (en fonction du choix de ρ), le développement en série (comme fonction de u) de

$$H_{[h]}(u) := \frac{(-1)^{n(n-1)/2}(n-1)!}{(2i\pi)^n}\int_{\|\zeta\|=\rho} h(\zeta)\frac{\sum_{k=1}^n(-1)^{k-1}\overline{f}_k d\overline{f_{[k]}}(\zeta)\wedge d\zeta}{<\overline{f(\zeta)},f(\zeta)-u>^n}.$$

Ce développement, comme dans la formule (3.22), s'écrit

$$\sum_{m\in(\mathbf{N}^*)^n} c_m(f;h)u_1^{m_1-1}\cdots u_n^{m_n-1},$$

où

$$c_m(f;h) = \frac{(-1)^{n(n-1)/2}(|m|-1)!}{(2i\pi)^n(m-\underline{1})!}\int_{\|\zeta\|=\rho} h\prod_{j=1}^n \overline{f_j}^{m_j-1}\frac{\sum_{k=1}^n(-1)^{k-1}\overline{f}_k d\overline{f_{[k]}}\wedge d\zeta}{\|f\|^{2|m|}}. \tag{3.26}$$

En utilisant l'identité (3.25), on voit que le coefficient $c_m(f;h)$ est égal en fait au résidu

$$Res_{f,0}^{[m]}(h),$$

ce qui fait que le développement en série de $H_{[h]}(u)$ s'écrit aussi

$$H_{[h]}(u) = \sum_{m\in\mathbf{N}^{*n}} (Res_{f,0}^{[m]}(h))u_1^{m_1-1}\cdots u_n^{m_n-1}. \tag{3.27}$$

Ce calcul du coefficient $c_m(f;h)$ peut aussi être obtenu différemment; il suffit de remarquer que, si $\epsilon\in\mathbf{C}^n$ est une petite perturbation de 0, le système $(f_1-\epsilon_1,\dots,f_n-\epsilon_n)$ n'a que des zéros simples (et à fortiori isolés) dans un voisinage de $\overline{B(0,\rho)}$. En utilisant les égalités

(2.19) et le fait qu'au voisinage des zéros communs aux $f_j - \epsilon_j$, on peut écrire $d\zeta = df/J$, on voit, si $c_m(f-\epsilon;h)$ désigne l'intégrale (3.26) dans laquelle on a substitué $f-\epsilon$ à f, que

$$c_m(f-\epsilon;h) = \frac{(-1)^{n(n-1)/2}(n-1)!}{(2i\pi)^n} \int_{\|\zeta\|=\rho} h\left(\frac{\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1}(\overline{f}_k - \overline{\epsilon}_k)^{m_k} \overline{df^m_{[k]}} \wedge d\zeta}{(\sum_{k=1}^n |f_k - \epsilon_k|^{2m_k})^n}\right),$$

ce qui, lorsque l'on fait tendre ϵ vers 0, redonne

$$c_m(f;h) = Res^{[m]}_{f,0}(h).$$

La fonction H est, comme fonction de u, holomorphe au voisinage de 0; nous pouvons reécrire cette fonction sous une forme où l'holomorphie est moins évidente, à savoir

$$H_{[h]}(u) = \frac{(-1)^{n(n-1)/2}(n-1)!}{(2i\pi)^n} \int_{\|\zeta\|=\rho} h \frac{\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1}(\overline{f}_k - \overline{u}_k) \overline{df_{[k]}}(\zeta) \wedge d\zeta}{\|f-u\|^{2n}}. \tag{3.28}$$

Sous cette forme, montrons que la fonction $H_{[J]}$ est constante au voisinage de l'origine; la proposition en résultera. Il suffit pour cela de différentier $H_{[J]}$ (par exemple exprimée sous la forme (3.28)) par rapport aux u_j. On a

$$\frac{\partial H_{[J]}}{\partial u_j} = \frac{(-1)^{n(n-1)/2} n!}{(2i\pi)^n} \int_{\|\zeta\|=\rho} \frac{\overline{f}_j - \overline{u}_j}{\|f-u\|^2} \left(\frac{\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1}(\overline{f}_k - \overline{u}_k) d\overline{f}_{[k]}}{\|f-u\|^{2n}}\right) \wedge df. \tag{3.29}$$

On peut à ce point reprendre l'idée que nous avons utilisé pour prouver la proposition 3.1. Nous introduisons un paramètre complexe μ, puis nous remarquons que la dérivée partielle par rapport à u_j de $H_{[J]}$ en u est égale à la valeur en $\mu = 0$ de l'application

$$j_u : \mu \mapsto \frac{(-1)^{n(n-1)/2} n!}{(2i\pi)^n} \int_{\|\zeta\|=\rho} \|f-u\|^{2\mu} s_{u,j} \left(\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} s_{u,k} \wedge df\right), \tag{3.30}$$

où

$$s_{u,k} := \frac{\overline{f}_k - \overline{u}_k}{\|f-u\|^2}.$$

En utilisant la formule de Stokes et de fait que, hors des zéros de $f-u$, on a

$$\left(\bigwedge_{k=1}^n ds_{u,k}\right) \wedge df \equiv 0.$$

On peut donc transformer $j_u(\mu)$, pour $\Re(\mu)$ grand, en

$$j_u(\mu) = \frac{(-1)^{n(n-1)/2} n n! \mu}{(2i\pi)^n} \int_{\|\zeta\|\le\rho} \left(\|f-u\|^{2(\mu-n-1)}(\overline{f}_j - \overline{u}_j)\right) d\overline{f} \wedge df(\zeta). \tag{3.31}$$

Il suffit de remarquer que l'on a, au signe près,

$$\frac{1}{\mu - n} d\left(\|f-u\|^{2(\mu-n)} \bigwedge_{k\neq j} df_k \wedge d\overline{f}\right) = (\overline{f}_j - \overline{u}_j)\|f-u\|^{2\mu} \frac{df \wedge d\overline{f}}{\|f-u\|^{2(n+1)}}$$

et de réappliquer Stokes (dans l'autre sens cette fois), pour voir que $j_u(0) = 0$. Ceci montre bien que la fonction $H_{[J]}$ est constante, et que par conséquent tous les coefficients $c_m(f;J)$ sont nuls pour tout multiindice de $(\mathbf{N}^*)^n$ différent de $(1,\ldots,1)$. ◇

La formule (3.27) mérite que l'on l'énonce sous forme de proposition.

Proposition 3.7 (Formule de Cauchy-Weil, version locale). *Soit $(f_1, \ldots, f_n)$ une suite régulière dans $\mathcal{O}_n$ avec $V(f) = \{0\}$; on suppose que les f_j sont des représentants des germes définis au voisinage d'une boule de centre 0 et de rayon ρ dans laquelle l'origine est le seul zéro commun aux f_j. Alors, pour $u \in \mathbf{C}^n$, tel que*

$$\|u\| < inf_{\|\zeta\|=\rho}(\|f(\zeta)\|),$$

les fonctions $f_j - u_j, j = 1, \ldots, n$, n'ont que des zéros communs isolés au voisinage de la boule $B(0, \rho)$ et n'ont aucun zéro commun sur la frontière de cette boule. De plus, pour un tel u, pour toute fonction h holomorphe dans un voisinage de $\overline{B(0, \rho)}$, on a

$$\sum_{\|\alpha\|<\rho, f(\alpha)=u} Res_{f-u,\alpha}(h) = \sum_{m \in (\mathbf{N}^*)^n} Res^{[m]}_{f,0}(h) u_1^{m_1-1} \cdots u_n^{m_n-1} \tag{3.32}$$

la série de droite étant normalement convergente dans toute boule de rayon η, où

$$\eta < inf_{\|\zeta\|=\rho}(\|f(\zeta)\|).$$

Preuve. Elle résulte de toutes les remarques faites précédemment. $\diamondsuit$

Considérons maintenant une suite régulière $(f_1, \ldots, f_n)$ dans $\mathcal{O}_n$ telle que $V(f) = \{0\}$. Notons J le germe du jacobien des f_j relativement aux ζ_k. Si $u = (u_1, \ldots, u_n)$ désigne un système de paramètres voisin de 0 dans $\mathbf{C}^n$ et si les f_j désignent aussi des représentants des germes définis au voisinage de $\overline{B(0, \rho)}$, 0 étant le seul zéro commun aux f_j dans ce voisinage, on sait que, pour $\|u\|$ assez petit, l'application $f - u$ a exactement $m = m_f(0)$ racines (avec multiplicité) dans la boule $B(0, \rho)$ (et aucune racine sur le bord de cette boule). D'autre part, les sommes de Newton, donc aussi les fonctions symétriques, des valeurs aux zéros de $f - u$ de J sont des fonctions holomorphes des paramètres $u = (u_1, \ldots, u_n)$ dans un voisinage de l'origine. Ainsi, il existe, comme dans la preuve de (2.26), des fonctions holomorphes $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ de u (au voisinage de 0 dans $\mathcal{C}^n$) telles que

$$J(\zeta)^m - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k(u) J(\zeta)^{m-k} \equiv 0 \; mod(f_1, \ldots, f_n). \tag{3.33}$$

Si $\mathbf{B}_u$ désigne l'algèbre quotient de $\mathbf{B}(B(0, \rho))$ par l'idéal engendré par les f_j, (3.33) équivaut encore à dire que l'opérateur de multiplication par J satisfait dans $\mathbf{B}_u$ la relation

$$J^m - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k(u) J^{m-k} \equiv 0. \tag{3.34}$$

Comme d'aprés le théorème de Sard, l'opérateur de multiplication par J est inversible dans $\mathbf{B}_u$, on a, pour u générique et voisin de 0,

$$J^q - \sum_{k=1}^{q} \beta_k(u) J^{q-k} \equiv 0$$

(comme opérateur de multiplication dans $\mathbf{B}_u$) avec

$$k \geq q > 0,\ \beta_0(u) \not\equiv 0.$$

On a ainsi, pour u générique

$$J^{-1} \equiv \frac{1}{\beta_q(u)} J^{q-1} - \sum_{k=1}^{q-1} \frac{\beta_k(u)}{\beta_q(u)} J^{q-k}. \tag{3.35}$$

Choisissons $t = (t_1, \ldots, t_n) \in (\mathbf{R}^+)^n$ tel que $\epsilon \mapsto \beta_q(t_1\epsilon, \ldots, t_n\epsilon)$ ne soit pas la fonction nulle; d'après la loi de transformation, on a, pour $\eta > 0$ assez petit, pour toute fonction h holomorphe au voisinage de $\overline{B(0,\rho)}$,

$$Res_{f,0}(h) = \frac{1}{(2i\pi)} \int_{|\epsilon|=\eta} \left(\sum_{f(\xi)=t\epsilon, \|\xi\|<\rho} Res_{f-t\epsilon,\xi}(\frac{1}{J} Jh) \right) \frac{d\epsilon}{\epsilon}. \tag{3.36}$$

Compte tenu de (3.35), on voit que $Res_{f,0}(h)$ s'écrit comme une combinaison de termes de la forme

$$Res_{f,0}^{[m]}(h\phi_m J) \tag{3.37}$$

où les ϕ_m sont des éléments de $\mathcal{O}_n$, m désignant un multiindice de $(\mathbf{N}^*)^n$ tel que $|m| - n$ soit inférieur ou égal à l'ordre d'annulation de $\epsilon \mapsto \beta_q(t\epsilon)$ à l'origine.

Pour montrer enfin qu'un calcul de la forme (3.37) correspond en fait au calcul de la trace d'un certain opérateur sur l'algèbre quotient, on peut plonger l'anneau $\mathcal{O}_n$ dans un complété $(f_1, \ldots, f_n)$-adique (soit ici l'anneau des séries formelles), ce que nous ferons au paragraphe 3.3 dans un cadre algébrique plus général. Ce plongement nous autorisera à associer à tout élément ψ de $\mathcal{O}_n$ un développement de la forme

$$\sum_m \delta_m(\psi) f^m,$$

où les δ_m sont des opérateurs de multiplication dans l'algèbre quotient $\mathcal{O}_n/(f_1, \ldots, f_n)$. Le résidu explicité dans (3.37) correspond, si l'on utilise les propositions 3.1 et 3.6, à

$$Tr[\delta_{m-\underline{1}}(h\psi_m)].$$

Ainsi donc, tout calcul de résidu local en 0 correspond t'il au calcul de la *trace* d'un certain opérateur dans l'algèbre quotient. Notons que ce résultat est trivial lorsque le Jacobien est un inversible de l'anneau des germes, mais l'est moins dans le cas général. C'est ce dont nous venons d'esquisser la preuve ci dessus. Cette approche des calculs de résidus comme des calculs de traces sera l'approche naturelle lorsque l'on se placera dans le cadre plus général d'un anneau noethérien R dans lequel on s'est donné une suite quasi régulière $(r_1, \ldots, r_n)$ telle que $R/(a)$ soit un R-module projectif de présentation finie. Ceci sera l'objet du paragraphe 3.3.

3.2. Residu global.

Etant donnée une suite de polynômes $(P_1, \ldots, P_n)$ de n variables, à coefficients dans un sous corps $\mathbf{K}$ de $\mathbf{C}$, définissant une variété discrète (donc finie d'après le thórème de Bézout) dans $\mathbf{C}^n$, on peut associer à cette suite une forme linéaire sur l'espace $\mathbf{V} := \mathbf{K}[X_1, \ldots, X_n]/(P)$ par passage au quotient de l'application

$$Q \mapsto < \overline{\partial}(1/P), QdX >:= \sum_{\alpha, P(\alpha)=0} Res_{P,\alpha}(Q). \tag{3.38}$$

Le fait que cette forme soit bien définie sur le quotient résulte de l'application de la proposition 3.1. Le fait que ce soit bien une forme à valeurs dans $\mathbf{K}$ est une conséquence du fait suivant: si $S_j, \ldots, j = 1, \ldots, n$ désigne le polynôme caractéristique de l'opérateur de multiplication par X_j dans l'algèbre quotient $\mathbf{K}[X_1, \ldots, X_n]/(P)$, on peut écrire

$$S_j(X_j) = \sum_{k=1}^{n} S_{j,k}(X) P_j(X),\ j = 1, \ldots, n,$$

où les $S_{j,k}$ sont dans $\mathbf{K}[X_1, \ldots, X_n]$. Si l'on utilise la loi de transformation (version semi locale, proposition 3.3) avec un ouvert U contenant tous les zéros communs de $S = (S_1(X_1), \ldots, S_n(X_n))$, on trouve

$$< \overline{\partial}(1/P), QdX >=< \overline{\partial}(1/S), Qdet([S_{j,k}])_{j,k} dX > . \tag{3.39}$$

Le membre de droite de (3.39) est un élément de K; en effet, on voit facilement (en utilisant la représentation intégrale des résidus) que pour tout multiindice β dans $\mathbf{N}^n$,

$$< \overline{\partial}(1/S), X_1^{\beta_1} \cdots X_n^{\beta_n} dX >= \prod_{j=1}^{n} < \overline{\partial}(1/S_j), t^{\beta_j} dt >,$$

expression qui est dans $\mathbf{K}$ d'après les résultats du chapitre 1.

Définition 3.8. *Soit $P := (P_1, \ldots, P_n)$ un n-uplet de polynômes de $\mathbf{K}[X_1, \ldots, X_n]$ qui définit une variété discrète dans $\mathbf{C}^n$. On appelle résidu global relativement à P la forme linéaire de $\mathbf{V} := \mathbf{K}[X_1, \ldots, X_n]/(P)$ dans $\mathbf{K}$ qui à la classe de Q associe la somme complète des résidus locaux de Q en tous les zéros de P.*

Remarque. L'action de résidu global relatif à une application polynomiale $(P_1, \ldots, P_n)$ peut être étendue aux fractions rationnelles de la forme $R = R_1/R_2$, où $\{R_2 = 0\} \cap V(P) = \emptyset$. On définit l'action du résidu global de R_1/R_2 relativement à P comme la somme des résidus locaux en tous les points de $V(P)$. Le nombre obtenu ainsi reste un élément de $\mathbf{K}$. Il suffit de considérer pour cela l'opérateur de multiplication par R_2, opérateur linéaire sur l'algèbre quotient. Cet opérateur annule son polynôme caractéristique

$$R_2^m - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k R_2^{m-k} \equiv 0 \tag{3.40}$$

où $m = dim(\mathbf{V})$. Cet opérateur R_2 est inversible (puisque R_2 ne s'annule pas sur $V(P)$). En composant (3.40) avec $(R_2^{-1})^m$, on obtient une relation du type

$$(R_2^{-1})^q - \sum_{k=1}^{q} \beta_k (R_2^{-1})^{q-k} \equiv 0 \tag{3.41}$$

avec un entier $q \leq k$. Ainsi l'opérateur $(R_2)^{-1}$ s'écrit

$$(R_2)^{-1} \equiv \sum_{k=1}^{q} \beta_k R_2^{k-1}. \tag{3.42}$$

Il résulte de (3.42) et de la proposition 3.1

$$< \overline{\partial}(1/P), (R_1/R_2)dX >= \sum_{k=1}^{k-1} \beta_k < \overline{\partial}(1/P), R_1 R_2^{k-1} dX >,$$

forme sous laquelle on voit clairement que

$$< \overline{\partial}(1/P), R_1/R_2 dX > \in \mathbf{K}.$$

Voici la version globale de la proposition 3.4.

Proposition 3.9. *Soit $(P_1, \ldots, P_n)$ n polynômes de n variables à coefficients dans $\mathbf{K}$ définissant une variété $V(P)$ discrète ou vide dans $\mathbf{C}^n$. On suppose que les $Q_{j,k}, 1 \leq j, k \leq n$ sont des polynômes à coefficients dans $\mathbf{K}$, à $2n$ variables, tels que*

$$P_j(\zeta) - P_j(z) = \sum_{k=1}^{n} Q_{j,k}(z, \zeta)(z_k - \zeta_k)$$

(on verra plus loin comment construire de tels polynômes). Alors, pour tout polynôme Q dans $\mathbf{K}[X_1, \ldots, X_n]$, on a

$$Q- < \overline{\partial}(1/P(X)), Q(X) det[Q_{j,k}(\cdot, X)]_{j,k} dX > \in (P_1, \ldots, P_n). \tag{3.43}$$

Preuve. Le résultat est trivial si les P_j n'ont aucun zéro commun. On supposera donc la variété des zéros $V(P)$ discrète et non vide. On considère un point ξ de $V(P)$ et une boule de centre ξ et de rayon ρ au voisinage de laquelle ξ est le seul zéro commun des P_j. Si l'on utilise (au voisinage de ξ au lieu de l'origine) la formule (3.22), on voit que dans la boule $B(\xi, \rho)$,

$$Q(z) - Res_{P,\xi}(Q det[Q_{j,k}(z, \cdot)]_{j,k}) = \sum_{k=1}^{n} g_{j,k}(\xi; z) P_k(z), \tag{3.44}$$

où les $g_{j,k}(\xi;\cdot)$ sont des fonctions holomorphes au voisinage de $\overline{B(\xi,\rho)}$. Mais, pour un tel z dans $B(\xi,\rho)$, et pour un point ξ' de $V(P)$ différent de ξ, on a

$$Res_{P,\xi'}(Qdet[Q_{j,k}(z,\cdot)]_{j,k}) \equiv 0\,(P_1,\ldots,P_n)$$

dans l'anneau $\mathcal{O}'_\xi$. Ceci résulte du fait que l'on peut écrire en utilisant les formules de Cramer

$$det[Q_{j,k}(z,\zeta)]_{j,k}(z_j-\zeta_j) = \sum_{k=1}^{n} \Delta_{j,k}(z,\zeta)(P_k(z)-P_k(\zeta)),\ j=1,\ldots,n, \tag{3.45}$$

où les $\Delta_{j,k}$ sont des polynômes en $2n$ variables à coefficients dans $\mathbf{K}$. En combinant les relations (3.45), on voit qu'il existe des fonctions $\theta_j(\xi,\xi';\cdot,\cdot), j=1,\cdots,n$, holomorphes au voisinage de $B(\xi,\rho)\times B(\xi',\rho')$ (ρ' est tel que ces deux boules soient disjointes), telles que, pour tout (z,ζ) dans $B(\xi,\rho)\times B(\xi',\rho')$, on ait

$$det[Q_{j,k}(z,\zeta)]_{j,k} = \sum_{j=1}^{n} \theta_j(\xi,\xi';z,\zeta)(P_j(\zeta)-P_j(z)). \tag{3.46}$$

La formule (3.46), combinée avec la proposition 3.1, montre qu'il existe des fonctions $\phi(\xi,\xi';\cdot), j=1,\cdots,n$ telles que, pour z dans $B(\xi,\rho)$,

$$Res_{P,\xi'}(Qdet[Q_{j,k}(z,\cdot)]_{j,k}) = \sum_{j=1}^{n} \phi(\xi,\xi';z)P_j(z). \tag{3.47}$$

Si l'on ajoute les formules (3.47) (pour tous les $\xi'\in V(P)$ différents de ξ) à la formule (3.44), on trouve des fonctions $\psi(\xi;\cdot),\ j=1,\cdots,n$ holomorphes au voisinage de ξ et telles que

$$Q(z) - <\overline{\partial}(1/P), Qdet[Q_{j,k}(z,\cdot)]_{j,k}> = \sum_{j=1}^{n} \psi(\xi;z)P_j(z). \tag{3.48}$$

Ce raisonnement peut être répété pour tout ξ de $V(P)$. On en déduit que le polynôme

$$Q - <\overline{\partial}(1/P(X)), Q(X)det[Q_{j,k}(\cdot,X)]_{j,k}dX>$$

est localement dans l'idéal engendré par les P_j. En utilisant la remarque suivant la proposition 2.13, on montre que ceci implique l'appartenance de ce polynôme à l'idéal engendré par les P_j dans $\mathbf{K}[X_1,\ldots,X_n]$. $\diamondsuit$

Remarque. On peut construire des $Q_{j,k}$ de manière naturelle comme suit. Si p est un élément de $\mathbf{K}[X_1,\cdots,X_n]$, on peut écrire

$$P(\zeta)-P(z) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{P(\zeta_1,\ldots,\zeta_k,z_{k+1},\ldots,z_n)-P(\zeta_1,\ldots,\zeta_{k-1},z_k,\ldots,z_n)}{\zeta_k-z_k}\right)(\zeta_k-z_k)$$

(avec la convention ζ_0 ou z_{n+1} ne doivent pas être pris en compte). Ceci, appliqué à $P_1,\ldots,P_n$, permet de construire une famille de polynômes $Q_{j,k}$ particulière; notons que le degré total de $Q_{j,k}$ en les $2n$ variables (z,ζ) est $deg(P_j)-1$. Le déterminant de la matrice des $Q_{j,k}$ s'appelle le *Bezoutien* de $(P_1,\ldots,P_n)$.

Seront appelées à jouer un rôle intéressant dans les problèmes globaux les applications polynomiales propres.

Définition 3.10. *Une application polynomiale* $(P_1, \ldots, P_N)$ *de* $\mathbf{C}^n$ *dans* $\mathbf{C}^N$ *(les* P_j *étant des polynômes en* n *variables à coefficients dans* $\mathbf{K}$*, sous corps de* $\mathbf{C}$*) est dite propre si et seulement si il existe un réel strictement positif* δ *tel que*

$$liminf_{\|X\|\to\infty} \frac{\left(\sum_{j=1}^N |P_j(X)|^2\right)^{1/2}}{\|X\|^\delta} > 0. \qquad (3.49)$$

La borne supérieure des nombres réels strictement positifs δ *tels que (3.49) est valide est un nombre rationnel, inférieur ou égal au maximum des degrés des polynômes* P_j*. Ce nombre est appelé exposant de Lojasiewicz de l'application polynomiale propre* P*.*

Remarque. On peut montrer (c'est une conséquence du principe de Seidenberg-Tarski, on se reportera par exemple à [S],[Ho1]) qu'une condition nécessaire est suffisante de propreté est que l'application polynomiale P soit propre au sens topologique habituel (l'image réciproque d'un compact de $\mathbf{C}^N$ est un compact de $\mathbf{C}^n$, ou encore, $lim_{\|X\|\to\infty}(\|P(X)\|) = \infty$). Nous n'utiliserons pas ici ce résultat et conviendrons que la condition de propreté est celle de la définition 3.9.

Nous avons le résultat suivant, familier aux spécialistes de la célèbre conjecture du Jacobien, selon laquelle toute application polynomiale de $\mathbf{C}^n$ dans $\mathbf{C}^n$ de jacobien constant est propre (pour plus de références à ce sujet, on pourra consulter l'article de Hyman Bass [Bass]). Ce résultat est énoncé sous une forme voisine dans un article de E. Biernat [Bier] mais nous en donnons ici une preuve beaucoup plus simple et susceptible de s'adapter à un contexte algébrique plus général (voir la section 3 de ce chapitre).

Proposition 3.11. *Soit* $P = (P_1, \ldots, P_n)$ *une application polynomiale de* $\mathbf{C}^n$ *dans lui même, les polynômes* P_j *étant à coefficients dans un sous corps* $\mathbf{K}$ *de* $\mathbf{C}$*. Soit*

$$(Y, X) \mapsto J_0(Y, X) = \sum_{\alpha \in \mathcal{J}} Y^\alpha J_\alpha(X)$$

le Bezoutien de P*. Les 3 conditions suivantes sont équivalentes:*
(i) P *est une application propre.*
(ii) $V(P) \neq \emptyset$, $V(P-u)$ *est discrète pour tout* $u \in \mathbf{C}^n$*, et de plus, pour tout* $\alpha \in \mathcal{J}$*, pour tout* $j \in \{1, \ldots, n\}$*, l'application*

$$u \in \mathbf{C}^n \mapsto <\overline{\partial}\left(\frac{1}{P-u}\right), J_\alpha(X) X_j^{deg(P_1)+\cdots deg(P_n)-n+1} dX > \qquad (3.50)$$

est une application polynomiale en $u = (u_1, \ldots, u_n)$*.*
(iii) $\mathbf{K}[X_1, \ldots, X_n]$ *est un* $\mathbf{K}[P_1, \ldots, P_n]$*-module de type fini.*

De plus, si l'une de ces conditions est remplie, alors pour tout polynôme Q *de* n *variables à coefficients dans* $\mathbf{K}$*, l'application*

$$u \in \mathbf{C}^n \mapsto <\overline{\partial}\left(\frac{1}{P-u}\right), QdX >$$

est un polynôme en n variables à coefficients dans $\mathbf{K}$, de degré au plus

$$\left[\frac{deg(Q)+(n-1)(Max(deg(P_j))-\delta_0)+n}{\delta_0}\right]-n+1,$$

où δ_0 désigne l'exposant de Lojasiewicz de P et le crochet la prise de partie entière.

Preuve.

(i) implique (ii). Nous allons ici démontrer plus. Supposons qu'il existe des constantes strictement positives c et δ telles que, pour $||\zeta||$ suffisamment grand, on ait

$$||P(\zeta)|| \geq c||\zeta||^{\delta}. \tag{3.51}$$

Montrons tout d'abord que la variété des zéros communs est nécessairement non vide. Fixons z_0 dans $\mathbf{C}^n$. L'application

$$\zeta \mapsto P(\zeta)-P(z_0)$$

est encore une application propre. On peut écrire, en utilisant les polynômes $Q_{j,k}$ intervenant dans le Bezoutien de P,

$$P_j(\zeta)-P_j(z_0)=\sum_{k=1}^{n} Q_{j,k}(z_0,\zeta)(\zeta_k-z_{0,k}),\ j=1,\ldots,n.$$

Considérons une boule $B(0,R)$ contenant z_0 et tous les zéros de l'application $P-P(z_0)$. On peut transformer par la loi de transformation (version semi locale, proposition 3.3, appliquée avec $U=B(0,R)$) la formule de Cauchy

$$1=Res_{\zeta-z_0,z_0}(1),$$

ce qui donne

$$1=\sum_{\xi,P(\xi)=P(z_0)} Res_{P-P(z_0),\xi}(J_0(z_0,\cdot)),$$

ce que l'on peut aussi écrire sous la forme intégrale

$$1=\frac{(-1)^{n(n-1)/2}(n-1)!}{(2i\pi)^n}\int_{||\zeta||=R} J_0(z,\zeta)\frac{\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\overline{P_k dP_{[k]}}\wedge d\zeta}{<\overline{P(\zeta)},P(\zeta)-P(z_0)>^n}. \tag{3.52}$$

Si R est assez grand pour que sur $\{||\zeta||\}=R$, on ait

$$||P(\zeta)|| \leq \gamma||P(z_0)||,$$

avec $\gamma<1$, on peut développer en série l'intégrale figurant à droite de (3.52). Cette formule devient, comme on l'a vu en prouvant 3.27,

$$1=\sum_{m\in\mathbf{N}^{*n}} \gamma_m(z)P_1(z_0)^{m_1-1}\cdots P_n(z_0)^{m_n-1}, \tag{3.53}$$

où

$$\gamma_m(z) = \frac{(-1)^{n(n-1)/2}(|m|-1)!}{(2i\pi)^n(m-\underline{1})!}\int_{||\zeta||=R} J_0(z_0,\zeta)\prod_{j=1}^n \overline{P}_j^{m_j-1}\frac{\sum_{k=1}^n(-1)^{k-1}\overline{P_k dP_{[k]}}\wedge d\zeta}{||P||^{2|m|}}. \tag{3.54}$$

Un calcul simple montre que toutes les formes qui apparaissent dans les intégrales (3.54) sont fermées hors de l'ensemble des zéros communs aux P_j. Si cet ensemble est vide, le membre de droite de (3.53) est nul, ce qui est absurde. La variété des zéros communs aux P_j est donc non vide.

Soit maintenant $u \in \mathbf{C}^n$. L'application polynomiale $P-u$ est toujours propre; la variété des zéros communs aux polynômes $P_j - u_j$ reste discrète, donc finie. En effet, cette variété V_u est incluse dans un compact. D'après le théorème de Liouville, toute fonction holomorphe bornée sur une variété algébrique de dimension positive est constante; si la variété est incluse dans un compact, les applications coordonnées y sont constantes, ce qui est contradictoire avec le fait que la dimension soit positive (et donc que les points de la variété soient non isolés). Prenons un polynôme arbitraire Q. Si R est suffisamment grand pour que la boule de rayon R contienne tous les points de V_u, on a vu que

$$< \overline{\partial}\left(\frac{1}{P-u}\right), QdX >= \frac{(-1)^{n(n-1)/2}(n-1)!}{(2i\pi)^n}\int_{||\zeta||=R} Q(\zeta)\frac{\sum_{k=1}^n(-1)^{k-1}\overline{P_k dP_{[k]}}\wedge d\zeta}{<\overline{P(\zeta)}, P(\zeta)-u) >^n}. \tag{3.55}$$

Cette expression se développe (lorsque R est assez grand, cette condition dépendant à priori de u) sous la forme

$$\sum_{m\in(\mathbf{N}^*)^n} c_m(P;Q)u_1^{m_1-1}\cdots u_n^{m_n-1}$$

(voir la formule (3.27)), où

$$c_m(P;Q) := \frac{(-1)^{n(n-1)/2}(|m|-1)!}{(2i\pi)^n(m-\underline{1})!}\int_{||\zeta||=R} Q(\zeta)\prod_{j=1}^n \overline{P}_j^{m_j-1}\frac{\sum_{k=1}^n(-1)^{k-1}\overline{P_k dP_{[k]}}\wedge d\zeta}{||P||^{2|m|}}. \tag{3.56}$$

Utilisons maintenant l'hypothèse (3.51). Si $D := Max(deg(P_j))$, il existe une constante positive C telle que pour tout $m \in (\mathbf{N}^*)^n$,

$$\left|\int_{||\zeta||=R} Q(\zeta)\prod_{j=1}^n \overline{P}_j^{m_j-1}\frac{\sum_{k=1}^n(-1)^{k-1}\overline{P_k dP_{[k]}}\wedge d\zeta}{||P||^{2|m|}}\right| \leq CR^{deg(Q)+(n-1)D+n-\delta(|m|+n-1)}$$

(on rappelle que le volume de la sphère de rayon R est en $O(R^{2n-1})$). Ces inégalités montrent, si l'on fait tendre R vers l'infini, que

$$c_m(P;Q) = 0$$

dès que $\delta|m| > deg(Q) + (n-1)(D-d) + n$. Il en résulte que

$$u \mapsto < \overline{\partial}\left(\frac{1}{P-u}\right), QdX >$$

est bien un polynôme en u, de degré au plus

$$\left[\frac{deg(Q) + (n-1)(Max(deg(P_j)) - \delta_0) + n}{\delta}\right] - n + 1.$$

Si l'on choisit le meilleur exposant possible pour δ, soit l'exposant de Lojasiewicz δ_0, on a non seulement prouvé que les fonctions définies dans (3.50) étaient des polynômes en u, mais on a aussi prouvé l'assertion finale de la proposition 3.10.

(ii) implique (iii). Considérons un zéro commun ξ de $P_1, \ldots, P_n$ (il en existe par hypothèse). Dans une boule de rayon η assez petit, on peut écrire, en utilisant la formule (3.22) et le calcul sous forme de résidus des intégrales qui figurent au membre de droite de cette formule (ceux que l'on a effectué lors de la preuve de (3.27)), pour tout polynôme Q, pour tout $z \in B(\xi, \eta)$,

$$Q(z) = \sum_{m \in (\mathbf{N}^*)^n} Res_{P,\xi}^{[m]}(QJ(z,\cdot))P_1^{m_1-1}(z)\cdots P_n^{m_n-1}(z). \tag{3.57}$$

Soit maintenant un point ξ' de $V(P)$ différent de ξ et $\eta' > 0$ tel que $\overline{B(\xi,\eta)} \cap \overline{B(\xi',\eta')} = \emptyset$. On peut de plus supposer que η' est le seul zéro de P au voisinage de $\overline{B(\xi',\eta')}$. Si z est dans la boule de rayon η et satisfait de plus

$$\|P(z)\| < Min\{\|P(\zeta)\|, \|\zeta - \xi'\| = \eta'\},$$

on a

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^{n(n-1)/2}(n-1)!}{(2i\pi)^n}\int_{\|\zeta-\xi'\|=\eta'} J_0(z,\zeta)\frac{\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1}\overline{P_k}d\overline{P_{[k]}} \wedge d\zeta}{< \overline{P}, P - P(z) >^n} &= \\ = \sum_{m\in(\mathbf{N}^*)^n} Res_{P,\xi'}^{[m]}(J(z,\cdot))P_1^{m_1-1}(z)\cdots P_n^{m_n-1}(z).\end{aligned} \tag{3.58}$$

Comme lors de la preuve des formules (3.46) et (3.47), on voit qu'il existe des fonctions $\theta_j(\xi,\xi';\cdot,\cdot)$ holomorphes au voisinage de $\overline{B(\xi,\eta)} \times \overline{B(\xi',\eta')}$ telles que, dans ce voisinage

$$J_0(z,\zeta) = \sum_{j=1}^n \theta_j(\xi,\xi';z,\zeta)(P_j(\zeta) - P_j(z)). \tag{3.59}$$

En reportant (3.59) dans l'intégrant figurant au membre de gauche de (3.58), on obtient, pour $z \in B(\xi,\eta)$,

$$0 = \sum_{m\in(\mathbf{N}^*)^n} Res_{P,\xi'}(Q)P_1(z)^{m_1-1}\cdots P_n(z)^{m_n-1}. \tag{3.60}$$

En ajoutant (3.57) et toutes les identités (3.60) aux différents points ξ' de $V(P)$ différents de ξ, on trouve, toujours pour $z \in B(\xi, \eta)$,

$$Q(z) = \sum_{m \in (\mathbf{N}^*)^n} < \overline{\partial}(1/P^m), Q(X)J_0(z,X)dX > P_1(z)^{m_1-1} \cdots P_n(z)^{m_n-1}. \qquad (3.61)$$

On spécialise maintenant Q en prenant $Q(z) = z_j^M$, $j = 1, \ldots, n$, où

$$M := \sum deg(P_j) - n + 1.$$

L'hypothèse (ii) implique, que, pour $|m|$ suffisamment grand, pour $1 \leq j \leq n$, on a

$$< \overline{\partial}(1/P^m), X_j^M J_0(Y,X)dX > \equiv 0$$

(comme polynôme en Y). En effet, les nombres

$$< \overline{\partial}(1/P^m), X_j^M J_\alpha(X)dX >$$

sont les coefficients du développement en série de puissances de u de

$$< \overline{\partial}\left(\frac{1}{P-u}\right), X_j^M J_\alpha(X)dX >, \qquad (3.61)$$

nuls pour $|m|$ suffisamment grand puisque (3.61) est, pour chaque j et pour tout α, un polynôme en u. Pour voir cela, on peut par exemple utiliser la loi de transformation dans $\mathbf{C}^{2n}_{(\zeta,u)}$. Pour $m \in (\mathbf{N}^*)^n$, on utilise pour cela la loi de transformation globale appliquée aux applications F et G

$$F^{[m]}(\zeta,u) := (u_1^{m_1}, \ldots, u_n^{m_n}, P_1(\zeta) - u_1, \ldots, P_n(\zeta) - u_n),$$

$$G^{[m]}(\zeta,u) := (u_1^{m_1}, \ldots, u_n^{m_n}, P_1(\zeta)^{m_1}, \ldots, P_n(\zeta)^{m_n}).$$

Les calculs effectués lors de la preuve de la proposition 3.6 (pris cette fois dans un contexte global et non plus local) montrent bien que, pour tout $\alpha \in \mathcal{J}$, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\frac{\partial^{|m|-n}}{\partial u^{m-\underline{1}}}\left(< \overline{\partial}\left(\frac{1}{P-u}\right), X_j^M J_\alpha(X)dX >\right) = (m-\underline{1})! < \overline{\partial}(1/P^m), X_j^M J_\alpha(X)dX > .$$

Il existe donc des polynômes $\mathcal{Q}_{\alpha,j}, \alpha \in \mathcal{J}, 1 \leq j \leq n$, tels que, pour tout z dans $B(\xi,\eta)$,

$$z_j^M = \sum_{\alpha \in \mathcal{J}} \mathcal{Q}_{\alpha,j}(P(z))z^\alpha. \qquad (3.62)$$

Mais les identités (3.62) sont des identités polynomiales, valables dans $\mathbf{C}^n$ tout entier. Puisque pour tout $\alpha \in \mathcal{J}$, on a $|\alpha| \leq M - 1 = \sum deg(P_j) - n = deg(J_0)$, on voit, du fait des identités polynomiales (3.62), que $\mathbf{K}[X_1, \cdots, X_n]$ est un $\mathbf{K}[P_1, \ldots, P_n]$ de type fini. C'est l'assertion (iii).

(iii) implique (i). Si $\mathbf{K}[X_1, \ldots, X_n]$ est un $\mathbf{K}[P_1, \ldots, P_n]$ module de type fini, les X_j satisfont des équations de dépendance intégrale sur $\mathbf{K}[P_1, \ldots, P_n]$. Plus précisément, il existe, pour chaque $j \in \{1, \ldots, n\}$, un entier $N_j > 0$ et des polynômes $A_{j,k}$, $k = 1, \ldots, N_j$, de $\mathbf{K}[X_1, \ldots, X_n]$ tels que

$$X_j^{N_j} + \sum_{k=1}^{N_j} A_{j,k}(P(X)) X_j^{N_j - k} \equiv 0. \tag{3.63}$$

Si l'on écrit (3.63) sous la forme

$$X_j^{N_j} - \sum_{k=1}^{N_j} A_{j,k}(0) X_j^{N_j - k} = \sum_{k=1}^{N_j - k} B_{j,k}(P(X)) X_j^{N_j} \tag{3.64}$$

où les $B_{j,k}$ sont sans terme constant. Ces identités impliquent l'existence de constantes strictement positives K, C, q, telles que, pour $\|z\| \geq K$,

$$\|z\| \leq C \|P(z)\|^q.$$

Cette inégalité implique la propreté de P (il suffit de prendre $\delta = 1/q$). Ceci achève la preuve de $(i) \Longrightarrow (ii)$ et achève la preuve circulaire de la proposition. $\diamondsuit$

Remarque. Il existe un moyen direct de montrer que (iii) implique (ii). On part des formules (3.63) que l'on écrit, en introduisant des paramètres $(u_1, \ldots, u_n)$, sous la forme

$$X_j^{N_j} - \sum_{k=1}^{N_j - k} A_{j,k}(u) X_j^{N_j - k} \equiv \sum_{k=1}^{n} \mathcal{B}_{j,k}(u, X)(P_k(X) - u_k).$$

Si nous notons $Q_j(u, X)$ le polynôme

$$X^{N_j} - \sum_{k=1}^{N_j - k} A_{j,k}(u) X_j^{N_j - k},$$

et $D(u, X)$ le déterminant de la matrice des $\mathcal{B}_{j,k}$, on voit que, pour tout polynôme Q,

$$\begin{aligned} &< \overline{\partial} \left(\frac{1}{P - u} \right), Q dX >= \\ &=< \bigwedge_{j=1}^{n} \overline{\partial}_{X_j} \left(\frac{1}{Q_j(u, X_j)} \right), D(u, X) Q(X) dX >, \end{aligned}$$

expression que l'on calcule aisément en développant $D(u,X)Q$ suivant les puissances de X et en utilisant le fait que

$$< \bigwedge_{j=1}^{n} \overline{\partial}_{X_j} \left(\frac{1}{Q_j(u,X_j)} \right), X^{\beta} dX >= \prod_{j=1}^{n} Res_{Q_j(u,\cdot)}(t^{\beta_j}).$$

Ce calcul se ramène à des calculs de résidus globaux à une variable (comme au chapitre 1) et nous montre immédiatement que

$$u \mapsto < \overline{\partial} \left(\frac{1}{P-u} \right), Q(X)dX >$$

est bien un polynôme en u. Notons que la preuve de ce résultat présentée dans cette remarque évite le recours aux formules de Bochner-Martinelli, et, de ce fait, pourra s'étendre à un contexte algébrique plus général.

On terminera cette section en donnant, dans le cas des applications polynomiales propres, une formule de représentation (ou de division avec reste explicite) globale.

Proposition 3.12 (Formule de Cauchy-Weil, version globale). *Soit $(P_1,\dots,P_n)$ n polynômes de n variables à coefficients dans un sous corps $\mathbf{K}$ de $\mathbf{C}$. On suppose que P est une application polynomiale propre, d'exposant de Lojasiewicz δ_0. Pour $\delta > 0$ et $k \in \mathbf{N}$, on note*

$$\mathcal{K}_P(\delta,k) := \left[\frac{k + (2n-1)(Max(deg(P_j)) - \delta)}{\delta} \right] + 1.$$

Soit J_0 le Bezoutien de $(P_1,\dots,P_n)$. Tout polynôme Q de degré inférieur à k se représente (dans $\mathbf{K}[X_1,\dots,X_n]$) sous la forme

$$Q = \sum_{m \in (\mathbf{N}^*), |m| \leq \mathcal{K}_P(\delta_0,k)} < \overline{\partial}(1/P^m), Q(X) J_0(\cdot,X) dX > P_1^{m_1-1} \cdots P_n^{m_n-1}. \tag{3.65}$$

Preuve. On utilise la formule (3.61), à priori valable au voisinage d'un zéro ξ de P. Puisque P est propre, la série au membre de droite de (3.61) se tronque, et l'on obtient, compte tenu de la dernière assertion de la proposition 3.11, l'identité (3.65) voulue. $\diamondsuit$

Corollaire 3.12. *Soit $P = (P_1,\dots,P_n)$ une application polynomiale propre d'exposant de Lojasiewicz δ_0 et Q un élément de $\mathbf{K}[X_1,\dots,X_n]$ de degré au plus k appartenant à l'idéal $(P_1,\dots,P_n)$. Il existe des polynômes Q_j de $\mathbf{K}[X_1,\dots,X_n]$ de degré au plus*

$$Max_j(deg(P_j))(\mathcal{K}_P(\delta_0,k) + n) - n$$

tels que

$$Q = \sum_{j=1}^{n} Q_j P_j. \tag{3.66}$$

Ces polynômes sont donnés par la formule

$$Q = \sum_{m\in(\mathbf{N}^*)^n,\, n<|m|\leq \mathcal{K}_P(\delta_0,k)} < \overline{\partial}(1/P^m), Q(X)J_0(\cdot,X)dX > P_1^{m_1-1}\cdots P_n^{m_n-1}. \quad (3.67)$$

Preuve. C'est immédiat. On écrit la formule (3.65) et on utilise la proposition 3.1 pour affirmer, comme $Q \in (P_1,\dots,P_n)$, que

$$< \overline{\partial}(1/P), Q(X)J_0(\cdot,X)dX > \equiv 0,$$

ce qui fait que (3.65) se réduit bien à (3.67); c'est évidemment une formule du type (3.66) avec les estimations de degré correspondantes. $\diamondsuit$

Compte tenu du fait que l'on ait étendu (dans la remarque suivant la définition 3.8) l'action du résidu global aux fractions rationnelles, on peut aussi résoudre dans ce contexte l'identité de Bezout.

Proposition 3.13. *Soient $(P_0,\dots,P_n)$ n polynômes en n variables, à coefficients dans $\mathbf{K}$, sans zéro commun dans $\mathbf{C}^n$. On suppose que l'application $\tilde{P} := (P_1,\dots,P_n)$ est propre, d'exposant de Lojasiewicz δ_0. On suppose que l'on dispose de polynômes $Q_{j,k}\in\mathbf{K}[X,Y]$, $0\leq j\leq n+1$, $1\leq k\leq n$, tels que*

$$P_j(X) - P_j(Y) = \sum_{k=1}^n Q_{j,k}(X,Y)(X_k - Y_k),\ 1\leq k\leq n$$

(par exemple ceux qui apparaissent dans les calculs de Bezoutiens). On a alors l'identité

$$1 =< \overline{\partial}(1/\tilde{P})(X), \frac{1}{P_0(X)} \begin{vmatrix} Q_{1,1}(\cdot,X) & \cdot & \cdot & \cdot & Q_{n,1}(\cdot,X) & Q_{0,1}(\cdot,X) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Q_{1,n}(\cdot,X) & \cdot & \cdot & \cdot & Q_{n,n}(\cdot,X) & Q_{0,n}(\cdot,X) \\ P_1 & P_2 & \cdot & \cdot & P_n & P_0 \end{vmatrix} dX > +$$

$$+ \sum_{m\in(\mathbf{N}^*)^n,\, n<|m|\leq \mathcal{K}_{\tilde{P}}(\delta_0,0)} < \overline{\partial}(1/\tilde{P}^m), Q(X)J_0(\cdot,X)dX > P_1^{m_1-1}\cdots P_n^{m_n-1}. \quad (3.68)$$

Preuve. On écrit la formule (3.67) pour la fonction 1 avec l'application propre $\tilde{P}$. Seul le premier terme de la somme ($m = \underline{n}$) est à reconsidérer, on laisse les autres en l'état. En soustrayant à la dernière ligne $\mathcal{L}_{n+1}$ de la matrice ci dessous la combinaison de lignes

$$(Y_1 - X_1)\mathcal{L}_1 + \cdots + (Y_n - X_n)\mathcal{L}_n,$$

on obtient

$$\begin{vmatrix} Q_{1,1}(Y,X) & \cdot & \cdot & \cdot & Q_{n,1}(Y,X) & Q_{0,1}(Y,X) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Q_{1,n}(Y,X) & \cdot & \cdot & \cdot & Q_{n,n}(Y,X) & Q_{0,n}(\cdot,X) \\ P_1(Y)-P_1(X) & \cdot & \cdot & \cdot & P_n(Y)-P_n(X) & P_0(Y) \end{vmatrix} = J_0(Y,X)P_0(X).$$

On a donc,

$$
\begin{aligned}
&< \overline{\partial}(1/P), J_0(\cdot,X)dX >= \\
&=< \overline{\partial}(1/P), \frac{1}{P_0(X)} \begin{vmatrix} Q_{1,1}(\cdot,X) & \cdot & \cdot & \cdot & Q_{n,1}(\cdot,X) & Q_{0,1}(\cdot,X) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Q_{1,n}(\cdot,X) & \cdot & \cdot & \cdot & Q_{n,n}(\cdot,X) & Q_{0,n}(\cdot,X) \\ P_1 - P_1(X) & \cdot & \cdot & \cdot & P_n - P_n(X) & P_0 \end{vmatrix} dX >= \\
&=< \overline{\partial}(1/P), \frac{1}{P_0(X)} \begin{vmatrix} Q_{1,1}(\cdot,X) & \cdot & \cdot & \cdot & Q_{n,1}(\cdot,X) & Q_{0,1}(\cdot,X) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Q_{1,n}(\cdot,X) & \cdot & \cdot & \cdot & Q_{n,n}(\cdot,X) & Q_{0,n}(\cdot,X) \\ P_1 & \cdot & \cdot & \cdot & P_n & P_0 \end{vmatrix} dX >,
\end{aligned}
$$

(toujours en utilisant la proposition 3.1), d'où l'identité (3.68). $\diamondsuit$

3.3. Une approche algébrique abstraite.

Nous allons présenter dans cette section une approche algébrique de la notion de résidu que nous venons d'introduire dans les précédentes sections. Cette approche est empruntée au travail de J. Lipman ([Lip, chapitre 3], [Hop]) et la présentation que nous en faisons ici est due à M. Hickel.

On considère un anneau noethérien $\mathbf{R}$ et une suite régulière $(f_1, \ldots, f_m)$ dans cet anneau. Pour plus de simplicité, on supposera ici le système $(f_1, \ldots, f_n)$ normal, c'est à dire la suite régulière quelque soit l'ordre dans lequel on en prend les termes (dans un anneau local, ceci est vrai pour n'importe quelle suite régulière). La régularité de la suite implique que pour toute suite $(u_1, \ldots, u_m)$ telle que

$$\sum_{j=1}^{m} u_j f_j = 0,$$

on a, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$u_j = \sum_{k=1}^{m} u_{j,k} f_k,$$

où les $u_{j,k}$ sont des éléments de $\mathbf{R}$. On note $\mathbf{I}$ l'idéal engendré par les $a_k, k = 1, \ldots, m$. On introduit la valuation $\mathbf{I}$-adique sur $\mathbf{R}$ définie par

$$v_{\mathbf{I}}(x) = sup\left(\{k;\, x \in \mathbf{I}^k\}\right)$$

et la pseudo distance correspondante

$$d(x,y) = exp(-v_{\mathbf{I}}(x-y));$$

le complété de $\mathbf{R}$, espace topologique dont la topologie est définie par cette pseudo distance (c'est bien une distance lorsque l'intersection de tous les $\mathbf{I}^k$ est réduite à 0), est appelé *complété* $\mathbf{I}$-*adique de* $\mathbf{R}$; on le note $\widehat{\mathbf{R}}$. L' anneau $\mathbf{R}$ se plonge naturellement dans son complété. Si σ est une section de $\mathbf{P} = \mathbf{R}/\mathbf{I}$, soit une application de $\mathbf{R}/\mathbf{I}$ dans $\mathbf{R}$ telle que

$$\pi \circ \sigma = Id_{\mathbf{R}/\mathbf{I}}$$

(où π est la projection canonique de $\mathbf{R}$ dans le quotient $\mathbf{R}/\mathbf{I}$), on voit qu'il existe, pour tout r dans $\mathbf{R}$, une unique famille r_β, $\beta \in \mathbf{N}^n$, d'éléments de $\mathbf{P}$ telle que

$$r = \sum_\beta \sigma(r_\beta) f_1^{\beta_1} \cdots f_m^{\beta_m}, \tag{3.69}$$

la convergence de la série ayant lieu dans le complété $\widehat{\mathbf{R}}$. L'existence d'un tel développement en série est une conséquence de la définition du complété (tout point de $\widehat{\mathbf{R}}$ est limite d'une suite de Cauchy). L'unicité des r_β résulte du fait que la suite $(f_1, \ldots, f_m)$ est régulière.

Considérons maintenant un anneau $\mathbf{A}$ et un homomorphisme d'anneaux commutatifs de $\mathbf{A}$ dans $\mathbf{R}$. Nous allons associer, une fois que σ et $\mathbf{A}$ ont été fixés, avec de plus σ $\mathbf{A}$-linéaire, une application

$$r \mapsto r^\sharp$$

de $\mathbf{R}$ dans la $\mathbf{A}$-algèbre $\mathbf{E}[[f_1, \ldots, f_m]]$, où $\mathbf{E} := Hom_{\mathbf{A}}(\mathbf{P}, \mathbf{P})$ ($\mathbf{P}$ est naturellement équipé d'une structure de $\mathbf{A}$-module par

$$a \cdot \alpha := \pi(h(a)) \cdot \alpha, \; a \in \mathbf{A}, \, \alpha \in \mathbf{P}).$$

Pour définir $r^\sharp$, on procède ainsi. Pour tout $\alpha \in \mathbf{P}$, on peut écrire

$$r.\sigma(\alpha) = \sum_{\beta \in \mathbf{N}^n} \sigma(\Phi_\beta(r; \alpha)) f_1^{\beta_1} \cdots f_m^{\beta_m},$$

où les $\Phi_\beta(r; \alpha)$ sont des éléments de $\mathbf{P}$ déterminés de manière unique grâce à l'hypothèse de régularité faite sur la suite $(f_1, \ldots, f_m)$. Pour $\beta \in \mathbf{N}^n$ et $r \in \mathbf{R}$ fixés, l'application

$$\alpha \mapsto \Phi_\beta(r; \alpha)$$

est, d'après la $\mathbf{A}$-linéarité de σ, un homomorphisme de $\mathbf{A}$ modules de $\mathbf{P}$ dans $\mathbf{P}$. On notera cet homomorphisme $\Phi_\beta(r)$ et l'on posera

$$r^\sharp := \sum_{\beta \in \mathbf{N}^n} \Phi_\beta(r) f_1^{\beta_1} \cdots f_m^{\beta_m}. \tag{3.70}$$

Cette définition est indépendante de σ (toujours grâce à l'unicité des r_β dans (3.69), conséquence de la régularité de la suite $(f_1, \ldots, f_m)$).

Nous faisons enfin ici une dernière hypothèse, à savoir que le $\mathbf{A}$-module $\mathbf{P}$ est un module de type fini et projectif, auquel cas nous avons un morphisme trace (Tr) de $Hom_{\mathbf{A}}(\mathbf{P},\mathbf{P})$ dans $\mathbf{A}$; dans le cas où $\mathbf{A}$ est un corps, ceci consiste à associer, à tout homomorphisme du $\mathbf{A}$- espace vectoriel de dimension finie $\mathbf{P}$ dans lui même, la trace de cet homomorphisme (au sens de l'algèbre linéaire classique).

D'autre part, si $r_1,\ldots,r_m$ désignent m éléments de $\mathbf{R}$, on pose

$$Det\left(\frac{\partial r_j^\sharp}{\partial f_k}\right) := \sum_{\tau\in\mathcal{S}_m}(-1)^{\epsilon(\tau)}\frac{\partial}{\partial f_1}(r^\sharp_{\tau(1)})\cdots\frac{\partial}{\partial f_m}(r^\sharp_{\tau(m)}),$$

les dérivations formelles par rapport aux f_j étant les dérivations formelles habituelles dans la $\mathbf{A}$- algèbre $\mathbf{E}[[f_1,\ldots,f_m]]$, la multiplication entre séries formelles étant la multiplication dans cette algèbre (non commutative à priori).

Définition 3.14. *Soient* $\mathbf{R}$, $\mathbf{A}$, *et* $(f_1,\ldots,f_m)$ *comme précédemment. Soient* $r_1,\ldots,r_m,r$ $m+1$ *éléments de* $\mathbf{R}$. *On suppose que*

$$r^\sharp\cdot Det\left(\frac{\partial r_j^\sharp}{\partial f_k}\right) = \sum_{\beta\in\mathbf{N}^n}\delta_\beta(r;r_1,\ldots,r_m)f_1^{\beta_1}\cdots f_m^{\beta_m}.$$

On définit alors, pour tout $\beta\in\mathbf{N}^n$, *le symbole*

$$\begin{bmatrix} rdr_1\wedge\cdots\wedge dr_m \\ f_1^{\beta_1+1},\ldots,f_m^{\beta_m+1}\end{bmatrix}$$

par

$$\begin{bmatrix} rdr_1\wedge\cdots\wedge dr_m \\ f_1^{\beta_1+1},\ldots,f_m^{\beta_m+1}\end{bmatrix} := Tr(\delta_\beta(r;r_1,\ldots,r_m)). \tag{3.71}$$

Les symboles définis par les formules (3.71) sont indépendants du choix de σ. Dans le cas où $\mathbf{R}=\mathcal{O}_n$, ou bien $\mathbf{R}=\mathbf{K}[X_1,\ldots,X_n]$ avec $\mathbf{K}$ sous corps de $\mathbf{C}$, se donner σ revient à se donner un processus linéaire de division avec reste. Les propositions 3.4 (dans le cas local) ou 3.9 (dans le cas global) fournissent un tel processus. Par exemple, dans le cas global, si $m=n$ et $f=(P_1,\ldots,P_n)$, on pourra poser

$$\sigma(\dot{Q}) :=< \overline{\partial}(1/P)(X), QJ_0(\cdot,X)dX >, \tag{3.72}$$

le polynôme figurant à droite de (3.72) ne dépendant pas du représentant Q choisi pour $\dot{Q}$. On pourrait tout aussi bien se donner une base de Gröbner $(E_1,\ldots,E_N)$ de l'idéal et dire que $\sigma(\dot{Q})$ est le reste (une fois que l'on a appliqué l'algorithme de division relatif à cette base) d'un représentant quelconque de $\dot{Q}$. La même construction vaut dans le cas local (pour la notion de base de Gröbner, ou de bases standard, on se reportera au livre de Cox, Little et O'Shea [CLO] ou au cours de DEA de Michel Hickel (Bordeaux 1993-94)). Disons brièvement que l'on se donne un ordre total $<$ sur $\mathbf{N}^n$ et que l'on introduit, à la fois pour un élément de $\mathbf{K}[X_1,\ldots,X_n]$ et pour un idéal $\mathbf{I}$ la notion de *monôme dominant* ou d'*idéal dominant* (l'idéal dominant de $\mathbf{I}$ étant par définition l'idéal engendré par les monômes dominants de *tous* les éléments de $\mathbf{I}$). Un système de polynômes $(E_k)_{1\leq k\leq N}$ est une base de Gröbner de l'idéal si et seulement si les monômes dominants $dom_<(E_k)$ engendrent $dom_<(\mathbf{I})$. On peut démontrer que tout élément Q de $\mathbf{K}[X_1,\ldots,X_n]$ s'écrit de manière unique

$$Q = Q_1 + Q_2$$

où $Q_1 \in \mathbf{I}$ et aucun des monômes de Q_2 n'est divisible par l'un des monômes $dom_< E_k$, $1 \leq k \leq N$. On pose alors $\sigma(\dot{Q}) = Q_2$.

Le résultat que nous admettrons ici pour achever cette section est que dans les deux cas (local ou global), avec soit $(f_1,\ldots,f_n)$ suite régulière dans $\mathcal{O}_n$ dans le premier cas, soit $(P_1,\ldots,P_n)$ système normal dans $\mathbf{K}[X_1,\ldots,X_n]$ dans le second cas, on a soit

$$\begin{bmatrix} hd\zeta_1\wedge\cdots\wedge d\zeta_n \\ f_1^{\beta_1+1},\ldots,f_n^{\beta_n+1}\end{bmatrix} = Res_{f,0}^{[\beta+\underline{1}]}(h)$$

dans le premier cas, soit

$$\begin{bmatrix} QdX_1\wedge\cdots\wedge dX_n \\ P_1^{\beta_1+1},\ldots,P_n^{\beta_n+1}\end{bmatrix} =< \overline{\partial}(1/P^{\beta+\underline{1}}(X)), Q(X)dX >$$

dans le second. Ce résultat est démontré dans [Lip, chapitre 3]. Il nous permet de calculer l'action du résidu (que ce soit dans le cadre local ou dans le cadre global) à partir de n'importe quel algorithme explicite de division avec reste. Ainsi, comme nous l'avons mentionné à la fin de la section 3.1, tout calcul de résidu correspond il au calcul de la trace d'un certain opérateur de l'algèbre quotient.

Ce résultat nous permet aussi d'étendre la formule (3.65) à un cadre plus général. Supposons que $(P_1,\ldots,P_n)$ (où les P_j sont des éléments de $\mathbf{K}[X_1,\ldots,X_n]$, avec $\mathbf{K}$ corps commutatif) soit une application polynomiale propre (au sens où $\mathbf{K}[X_1,\ldots,X_n]$ est un module de type fini sur $\mathbf{K}[P_1,\ldots,P_n]$). On peut alors vérifier que quelque soit l'ordre, la suite $(P_1-u_1,\ldots,P_n-u_n)$ est régulière dans $\mathbf{K}(u)[X_1,\ldots,X_n]$, ce qui permet d'introduire les symboles résiduels

$$\begin{bmatrix} QdX_1\wedge\cdots\wedge dX_n \\ P_1-u_1,\ldots,P_n-u_n\end{bmatrix} \in \mathbf{K}(u).$$

Le fait que P soit propre se traduit, comme dans le cas où $\mathbf{K}\subset\mathbf{C}$, par le fait que cet élément est un élément de $\mathbf{K}[u]$, que l'on notera $\mathcal{P}_Q$. Si l'on écrit le Bezoutien de $(P_1,\ldots,P_n)$ sous la forme

$$J_0(Y,X) = \sum_{\alpha\in\mathcal{J}} J_\alpha(X)Y^\alpha$$

tout polynôme $Q\in\mathbf{K}[X_1,\ldots,X_n]$ se représente sous la forme

$$Q(Y) = \sum_{\alpha\in\mathcal{J}} Y^\alpha \mathcal{P}_{QJ_\alpha}(P_1(Y),\ldots,P_n(Y)). \tag{3.73}$$

Ceci résulte de la formule de Cauchy

$$Q(Y) = \left[\begin{matrix} QdX_1 \wedge \cdots \wedge dX_n \\ X_1 - Y_1, \ldots, X_n - Y_n \end{matrix} \right]$$

à laquelle on a fait subir la loi de transformation. On évoquera dans le chapitre suivant les questions relatives au degré des polynômes $\mathcal{P}_H$, $H \in \mathbf{K}[X_1, \ldots, X_n]$.

4. ASPECTS GEOMETRIQUES DE LA THEORIE DES RESIDUS.

4.1. Chaines, Cycles, formule de Stokes et théorème de De Rham.

Dans tout ce qui suit, on considère une variété analytique complexe $\mathcal{X}$ de dimension complexe n, soit de dimension réelle $2n$, que l'on suposera orientée. Si $p \leq 2n$, on appelle *p-chaine élémentaire* (ou encore *simplexe*) γ tout couple (Δ_p, g), où g est une application de classe $\mathcal{C}^1$ (respectant les orientations, $\mathbf{R}^p$ étant équipé de son orientation usuelle) du simplexe standard de $\mathbf{R}^p$

$$\Delta_p := \{t \in (\mathbf{R}^+)^p, \ \sum_{j=1}^{p} t_j \leq 1\}$$

dans $\mathcal{X}$. La donnée d'un triplet (Δ_p, g, ϵ) où $\epsilon = \pm 1$ correspond à la donnée d'une *chaine élémentaire orientée*. On appelle *face* de la chaine élémentaire γ toute paire $(\delta, g_{|\delta})$, où δ est l'une des faces du simplexe Δ_p. En composant avec une application affine appropriée de $\mathbf{R}^p$ dans lui même, on voit que toute face d'une p-chaine élémentaire correspond à une $p-1$-chaine élémentaire. De plus, le choix d'une orientation sur une p-chaine élémentaire induit une orientation sur chaque face de cette chaine. On sait en effet qu'une orientation de $\mathbf{R}^p$ induit une orientation sur chaque face du simplexe Δ_p. Puisque ce qui nous intéressera ultérieurement sera l'intégration des formes différentielles sur le simplexe orienté (Δ_p, g, ϵ), disons que l'on conviendra, sur chaque face δ de ce simplexe orienté (par le choix de ϵ), du choix d'une orientation ϵ_δ de manière à ce que pour toute forme p forme différentielle dans un voisinage (dans $\mathcal{X}$) de $g(\Delta_p)$, de classe $\mathcal{C}^1$ dans ce voisinage:

$$\sum \int_{(\delta, g_{|\delta}, \epsilon_\delta)} \omega := \epsilon \int_{\Delta_p} d(g^* \omega),$$

l'intégration des formes dans un ouvert de $\mathbf{R}^p$ étant celle qui est imposée par

$$\int_{\Delta_p} dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_p > 0.$$

Etant donné un simplexe orienté σ, on notera $\mathcal{F}(\sigma)$ la collection des simplexes orientés correspondant aux faces de σ avec leur orientation induite par celle de σ.

L'ensemble des combinaisons linéaires formelles

$$\sum_{\tau \in \mathcal{T}} m_\tau \sigma_\tau, \tag{4.1}$$

où $\mathcal{T}$ est un ensemble fini, les m_τ des entiers relatifs et les σ_τ des chaines élémentaires orientées, est naturellement équipé d'une structure de groupe commutatif (pour l'addition des combinaisons formelles). Ce groupe est le *groupe des p-chaines* sur $\mathcal{X}$; on le note $\mathbf{C}_p(\mathcal{X}, \mathbf{Z})$; la présence de $\mathbf{Z}$ dans les notations signifie que l'on prend des coefficients entiers dans les combinaisons (4.1); on pourrait tout aussi bien prendre des coefficients réels ou même complexes et définir ainsi les groupes $\mathbf{C}_p(\mathcal{X}, \mathbf{R})$, $\mathbf{C}_p(\mathcal{X}, \mathbf{C})$.

L'opérateur *bord* est un homomorphisme de groupes de $\mathbf{C}_p(\mathcal{X}, \mathbf{Z})$ dans $\mathbf{C}_{p-1}(\mathcal{X}, \mathbf{Z})$ défini comme suit:

$$\partial\left(\sum_{\tau\in\mathcal{T}} m_\tau \sigma_\tau\right) := \sum_{\tau\in\mathcal{T}} m_\tau \left(\sum_{\delta\in\mathcal{F}(\sigma_\tau)} \delta\right).$$

On dispose ainsi de la suite d'homologie $\mathbf{C}_*(\mathcal{X}, \mathbf{Z})$

$$\cdots \to \mathbf{C}_p(\mathcal{X}, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\partial} \mathbf{C}_{p-1}(\mathcal{X}, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\partial} \cdots,$$

suite dont le défaut d'éxactitude est mesuré par la connaissance de la suite des groupes d'homologie

$$\mathbf{H}_p(\mathcal{X}, \mathbf{Z}) = \frac{\{\sigma \in \mathbf{C}_p(\mathcal{X}, \mathbf{Z}), \partial\sigma = 0\}}{\partial\{\mathbf{C}_{p+1}(\mathcal{X}, \mathbf{Z})\}} = \frac{\mathbf{Z}_p(\mathcal{X}, \mathbf{Z})}{\mathbf{B}_p(\mathcal{X}, \mathbf{Z})}, \ p \geq 1$$

(soit le quotient du *groupe des p-cycles* par le *groupe des p-bords*). On peut de manière analogue définir les groupes d'homologie $\mathbf{H}_p(\mathcal{X}, \mathbf{R})$ ou $\mathbf{H}_p(\mathcal{X}, \mathbf{C})$.

On peut aussi définir sur $\mathcal{X}$ les suites de cohomologie de De Rham et de Dolbeault. Pour cela, nous introduisons les espaces $\mathbf{C}^p(\mathbf{X})$ des p-formes différentielles à coefficients $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{X}$ et l'opérateur d de dérivation des formes. On a ainsi le complexe de De Rham $\mathbf{C}^*(\mathcal{X})$,

$$\cdots \to \mathbf{C}^p(\mathcal{X}) \xrightarrow{d} \mathbf{C}^{p+1}(\mathcal{X}) \xrightarrow{d} \cdots,$$

dont le défaut d'exactitude est cette fois mesuré par la connaissance de la suite des groupes de cohomologie

$$\mathbf{H}^p(\mathcal{X}) = \frac{\{\omega \in \mathbf{C}^p(\mathcal{X}), d\omega = 0\}}{d\{\mathbf{C}^{p-1}(\mathcal{X})\}}, p \geq 1.$$

On peut aussi introduire les espaces $\mathbf{C}^{p,q}(\mathbf{X})$ des (p,q) formes différentielles à coefficients $\mathcal{C}^\infty$ et l'opérateur $\overline{\partial}$. On a, pour p fixé, la ligne horizontale $\mathbf{C}^{p,*}(\mathcal{X})$ du complexe de Dolbeault

$$\cdots \to \mathbf{C}^{p,q}(\mathcal{X}) \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathbf{C}^{p,q+1}(\mathcal{X}) \xrightarrow{\overline{\partial}} \cdots$$

Il sera important pour nous de savoir que les groupes d'homologie $H_p(\mathcal{X})$ d'une variété analytique complexe dite de Stein (voir [Hörm, Def. 5.1.1 et Théorème 5.2.7]) sont nuls dès que $p > dim_{\mathbf{C}}(\mathcal{X})$. En ce qui concerne $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ (qui n'est pas de Stein), les groupes de cohomologie sont nuls pour $p > dim_{\mathbf{R}}(\mathbf{P}^n(\mathbf{C})) = 2n$ (ceci est d'ailleurs toujours le cas pour une variété $\mathcal{X}$ quelconque pour des raisons de dimension, toute k forme sur $\mathcal{X}$ avec $k > dim_{\mathbf{R}}(\mathcal{X})$ étant automatiquement nulle). On peut, dans le cas de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, préciser les choses: pour p impair, $\mathbf{H}^p(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$ est nul; pour p pair inférieur ou égal à $2n$ (inclus), $\mathbf{H}^p(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$ est isomorphe (en tant que $\mathbf{C}$-espace vectoriel) à $\mathbf{C}$ (on trouvera une preuve de ce résultat dans ([Yger], lemme 3.1.1)). On verra ultérieurement ce qui ce passe pour une classe de variétés pour nous intéressante, les variétés toriques (voir le livre de Fulton [Fult]).

Les groupes d'homologie et de cohomologie sont liés via le théorème de De Rham. Il est immédiat de constater (comme conséquence du théorème de Stokes sur la variété $\mathcal{X}$) qu'à tout $\omega \in \mathbf{H}^p(\mathcal{X})$, on peut associer un homomorphisme T_ω de $\mathbf{H}_p(\mathcal{X}, \mathbf{C})$ dans $\mathbf{C}$ défini par

$$T_\omega(h) := \int_\alpha \omega,$$

où α est un représentant de h, l'intégration se faisant en respectant les orientations attachées aux simplexes σ_τ impliquées dans l'écriture du cycle α. On a le

Théorème 4.1 (De Rham). *L'application $\omega \mapsto T_\omega$ réalise un isomorphisme $\mathbf{C}$ linéaire entre $\mathbf{H}^p(\mathcal{X})$ et le dual (en temps que $\mathbf{C}$ espace vectoriel) de $\mathbf{H}_p(\mathcal{X}, \mathbf{C})$.*

Preuve. On se reportera à [DeRham]. $\diamondsuit$

4.2. Le morphisme cobord de Leray et la division des formes.

Le problème que nous nous proposons de traiter dans cette section est le suivant: donnés une variété analytique $\mathcal{X}$, un fermé $\mathcal{S}$ de cette variété, un cycle $\gamma \in \mathbf{Z}_p(\mathcal{X} \setminus \mathcal{S})$ *, et une p-forme ϕ, régulière et d-fermée dans $\mathcal{X} \setminus \mathcal{S}$, mais sigulière sur $\mathcal{S}$, on aimerait pouvoir calculer (ou au moins exprimer différemment) l'intégrale

$$\int_\gamma \phi. \tag{4.2}$$

Il est clair (toujours via Stokes) que l'intégrale (4.2) ne dépend que de la classe d'homologie de γ dans $\mathbf{H}_p(\mathcal{X} \setminus \mathcal{S})$ et de la classe de cohomologie de ϕ dans $\mathbf{H}^p(\mathcal{X} \setminus \mathcal{S})$. La question est de savoir, dans le cas où $\mathcal{S}$ a aussi une structure de variété analytique, si l'on sait construire un morphisme *cobord*

$$\delta_p : \mathbf{H}_p(\mathcal{S}) \mapsto \mathbf{H}_{p+1}(\mathcal{X} \setminus \mathcal{S}),$$

couplé avec un morphisme *résiduel*

$$Res_p : \mathbf{H}^{p+1}(\mathcal{X} \setminus \mathcal{S}) \mapsto \mathbf{H}^p(\mathcal{S}),$$

de manière à ce que, pour tout représentant γ de $\delta_p(\sigma)$, où $\sigma \in \mathbf{Z}_p(\mathcal{S})$ et pour tout représentant ψ de $Res_p(\phi)$, on puisse écrire

$$\int_\gamma \phi = (2i\pi) \int_\sigma \psi, \tag{4.3}$$

ce qui serait une généralisation de la méthode de calcul d'intégrales par la formule des résidus.

---

* Dans toute cette section, on pensera à l'homologie à coefficients dans $\mathbf{Z}$, mais l'on pourrait tout aussi bien penser en termes d'homologie à coefficients dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

Nous allons construire δ_p et Res_p dans le cas où $\mathcal{S}$ est une hypersurface complexe lisse de $\mathcal{X}$. Ceci signifie que $\mathcal{S}$ est définie localement par une application holomorphe s avec $ds \neq 0$ sur $\mathcal{S}$. Cette condition implique l'existence d'une rétraction d'un certain voisinage tubulaire de $\mathcal{S}$ sur $\mathcal{S}$ elle même (il suffit de redresser la situation localement et de se ramener au cas où $\mathcal{S}$ est la trace de l'hyperplan $\zeta_1 = 0$ dans une boule de centre l'origine dans $\mathbf{C}^n$, $n := dim_{\mathbf{C}}(\mathcal{X})$).

Définition 4.2. *Dans la situation ci dessus, le morphisme δ_p de $\mathbf{H}_p(\mathcal{S})$ dans $\mathbf{H}_{p+1}(\mathcal{X}\setminus\mathcal{S})$ est défini de la manière suivante: étant donné un cycle $\sigma \in \mathbf{Z}_p(\mathcal{S})$ (de classe d'homologie h dans $\mathbf{H}_p(\mathcal{S})$), un cycle $\gamma \in \mathbf{Z}_{p+1}(\mathcal{X} \setminus \mathcal{S})$ sera dans la classe d'homologie de $\delta_p(h)$ si et seulement si il existe un cycle $\tau \in \mathbf{Z}_p(\mathcal{S})$, homologue à σ dans $\mathbf{H}_p(\mathcal{S})$ et un cycle $\tilde{\tau} \in \mathbf{Z}_{p+2}(\mathcal{X})$, tels que d'une part γ soit homologue à $\partial\tilde{\tau}$ dans $\mathbf{Z}_{p+1}(\mathcal{X} \setminus \mathcal{S})$, d'autre part que le support du cycle $\tilde{\tau}$ (c'est à dire l'union des images des $g(\Delta_{p+2})$ intervenant dans les simplexes élémentaires en jeu dans l'écriture de $\tilde{\tau}$) intersecte géométriquement la variété lisse $\mathcal{S}$ suivant le support du cycle τ, et ce de manière transverse. L'orientation de σ induit une orientation de τ, donc de $\tilde{\tau}$ (une fois qu'une orientation a été choisie sur $\mathcal{X}$); cette orientation induit une orientation sur $\partial\tilde{\tau}$, donc sur γ.*

Remarque. C'est l'existence de la rétraction qui nous permet, étant donné un simplexe élémentaire τ_0 dans $\mathbf{Z}_p(\mathcal{S})$, de construire un $p+2$ simplexe $\tilde{\tau}_0$ dans $\mathbf{Z}_{p+2}(\mathcal{X})$ dont le support intersecte $\mathcal{S}$ suivant le support de τ_0, et ce de manière transverse. On peut ainsi relever tout cycle τ de $\mathbf{Z}_p(\mathcal{S})$ en un $p+2$ cycle $\tilde{\tau}$ de $\mathbf{Z}_{p+2}(\mathcal{X})$ dont le support intersecte $\mathcal{S}$ suivant le support de τ, et ce de manière transverse. Ceci justifie la cohérence de la définition proposée.

Plutôt que d'expliquer formellement la construction de Res_p (reposant sur un argument de dualité basé sur le théorème de De Rham 4.1 appliqué à la fois sur $\mathcal{S}$ et sur $\mathcal{X}\setminus\mathcal{S}$), nous allons énoncer un lemme de division des formes que nous appliquerons ensuite localement pour calculer $Res_p(\phi)$.

Lemme 4.3. *Soit U un ouvert de $\mathbf{C}^n$ et s une fonction holomorphe dans U, avec $ds \neq 0$ dans U. Soit $\phi \in \mathbf{Z}^{p+1}(U \setminus \{s = 0\})$ telle que $s^k\phi$ soit une forme $\mathcal{C}^\infty$ dans U. On peut trouver des formes $\mathcal{C}^\infty$ dans U, ψ et θ, telles que, dans U,*

$$\phi = \frac{ds}{s^k} \wedge \psi + \frac{\theta}{s^{k-1}}. \tag{4.4}$$

De plus, si $k = 1$, la restriction de la forme ψ à $\{s = 0\}$ est dans $\mathbf{Z}_p(\{s = 0\})$. On note alors $\psi_{|\{s=0\}} = Res_{\{s=0\}}\phi$.

Admettons un instant ce lemme et revenons à la situation de notre hypersurface lisse $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$. Considérons dans $\mathcal{X} \setminus \mathcal{S}$ une $p+1$ forme fermée ϕ régulière, présentant un pôle d'ordre au plus k sur $\mathcal{S}$. Ceci signifie que localement (là ou par exemple $\mathcal{S}$ est définie comme $\{s = 0\}$), il suffit de multiplier ϕ par s^k pour pouvoir la prolonger à un voisinage de $\mathcal{S}$. Soit (φ_ξ) une partition de l'unité subordonnée à un recouvrement de $\mathcal{X}$ par des ouverts ω_ξ; on suppose que $\overline{\omega}_\xi \subset \tilde{\omega}_\xi$, $Supp(\varphi_\xi) \subset \tilde{\omega}_\xi$ et $\varphi_\xi \equiv 1$ au voisinage de ω_ξ. En écrivant, lorsque $k > 1$, dans ω_ξ tel que $\omega_\xi \cap \mathcal{S} = \omega_\xi \cap \{s_\xi = 0\}$,

$$\phi\varphi_\xi = \left(\frac{ds_\xi}{s_\xi^k} \wedge \psi_\xi\right)\varphi_\xi + \frac{\theta_\xi\varphi_\xi}{s_\xi^{k-1}}$$

$$=d\left[\frac{1}{(1-k)s_\xi^{k-1}}\psi\varphi_\xi\right]+\frac{1}{(k-1)s_\xi^{k-1}}d(\psi_\xi\varphi_\xi)+\frac{\theta_\xi\varphi_\xi}{s_\xi^{k-1}} \qquad (4.5),$$

et en ajoutant toutes les identités (4.5), on voit que l'on peut trouver un représentant de ϕ (dans la même classe de cohomologie dans $\mathbf{H}^{p+1}(\mathcal{X}\setminus\mathcal{S})$) présentant un pôle d'ordre au plus $k-1$ le long de $\mathcal{S}$. On peut continuer ainsi jusqu'à trouver, toujours dans la même classe de cohomologie, un représentant présentant un pôle d'ordre au plus 1 le long de $\mathcal{S}$. On appelle ϕ_0 ce représentant. On sait que l'on peut écrire, revenant à notre partition de l'unité et utilisant le lemme 4.3,

$$\phi_0\varphi_\xi=\frac{ds_\xi}{s}\psi_{0,\xi}\varphi_\xi+\theta_{0,\xi}\varphi_\xi$$

avec la restriction de ψ_ξ à $\{s_\xi=0\}$ fermée. La forme $\sum_\xi\psi_{0,\xi}\varphi_\xi$ définit donc, par restriction à $\mathcal{S}$, un élément de $\mathbf{Z}_p(\mathcal{S})$; il se trouve, lorsque la forme ϕ est une forme de type (n,k), avec $n+k=p+1$, que cet élément est un représentant de la classe $Res_p(h)$, où h est la classe de ϕ dans $\mathbf{H}_{p+1}(\mathcal{X}\setminus\mathcal{S})$. Dans ce cas, les formes $\theta_{0,\xi}$ intervenant dans l'application finale du lemme de division des formes sont toutes nulles.

Preuve du lemme 4.3. On écrit

$$d(s^k\phi)=ks^{k-1}ds\wedge\phi \qquad (4.6)$$

(ϕ est fermée), ce qui montre

$$ds\wedge d(s^k\phi)\equiv 0,$$

d'où par un argument immédiat d'algèbre linéaire (on peut faire localement comme si s était une application coordonnée),

$$d(s^k\phi)=ds\wedge\theta_1, \qquad (4.7)$$

où θ_1 est aussi une forme régulière dans U. On a donc

$$ds\wedge\left[s^k\phi-s\frac{\theta_1}{k}\right]=\frac{s}{k}\left[kds\wedge s^{k-1}\phi-ds\wedge\theta_1\right]=0$$

d'après (4.6) et (4.7). Par le même argument d'algèbre linéaire,

$$s^k\phi-s\frac{\theta_1}{k}=ds\wedge\psi,$$

avec ψ régulière dans U; on a donc

$$\phi=\frac{ds\wedge\psi}{s^k}+\frac{\theta_1}{ks^{k-1}},$$

ce qui est la forme (4.4) voulue. dans le cas $k=1$, cela donne

$$s\phi=ds\wedge\psi+s\theta,$$

d'où

$$d(s\phi) = -ds \wedge d\psi + ds \wedge \theta + sd\theta,$$

ou encore, puisque ϕ est fermée,

$$\begin{aligned} ds \wedge \phi &= ds \wedge (\frac{ds \wedge \psi}{s}) + ds \wedge \theta \\ &= -ds \wedge d\psi + ds \wedge \theta + sd\theta, \end{aligned}$$

ce qui implique

$$ds \wedge d\psi \equiv sd\theta,$$

d'où

$$ds \wedge d\psi \equiv 0$$

sur $\{s = 0\}$, ce qui montre, puisque $ds \neq 0$,

$$d\psi_{|\{s=0\}} \equiv 0.$$

Ceci achève la preuve du lemme 4.3. $\diamondsuit$

Cette méthode peut être itérée. Pour cela, nous considérons M hypersurfaces lisses $\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_M$ dans $\mathcal{X}$ et faisons l'hypothèse (très forte!) que, prises par paquets, elles s'intersectent de manière transverse. Ceci signifie que pour tout $1 \leq k \leq M$, pour tout sous ensemble $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ de $\{1, \ldots, M\}$, pour tout point ζ de $\mathcal{S}_{i_1} \cap \cdots \cap \mathcal{S}_{i_k}$, il existe des fonctions $s_{i_1}, \ldots, s_{i_M}$, toutes holomorphes au voisinage de ζ telles que

$$ds_{i_1} \wedge \cdots \wedge ds_{i_k}(\zeta) \neq 0 \tag{4.8}$$

et que, pour chaque $j \in \{1, \ldots, k\}$, s_{i_j} définisse $\mathcal{S}_{i_j}$ au voisinage de ζ. On considère les inclusions successives

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{S}_M &\subset \mathcal{S}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{S}_{M-1} \\ (\mathcal{S}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{S}_{M-1}) \setminus \mathcal{S}_M &\subset \mathcal{S}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{S}_{M-2} \\ (\mathcal{S}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{S}_{M-2}) \setminus (\mathcal{S}_{M-1} \cup \mathcal{S}_M) &\subset \mathcal{S}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{S}_{M-3} \\ &\cdots \\ &\cdots \\ \mathcal{S}_1 \setminus (\mathcal{S}_2 \cap \cdots \cap \mathcal{S}_M) &\subset \mathcal{X} \setminus (\mathcal{S}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{S}_M) \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse de non transversalité faite sur les $\mathcal{S}_j$, toutes ces inclusions sont du type $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$, avec $\mathcal{S}$ hypersurface complexe lisse de $\mathcal{X}$ comme précédemment. Numérotons ces M inclusions de haut en bas. A chacune d'elles, correspond un complexe *cobord* δ_*^j; plus précisément,

$$\cdots \to \mathbf{H}_* \left(\bigcap_{j=1}^{M} \mathcal{S}_j \right) \overset{\delta_*^1}{\to} \mathbf{H}_{*+1} \left(\bigcap_{j=1}^{M-1} \mathcal{S}_j \setminus \mathcal{S}_M \right) \to \cdots$$

$$\cdots \to \mathbf{H}_* \left(\bigcap_{j=1}^{M-1} \mathcal{S}_j \setminus \mathcal{S}_M \right) \overset{\delta_*^2}{\to} \mathbf{H}_{*+1} \left(\bigcap_{j=1}^{M-2} \mathcal{S}_j \setminus (\mathcal{S}_{M-1} \cup \mathcal{S}_M) \right) \to \cdots$$

$$\cdots$$

$$\cdots$$

$$\cdots \to \mathbf{H}_* \left(\mathcal{S}_1 \setminus \left(\bigcap_{j=2}^{M} \mathcal{S}_j \right) \right) \overset{\delta_*^M}{\to} \mathbf{H}_{*+1} \left(\mathcal{X} \setminus \bigcup_{j=1}^{M} \mathcal{S}_j \right) \to \cdots$$

Considérons une $p+M$ forme, de classe $\mathcal{C}^\infty$ et fermée dans $\mathcal{X} \setminus \bigcup_{j=1}^M \mathcal{S}_j$, à pôles simples le long de tous les $\mathcal{S}_j$. On peut définir une forme que l'on notera $res^{(1)}(\phi)$, représentant dans

$$\mathbf{Z}_{p+M-1} \left(\mathcal{S}_1 \setminus \left(\bigcap_{j=2}^{M} \mathcal{S}_j \right) \right)$$

de l'image de la classe de ϕ dans $\mathbf{H}_{p+M} \left(\mathcal{X} \setminus \bigcup_{j=1}^M \mathcal{S}_j \right)$ par le morphisme résiduel $Res_{p+M}^{(1)}$ correspondant à cette inclusion. Cette forme est obtenue via le lemme de division des formes (lemme 4.3). On peut maintenant itérer le processus; il suffit de remarquer que la forme $res^{(1)}(\phi)$ a encore des pôles simples le long des $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_j$, $j > 1$. On peut donc continuer et l'on a donc, si

$$h \in \mathbf{H}_p \left(\bigcap_{j=1}^{M} \mathcal{S}_j \right)$$

et si γ est un $p+M$-cycle dans la classe d'homologie de

$$\delta_{p+M-1}^M \circ \delta_{p+M-2}^{M-1} \circ \cdots \circ \delta_p^1(h),$$

$$\int_\gamma \phi = (2i\pi)^M \int_\sigma res^{(M)} \circ res^{(M-1)} \circ \cdots \circ res^{(1)}(\phi), \tag{4.9}$$

ce qui est l'itération naturelle de la formule (4.3).

Exemple. Un exemple important pour nous sera celui où $\mathcal{X}$ est une variété de dimension n en correspondance biholomorphe (via une application $\Theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n) : \mathcal{X}^n \mapsto \mathbf{C}^n$) avec un voisinage de l'origine dans $\mathbf{C}^n$. On prendra $M = n$ et les hypersurfaces $\mathcal{S}_j$, $j = 1, \ldots, n$ seront les hypersurfaces $\{\theta_j = 0\}, j = 1, \ldots, n$. Les hypothèses de transversalité sont remplies. Une telle situation se rencontrera lorsque l'on travaillera localement sur une variété analytique de dimension n. On considère la n forme (du type $(n,0)$) régulière et fermée (puisque les θ_j sont holomorphes) sur $\prod \theta_j \neq 0$, définie par

$$\omega_\theta(\phi; \zeta) := \frac{\phi \Theta^*[dw_1 \wedge \cdots \wedge dw_n]}{\theta_1 \cdots \theta_n},$$

où ϕ est holomorphe sur $\mathcal{X}$. Cette forme a des pôles simples le long de toutes les hypersurfaces $\mathcal{S}_j$, $j = 1, \ldots, n$. Soit $\{a\}$ l'ensemble $\bigcap_{j=1}^n \mathcal{S}_j$ et a le zéro cycle de $\mathbf{H}_0 \left(\bigcap_{j=1}^n \mathcal{S}_j \right)$

correspondant. On peut appliquer ce qui précède et dire que, si γ est un élément de $\mathbf{Z}_n(\{\prod \theta_j \neq 0\})$, pris dans la classe d'homologie de $\delta^n \circ \cdots \circ \delta^1(a)$ (on a convenu d'une orientation sur $\mathcal{X}$), alors

$$\int_\gamma \frac{\phi\Theta^*[dw_1 \wedge \cdots dw_n]}{\theta_1 \cdots \theta_n} = (2i\pi)^n [res^{(n)} \circ \cdots \circ res^{(1)}(\omega_\theta(\phi; , \cdot))(a)] = (2i\pi)^n \frac{\phi(\Theta^{-1}(0))}{J(0)}, \tag{4.10}$$

où J désigne le jacobien de l'application Θ^{-1}. L'orientation choisie sur $\mathbf{C}^n$ (et transportée à $\mathcal{X}$ via le biholomorphisme Θ) est l'orientation habituelle, celle pour laquelle

$$(-i)^n \int_{\|w\| \leq 1} d\overline{w}_1 \wedge dw_1 \wedge \cdots \wedge d\overline{w}_n \wedge dw_n > 0.$$

La formule (4.10) se vérifie immédiatement comme conséquence de la formule de Cauchy. On peut en effet choisir comme représentant de $\delta^n \circ \cdots \circ \delta^1(a)$ l'image par Θ^{-1} d'un cycle de la forme

$$\Gamma_w := \{|w_1| = \epsilon_1, \cdots, |w_n| = \epsilon_n\}$$

(avec l'orientation induite par l'orientation choisie sur $\mathbf{C}^n$). Le changement de variable $\zeta = \Theta^{-1}(w)$ ramène le calcul de l'intégrale (4.10) à celui du calcul de l'intégrale

$$\int_{\Gamma_w} \frac{\phi(\Theta^{-1}(w)) dw_1 \wedge dw_n}{J(w) w_1 \cdots w_n},$$

dont on sait qu'elle vaut, via la formule de Cauchy pour les applications holomorphes de n variables,

$$\int_{\Gamma_w} \frac{\phi(\Theta^{-1}(w)) dw_1 \wedge dw_n}{J(w) w_1 \cdots w_n} = (2i\pi)^n \frac{\phi(\Theta^{-1}(0))}{J(0)},$$

ce qui donne bien la formule (4.10).

4.3. Calculs de résidus globaux dans l'espace projectif.

Considérons une collection $(\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_n)$ de n polynômes homogènes de $n+1$ variables (de degrés respectifs $d_1, \ldots, d_n$), définissant des diviseurs effectifs $\mathcal{D}_1, \ldots \mathcal{D}_n$ dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$. On suppose que ces diviseurs se coupent proprement, c'est à dire que les n polynômes homogènes $(\mathcal{P}_1, \ldots \mathcal{P}_n)$ ont (dans $\mathbf{C}^{n+1}$), un ensemble de zéros communs constitué d'un nombre fini de lignes (la variété algébrique définie par les $\mathcal{P}_k$ dans l'espace projectif $\mathbf{P}^n$ est de dimension 0). Etant donné un polynôme homogène $\mathcal{Q}$ de degré d, on peut considérer, si $\delta := d_1 + \cdots + d_n - d$, la forme différentielle à coefficients méromorphes sur $\mathbf{C}^{n+1}$ définie par

$$\Theta(\mathcal{P}; \mathcal{Q})(\zeta) = \frac{\zeta_0^\delta \mathcal{Q}(\zeta)}{\mathcal{P}_1(\zeta) \ldots \mathcal{P}_n(\zeta)} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{\zeta_k d\zeta_{[k]}}{\zeta_0^{n+1}}. \tag{4.11}$$

Cette forme correspond (par pullback) à une unique $(n, 0)$ forme différentielle méromorphe $\theta(\mathcal{P}; \mathcal{Q})$ sur l'espace projectif $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$. Cette forme a ses singularités le long du support du diviseur $\mathcal{D} := \mathcal{D}_1 + \cdots + \mathcal{D}_n$ ainsi que sur l'hyperplan *à l'infini* $\{X_0 = 0\}$ (ce dernier cas ne se produisant toutefois que si $\delta < n+1$).

Proposition 4.4. *Soient $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_n, \mathcal{Q}$ $n+1$ polynômes homogènes de $n+1$ variables comme ci dessus; on suppose que $\Gamma \in \mathcal{Z}_n(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus supp(\mathcal{D}), \mathbf{C})$ est un cycle homologue à 0 dans l'ouvert $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus supp(\mathcal{D})$. Alors, dès que $\delta := d_1 + \cdots + d_n - d \geq n+1$*

$$\int_\Gamma \theta(\mathcal{P}; \mathcal{Q}) = 0.$$

Preuve. La condition sur δ implique bien que l'on puisse définir l'intégration de la forme θ sur le cycle Γ. Le fait que l'intégrale soit nulle résulte de la formule de Stokes, appliquée sur la variété $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$. $\diamondsuit$

Comme conséquence du résultat suivant, nous avons un célèbre résultat dû à Jacobi, extension naturelle au cadre de n variables de notre proposition 1.4. La première preuve que nous en donnons ici est inspirée d'un article de A. Khovanskii ([Kov1]) et s'adaptera au calcul des sommes complètes de résidus via le plongement dans d'autres types de compactification, par exemple le plongement dans une compactification torique.

Théorème 4.6. *Soient $(P_1, \ldots, P_n)$ n polynoômes de n variables de degrés respectifs $D_1, \ldots, D_n$, avec $inf(D_j) > 0$. On suppose que les parties homogènes de plus haut degré de ces polynômes n'ont que l'origine comme zéro commun dans $\mathbf{C}^n$ (géométriquement, ceci signifie que la variété projective définie par les homogénéisés des P_j dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ est discrète et entièrement dans $\mathbf{C}^n$, ou encore il n'y a pas de zéro à l'infini). Alors, pour tout polynôme Q de degré au plus égal à $D_1 + \cdots + D_n - n - 1$, on a*

$$< \overline{\partial}(1/P_1)(X) \wedge \cdots \wedge \overline{\partial}(1/P_n)(X), Q(X)dX >= 0. \tag{4.12}$$

Preuve. On remarque immédiatement que les hypothèses impliquent la propreté de l'application polynomiale P. On a même, pour $||\zeta||$ suffisamment grand

$$||P(\zeta)|| \geq c||\zeta||^{inf(D_j)}. \tag{4.13}$$

En fait, nous avons un résultat plus précis, à savoir l'existence d'une constante strictement positive ρ telle que, pour $||\zeta||$ de module suffisamment grand (disons $||\zeta|| \geq K$)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{|P_k(\zeta)|}{||\zeta||^{D_k}} \geq \rho. \tag{4.14}$$

Nous allons tout d'abord démontrer le théorème en supposant que les diviseurs $\mathcal{D}_1, \cdots \mathcal{D}_n$ définis dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ par les homogénéisés $\mathcal{P}_j$ des P_j définissent n hypersurfaces lisses de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ se coupant de manière transverse (au sens de Leray, voir la section 4.2). Placons nous alors dans la variété compacte $\mathbf{P}^(\mathbf{C})$ et notons $a_1, \ldots, a_N$ les points de $\mathcal{D}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{D}_n$. Considérons un ouvert $\mathcal{X}$ de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ constitué d'une union d'ouverts disjoints autour des points a_j (à raison d'un ouvert autour de chaque a_j). On peut considérer les morphismes cobords de Leray $\delta^1, \ldots, \delta^n$ relatifs à cette famille d'hypersurfaces. Si γ désigne le 0 cycle $\gamma = a_1 + \cdots + a_N$ de $\mathbf{H}_0(\mathcal{D}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{D}_n)$, on a vu dans l'exemple étudié dans la section 4.2, que

$$< \overline{\partial}(1/P_1)(X) \wedge \cdots \wedge \overline{\partial}(1/P_n)(X), Q(X)dX >= \int_\Gamma \pi^*(\Theta(\mathcal{P}; \mathcal{Q})), \tag{4.15}$$

où la forme $\Theta(\mathcal{P},\mathcal{Q})$ est la forme sur $\mathbf{C}^{n+1}$ associée aux homogénéisés des P_j et de Q par (4.11) et π^* le pullback des formes de $\mathbf{C}^{n+1}$ à $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$. Le cycle Γ désigne le cycle

$$\Gamma = \delta^n \circ \delta^{n-1} \circ \cdots \circ \delta^1(\gamma).$$

Supposons que le degré de Q soit au plus $D_1+\ldots+D_n-n-1$. Compte tenu de la proposition 4.5, il suffit pour prouver le théorème, de vérifier que le cycle Γ est bien homologue à 0 dans l'ouvert $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus supp(\mathcal{D})$. On peut écrire

$$\Gamma = \delta^n \circ \cdots \circ \delta^2(\delta^1(\gamma)).$$

Si par conséquent nous montrons que $\delta^1(\gamma)$ est homologue à 0 dans $(\mathcal{D}_1\cap\cdots\cap\mathcal{D}_{n-1})\setminus\mathcal{D}_n$, on aura bien gagné. Mais $(\mathcal{D}_1\cap\cdots\cap\mathcal{D}_{n-1})$ est une variété algébrique compacte de dimension 1. Le cycle $\delta^1(\gamma)$ est le bord du 1-cycle obtenu en retirant à cette courbe algébrique une union de boules autour des points $a_1,\cdots,a_N$. Il est donc bien homologue à 0 dans $(\mathcal{D}_1\cap\cdots\cap\mathcal{D}_{n-1})\setminus\mathcal{D}_n$, ce qui achève la preuve du théorème dans ce cas.

Revenons maintenant au cas général. Il résulte du théorème de Bertini (voir [Jouan]) que si $\tilde{\mathcal{P}}_1,\ldots,\tilde{\mathcal{P}}_n$ sont des polynômes homogènes *pleins*, de degrés respectifs $D_1,\ldots,D_n$, dont les coefficients n'appartiennent pas à une certaine hypersurface algébrique de $\mathbf{P}^{N_1}(\mathbf{C})\times\cdots\times\mathbf{P}^{N_n}(\mathbf{C})$ (N_j est la dimension de l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré D_j en $n+1$ variables, soit $\binom{D_j+n}{n}$), alors $\mathcal{P}_1,\cdots,\mathcal{P}_n$ définissent des hypersurfaces en position transverse dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$. Ainsi, une petite perturbation de nos polynômes originaux $(P_1,\ldots,P_n)$ par des polynômes $p_1,\ldots,p_n$ de degrés respectifs $D_1,\ldots,D_n$ nous amène dans cette situation. Le résultat est acquis lorsque P est remplacée par l'application polynomiale perturbée $(P_1+p_1,\ldots,P_n+p_n)$. Mais on a, si les coefficients des p_j sont en module suffisamment petits,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{|(P_k+p_k)(\zeta)|}{\|\zeta\|^{D_k}} \geq \frac{\rho}{2} \tag{4.16}$$

pour $\|\zeta\|\geq K$. Puisque l'inégalité (4.16) est uniforme en la perturbation p pourvu que les coefficients intervenant dans les p_j soient en module assez petits, on démontre le résultat en utilisant le fait suivant: si (p^ϵ) est une suite de perturbations dont les coefficients tendent vers 0 uniformément, alors,

$$<\overline{\partial}(1/P), QdX> = \lim_{\epsilon\to 0}\left(<\overline{\partial}(1/(P_1+p_1^\epsilon))(X)\wedge\cdots\wedge\overline{\partial}(1/(P_n+p_n^\epsilon)(X)), Q(X)dX>\right).$$

Le théorème est donc ainsi démontré. $\diamondsuit$

Nous allons donner une autre preuve du théorème de Jacobi, en même temps qu'un procédé pour ramener, pour des familles de polynômes sans zéros communs à l'infini, les calculs de sommes complètes de résidus dans $\mathbf{C}^n$ à des calculs dans le cas où les polynômes P_j sont tous homogènes et définissent l'origine comme seul zéro commun. La méthode que nous décrirons ici est due à E. Cattani, A. Dickenstein, B. Sturmfelds [CDS].

Soit $\mathbf{w}\in\mathbf{N}^n$. Pour tout élément P de $\mathbf{K}[X_1,\cdots,X_n]$,

$$P(X) = \sum_{a\in\mathcal{A}(P)} u_a X^a$$

(avec $u_a \neq 0$ si $a \in \mathcal{A}(P)$), on pose

$$deg_{\mathbf{w}}(P) := Max\{< a, \mathbf{w} >, a \in \mathcal{A}(P)\}.$$

Tout polynôme P peut ainsi s'écrire de manière unique

$$P = p + q \tag{4.17}$$

où q est tel que $deg_{\mathbf{w}}(Q) < deg_{\mathbf{w}}(P)$ et où tous les monômes X^a de p sont tels que $< a, \mathbf{w} >= deg_{\mathbf{w}}(P)$. De plus, étant donné un polynôme en n variables P, on peut définir son homogénéisé par rapport au *poids* $\mathbf{w}$, comme étant le polynôme en $n+1$ variables

$$(t, X) \mapsto^{\mathbf{w}} P(t, X) := t^{deg_{\mathbf{w}}(P)} P(t^{-w_1} X_1, \ldots, t^{-w_n} X_n).$$

On a

$$^{\mathbf{w}}P(t, X) = p(X) +^{\mathbf{w}} q(t, X) = p(X) + t\tilde{q}(t, X).$$

A toute collection de n polynômes $P_j = p_j + q_j$ en n variables (décomposés comme dans (4.17)), on peut associer une unique suite $(B_j)_{j\in\mathbf{N}}$ de fractions rationnelles homogènes en n variables telle que

$$\sum_{j\geq 0} B_j(X) t^j$$

soit le développement en série formelle (selon les puissances de t) de

$$t \mapsto \frac{1}{\prod_{j=1}^n p_j(X)\left(1 + t\frac{\tilde{q}_j(t,X)}{p_j(X)}\right)}.$$

On a alors le

Théorème 4.7. *Soient $\mathbf{w}$ un poids et n polynômes $(P_1, \ldots, P_n)$ qui, une fois décomposés comme dans (4.17) sous la forme $P_j = p_j + q_j$, ont la propriété suivante, à savoir les p_j ont comme seul zéro commun l'origine dans $\mathbf{C}^n$. Alors l'application polynomiale P est propre, et l'on a, pour tout monôme X^a tel que*

$$< \mathbf{w}, a > - \sum_{j=1}^n deg_{\mathbf{w}}(P_j) + |\mathbf{w}| < 0, \tag{4.18}$$

$$< \overline{\partial}(1/P)(X), X^a dX >= 0.$$

D'autre part, si

$$\sigma(a) =< \mathbf{w}, a > - \sum_{j=1}^n deg_{\mathbf{w}}(P_j) + |\mathbf{w}| \geq 0,$$

chaque B_k s'écrit sous la forme

$$B_k(X) = \frac{N_k(X)}{\prod_{j=1}^n p_j(X)^{k+1}},$$

où N_k *est un polynôme* $\mathbf{w}$*-homogène tel que* $deg_{\mathbf{w}}(N_a) = k(\sum deg_{\mathbf{w}}(P_j) - 1)$*; de plus on a*

$$< \overline{\partial}(1/P)(X), X^a dX >= Res_{p,0}^{[m(a)]}(\zeta^a N_{\sigma(a)}(\zeta)), \tag{4.19}$$

où $m(a) := (\sigma(a)+1, \ldots, \sigma(a)+1)$.

Preuve. La propreté de l'application P résulte du fait suivant: l'application polynomiale

$$\zeta \mapsto P(\zeta^{w_1}, \ldots, \zeta^{w_n})$$

est propre (car il n'y a pas, du fait des hypothèses, de zéro à l'infini). On pose, si $R = (R_1, \ldots, R_n)$ est un n-uplet de nombres strictement positifs

$$\Gamma(R) := \{\zeta \in \mathbf{C}^n,\ |p_j(\zeta)| = R_j,\, j = 1, \ldots, n\}.$$

Cet ensemble est compact (du fait de la propreté de P). De plus, le théorème de Sard implique que pour presque tout choix de R, $\Gamma(R)$ est une variété différentiable de dimension n dans $\mathbf{C}^n = \mathbf{R}^{2n}$. On peut considérer cette variété comme le support d'un cycle. Ce cycle est orienté comme suit: si $(\chi_\nu)_\nu$ est une approximation (par des fonctions lisses nulles pour $t < 1-\epsilon$ et identiquement égales à 1 pour $t > 1+\epsilon$) de la fonction caractéristique de $[1, +\infty[$, on convient, pour toute $(n,0)$ forme ϕ de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de $\Gamma(R)$,

$$\int_{\Gamma(R)} \phi = (-1)^{n(n-1)/2} \lim_{\nu \to \infty} \int_{\mathbf{C}^n} \left(\bigwedge_{j=1}^{n} \overline{\partial}[\chi_\nu(|p_j|^2/R_j)] \right) \wedge \phi$$

(ceci généralise ce que nous avons fait dans la section 2 du chapitre 1). Soit $\delta > 1$ et R tel que, pour tout $\zeta \in \Gamma(R)$, pour tout t, $|t| \leq \delta$,

$$\frac{|p_j(\zeta)|}{2} > |{}^{\mathbf{w}}q_j(t,\zeta)|. \tag{4.20}$$

Pour $|t| \leq \delta$, le cycle $\Gamma(R)$ est homologue (dans $\mathbf{C}^n$ privé de l'union des hypersurfaces définies par les ${}^{\mathbf{w}}P_j(t,\cdot)$) à un cycle du type $\sum_l \gamma_{t,l}$, où les $\gamma_{t,l}$ sont des cycles du type $\{|{}^{\mathbf{w}}P_j(t,\cdot)| = \eta_j,\, j = 1, \ldots, n\}$ (orientés comme $\Gamma(R)$ autour des zéros communs distincts de l'application $\zeta \mapsto^{\mathbf{w}} P(t,\zeta)$). On a donc, pour tout t avec $|t| \leq \delta$, pour tout $a \in \mathbf{N}^n$,

$$\begin{aligned} < \overline{\partial}(1/{}^{\mathbf{w}}P(t,X)), X^a dX > &= \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{\Gamma(R)} \frac{\zeta^a}{\prod_{j=1}^n {}^{\mathbf{w}}P_j(t,\zeta)} d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n \\ &= \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{\Gamma(R)} \frac{\zeta^a d\zeta}{\prod_{j=1}^n p_j(\zeta) \left(1 + \frac{{}^{\mathbf{w}}q_j(t,\zeta)}{p_j(\zeta)}\right)} \\ &= \frac{1}{(2i\pi)^n} \sum_{j \geq 0} \left(\int_{\Gamma(R)} \zeta^a B_j(\zeta) d\zeta \right) t^j \end{aligned} \tag{4.21}$$

où la série ci dessus converge normalement pour $|t| \leq \delta$. Posons

$$\prod_{j=1}^{n} {}^{\mathbf{w}}P_j(t,X) = \sum_{j\geq 0} A_j(X)t^j.$$

Les B_j se calculent via les relations inductives

$$\left(\prod_{j=1}^{n} p_j(X)\right) B_k(X) = -\sum_{l=1}^{k} A_l(X)B_{k-l}(X),$$

avec $A_0B_0 \equiv 1$. On voit ainsi que

$$\left(\prod_{j=1}^{n} p_j^{k+1}\right) B_k(X)$$

est un polynôme $\mathbf{w}$-homogène de $\mathbf{w}$-degré $k(\sum(deg_{\mathbf{w}}(P_j) - 1)$. Pour achever la preuve du théorème, il suffit de remarquer que si N et D sont deux polynômes $\mathbf{w}$- homogènes tels que

$$\rho(N,D) := deg_{\mathbf{w}}(N) - deg_{\mathbf{w}}(D) + |w| \neq 0,$$

la forme

$$\frac{N(\zeta)}{D(\zeta)} d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n$$

est exacte dans $N \neq 0$. Un calcul simple donne en effet

$$d\left(\frac{N}{D}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}w_j\zeta_j d\zeta_{[j]}\right) = \rho(N,D)\frac{N}{D}.$$

Ainsi, si

$$< \mathbf{w}, a > +j(\sum deg_{\mathbf{w}}(P_j) - 1) - (j+1)(\sum deg_{\mathbf{w}}(P_j)) + |w| \neq 0,$$

le coefficient de t^j dans (4.21) est nul. Il n'y a donc qu'un seul coefficient non nul dans le développement (4.21). Ce terme n'apparait d'ailleurs que si la condition (4.18) n'est pas remplie. En prenant $t = 1$, on obtient la conclusion du théorème. $\diamondsuit$

4.4. Théorème de Briançon-Skoda et annulation de résidus globaux.

Dans cette section, nous considèrerons n polynômes de $\mathbf{K}[X_1, \ldots, X_n]$ ($\mathbf{K}$ sous corps de $\mathbf{C}$ pour l'instant, bien que cette hypothèse puisse être levée si l'on considère la notion de résidu dans le cadre algébrique du chapitre 3 (section 3)). Nous noterons $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_n$ leurs homogénéisés. Nous supposerons que les polynômes P_j définissent une variété discrète dans $\mathbf{C}^n$, mais nous ne ferons à priori aucune hypothèse concernant la dimension de la variété *à l'infini* définie par les polynômes P_j, c'est à dire la variété des zéros de $\mathcal{Q}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{Q}_r$, où les $\mathcal{Q}_j$ sont les idéaux primaires homogènes de la décomposition de $\mathcal{I} := (\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n)$ (dans $\mathbf{C}[X_0, \dots, X_n]$) ne contenant pas de puissance de X_0.

On sait que la somme complète des résidus de Q relativement à l'application polynomiale $P = (P_1, \dots, P_n)$ s'écrit encore

$$\frac{(-1)^{n(n-1)/2}(n-1)!}{(2i\pi)^n} \int_{\|\zeta\|=R} Q(\zeta) \frac{\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \overline{P}_k d\overline{P}_{[k]}(\zeta) \wedge d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n}{\|P(\zeta)\|^{2n}}.$$

La forme

$$\Omega_Q := Q \frac{\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \overline{P}_k d\overline{P}_{[k]} \wedge d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n}{\|P\|^{2n}}$$

se prolonge en une forme différentielle méromorphe dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$. Supposons pour simplifier que les polynômes P_j soient tous de même degré D. Ce prolongement correspond (via le pullback π^* où π est la projection de $(\mathbf{C}^{n+1})^*$ dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$) à une forme différentielle de la forme

$$\widetilde{\Omega}_Q(X) = \frac{|X_0|^{2nD}}{X_0^{deg(Q)+n+1} \overline{X}_0^{D+(n-1)(D-1)+n}} \frac{\Theta_Q}{\left(\sum_{j=1}^n |\mathcal{P}_j(X)|^2\right)^n},$$

où Θ_Q est une différentielle régulière dans $\mathbf{C}^{n+1}$. On a

$$\widetilde{\Omega}_Q(X) = X_0^{nD-deg(Q)-n-1} \overline{X}_0^{-1} \frac{\Theta_Q}{\left(\sum_{j=1}^n |\mathcal{P}_j(X)|^2\right)^n}$$

et l'on voit que dès que

$$deg(Q) \leq nD - n - 1$$

(soit la condition de Jacobi), la forme différentielle sur $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ correspondant à $\widetilde{\Omega}_Q$ (et que l'on notera aussi $\widetilde{\Omega}_Q$) a des singularités non intégrables seulement le long du support du diviseur $\mathcal{D}_1 + \cdots \mathcal{D}_n$, les $\mathcal{D}_j$ correspondant aux ensembles de zéros des polynômes $\mathcal{P}_j$.

Nous nous proposons de construire un élément $Res_{P,\infty,p}$ du dual de l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ et à valeurs dans le fibré $\mathcal{O}(p)$*. Le support de cet élément sera inclus dans la variété projective correspondant à l'idéal $\mathcal{Q}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{Q}_r$, et l'on aura, pour tout polynôme Q de degré p tel que $p \leq nD - n - 1$,

$$< \overline{\partial}(1/P(X)), Q(X)dX >= -Res_{P,\infty,p}(\mathcal{Q}). \tag{4.22}$$

Le second membre de (4.22) a bien un sens car on peut faire agir $Res_{P,\infty,p}(\cdot)$ sur $\mathcal{Q}$ (qui, rappelons le, désigne l'homogénéisé de Q) puisque $\mathcal{Q}$ correspond à une application holomorphe de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ à valeurs dans $\mathcal{O}(p)$. Pour construire cet élément $Res_{P,\infty,p}$, nous allons nous inspirer de l'argument introduit lors de la preuve de la proposition 3.1 et

* Pour la définition de ces fibrés sur $\mathbf{P}^n$ et des espaces de formes différentielles à valeurs dans ces fibrés, on pourra consulter la section introductive de [Bern].

raisonner comme suit: nous introduisons un paramètre complexe λ de partie réelle très grande et nous considérons la $(n, n-1)$ forme différentielle sur $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, à valeurs dans le fibré $\mathcal{O}(-p)$, définie par

$$\omega_{p,\lambda} : [X] \in \mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \mapsto X_0^{-p} \left(\frac{\sum_{j=1}^n |\mathcal{P}_j(X)|^2}{\|X\|^{2D}} \right)^{\lambda} \widetilde{\Omega}_1([X]). \tag{4.23}$$

L'application $\lambda \mapsto \omega_{p,\lambda}$ est une application holomorphe d'un demi plan du type $\Re(\lambda) > M$ (avec M assez grand), à valeurs dans l'espace des $(n, n-1)$ formes différentielles de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, à valeurs dans le fibré $\mathcal{O}(-p)$. Cet espace est l'espace des sections globales de classe $\mathcal{C}^1$ du fibré holomorphe

$$\Lambda_{[p]}^{(n,n-1)}(\mathbf{P}^n(\mathbf{C})) := \mathcal{O}(-p) \otimes \left(\Lambda^n T^{*(1,0}(\mathbf{P}^n(\mathbf{C})) \wedge \Lambda^{n-1} T^{*(0,1)}(\mathbf{P}^n(\mathbf{C})) \right).$$

L'application

$$\lambda \mapsto \overline{\partial} \omega_{p,\lambda}$$

est donc une application holomorphe du demi plan $\Re(\lambda) > M$, à valeurs dans l'espace des sections globales de classe $\mathcal{C}^0$ du fibré $\Lambda_{[p]}^{(n,n)}(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$. Toute section globale $x \mapsto \omega(x)$ du fibré $\Lambda_{[p]}^{(n,n)}(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$ induit un élément du dual $\mathcal{D}'^{(n,n)}_{[p]}(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$ de l'espace des sections globales $\mathcal{C}^\infty$ du fibré $\mathcal{O}(p)$; cet élément associe à une section σ de $\mathcal{O}(p)$ l'intégrale

$$\int_{\mathbf{P}^n(\mathbf{C})} \sigma(x) \omega(x).$$

Admettons (ce sera l'objet du lemme 4.10 suivant) que l'on puisse prolonger l'application $\lambda \mapsto \omega_{p,\lambda}$ en une application méromorphe à valeurs dans $\mathcal{D}'^{(n,n)}_{[p]}(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$. La série de Laurent à l'origine correspondant à cette application méromorphe s'écrit

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} a_{p,k} \lambda^k,$$

où les $a_{p,k}$ sont des éléments de $\mathcal{D}'^{(n,n)}_{[p]}(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$. Comme la forme $\widetilde{\Omega}_1$ dans (4.23) est $\overline{\partial}$ fermée, on a

$$\overline{\partial} \omega_{p,\lambda}([X]) = \lambda X_0^{-p} \left(\frac{\sum_{j=1}^n |\mathcal{P}_j(X)|^2}{\|X\|^{2D}} \right)^{\lambda-1} \overline{\partial} \left(ln(\sum_{j=1}^n |\mathcal{P}_j(X)|^2) - D ln(\|X\|^2) \right) \wedge \widetilde{\Omega}_1([X]).$$

On voit immédiatement que l'application $\lambda \mapsto \omega_{p,\lambda}$ est entière (et nulle en 0) si on la considère comme une application du plan complexe dans le dual de l'espace des sections $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus \{\mathcal{P}_j = 0;\ j = 1, \ldots, n\}$ du fibré $\mathcal{O}(p)$. Ceci montre donc que le courant $a_{p,0}$ (comme d'ailleurs tous les courants $a_{p,k}$, avec $k \leq 0$) sont supportés par l'intersection des hypersurfaces $\mathcal{P}_j = 0,\ j = 1, \ldots, n$. Par définition, on appellera $Res_{P,\infty,p}$ la restriction de $a_{p,0}$ à un voisinage de l'hyperplan à l'infini ne contenant aucun des zéros communs aux $\mathcal{P}_j$ situés à distance finie, prolongée par 0 hors de ce voisinage. Il s'agit bien d'un élément du dual de l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ et à valeurs dans le fibré $\mathcal{O}(p)$, dont le support est inclus dans la composante à l'infini de $\{\mathcal{P}_j = 0,\ j = 1, \ldots, n\}$, soit dans l'union des variétés des zéros des idéaux $\mathcal{Q}_j,\ j = 1, \ldots, r$.

Avant de justifier cette construction et de voir les propriétés d'annulation de sommes complètes de résidus qui en résulteraient, nous devons rappeler une notion algébrique importante, celle de *clôture intégrale* d'un idéal.

Définition 4.8. *Soit* $\mathbf{A}$ *un anneau commutatif et* $\mathbf{I}$ *un idéal de* $\mathbf{A}$*; un élément* $a \in \mathbf{A}$ *appartient à la clôture intégrale de* $\mathbf{I}$ *si et seulement si* a *satisfait une équation de dépendance intégrale du type*

$$a^N + \sum_{k=1}^{N} \alpha_k a^{N-k} \equiv 0,$$

avec, pour chaque $k \in \{1, \ldots, N\}$, $\alpha_k \in \mathbf{I}^k$.

La clôture intégrale d'un idéal est elle même un idéal. En effet, si l'on considère le sous anneau gradué de $\mathbf{A}[T]$ défini (avec sa graduation) par

$$\mathcal{I} = \sum_{k \geq 0} \mathbf{I}^k T^k,$$

dire que a est dans la clôture intégrale de $\mathbf{I}$ signifie que aT satisfait une équation

$$P(aT) = (aT)^M + \sum_{k=1}^{M} (aT)^k \alpha_k(T) \equiv 0,$$

où les $\alpha_k(T)$ sont dans $\mathcal{I}$.

De plus, on peut tester l'appartenance à la clôture intégrale en utilisant le *critère valuatif*. Rappelons qu'une valuation discrète sur un anneau intègre unitaire $\mathbf{A}$ est par définition une application ν de $\mathbf{A}$ dans $\mathbf{N} \cup \infty$ telle que

$$\nu(ab) = \nu(a) + \nu(b),\ \nu(a+b) \geq min(\nu(a), \nu(b)),$$
$$\nu(\mathbf{A}^*) = 0,\ \nu(0) = \infty.$$

Critère valuatif 4.9. *Soit* $\mathbf{A}$ *un anneau commutatif, intègre, unitaire, et* $\mathbf{I}$ *un idéal de* $\mathbf{A}$. *Un élément* a *est dans la clôture intégrale de* $\mathbf{I}$ *si et seulement si, pour toute valuation discrète* ν *sur* $\mathbf{A}$, *on a*

$$\nu(a) \geq min\{\nu(\alpha), \alpha \in \mathbf{I}\}.$$

Nous avons le lemme suivant, important lorsque nous envisagerons de construire une notion de résidu dans le cas non intersection complète.

Lemme 4.10. *Soient $f_1, \ldots, f_p$ $(p \leq n)$ p fonctions holomorphes dans un ouvert U de $\mathbf{C}^n$. Les applications*

$$\lambda \in \mathbf{C} \mapsto \lambda \frac{(-1)^{p(p-1)/2} p!}{(2i\pi)^p} \left(\sum_{j=1}^{p} |f_j|^2 \right)^{\lambda - p} \bigwedge_{j=1}^{p} \overline{\partial f_j}$$

et

$$\lambda \in \mathbf{C} \mapsto \lambda \frac{(-1)^{p(p-1)/2} (p-1)!}{(2i\pi)^p} \|f\|^{2\lambda} \left(\frac{\sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} \overline{f}_k d\overline{f}_{[k]}}{\|f\|^{2p}} \right),$$

définies (à priori pour $\Re(\lambda) > M$, avec M suffisamment grand) comme applications à valeurs dans l'espace des courants de type $(0,p)$ (respectivement $(0,p-1)$) sur U, se prolongent en des applications méromorphes $\lambda \mapsto T_f(\lambda)$, $\lambda \mapsto S_f(\lambda)$ sur $\mathbf{C}$, à valeurs dans $\mathcal{D}'^{(0,p)}(U)$ (resp. $\mathcal{D}'^{(0,p-1)}(U)$) . De plus, les courant $a_{f,0}$, $b_{f,0}$ définis par

$$T_f(\lambda) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_{f,\lambda} \lambda^k \tag{4.24}$$

et

$$S_f(\lambda) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} b_{f,\lambda} \lambda^k \tag{4.25}$$

(développement de Laurent autour de l'origine) sont portés (comme d'ailleurs tous les $a_{f,k}$, $b_{f,k}$ avec $k \leq 0$) par $\{f_1 = \cdots = f_p = 0\}$; de plus, pour $k \leq 0$, $a_{f,k}$ et $b_{f,k}$ sont annulés (comme courants) par l'idéal $\overline{\mathbf{I}}_f^p$, où $\overline{\mathbf{I}}_f$ désigne la clôture intégrale de l'idéal $(f_1, \ldots, f_p)$ dans l'anneau des fonctions holomorphes dans U.

Admettons pour l'instant ce lemme. Nous avons comme conséquence la proposition suivante.

Proposition 4.11. *Soient $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_n$ n polynômes en $n+1$ variables, homogènes de même degré D. Soit Q un polynôme en n variables tel que $deg(Q) \leq nD - n - 1$ et $\mathcal{Q}$ son homogénéisé. Soient $\mathcal{Q}_j$, $j = 1, \ldots, r$, les composantes primaires (s'il en existe) de l'idéal homogène $(\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_n)$ qui contiennent une puissance de X_0. Soit $\mathcal{I}$ la clôture intégrale de l'idéal $\mathcal{Q}_1 \cap \ldots \cap \mathcal{Q}_r$ (dans $\mathbf{C}[X_0, \ldots, X_n]$). On suppose que les polynômes P_j définis par $P_j(X) = \mathcal{P}_j(1, X_1, \ldots, X_n)$ définissent une variété discrète dans $\mathbf{C}^n$. Alors, si*

$$X_0^{nD-n-1-deg(Q)} \mathcal{Q} \in \mathcal{I}^n \tag{4.26}$$

on a

$$< \overline{\partial}(1/P(X)), Q(X) dX >= 0.$$

Preuve. Soient $a_1, \ldots, a_N$ les zéros communs des $\mathcal{P}_j$ n'appartenant pas à l'hyperplan à l'infini $X_0 = 0$. Il existe une n chaine δ de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, dont le support ne contient aucun des points a_j, mais contient par contre l'hyperplan à l'infini de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, telle que

$$\left(\int_{\partial \delta} \mathcal{Q} \omega_{deg(Q),\lambda} \right)_{\lambda = 0} = - < \overline{\partial}(1/P(X), Q(X) dX > .$$

Il suffit de faire en sorte que $\partial\delta$ soit une somme de N cycles constitués chacun de la frontière convenablement orientée d'une boule B_j autour du point a_j. La chaine δ est le complémentaire (dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$) de cette union de boules affines, équipé de l'orientation induite par celle du bord. Pour $\Re(\lambda)$ suffisamment grand, on a, grâce à la formule de Stokes

$$\int_{\partial\delta} \mathcal{Q}\omega_{deg(Q),\lambda} = \int_{\delta} \overline{\partial}(\mathcal{Q}\omega_{deg(Q),\lambda}).$$

Soit ϕ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, de support inclus dans l'intérieur du support de δ, identiquement égale à 1 au voisinage de $\{X_0 = 0\}$. Compte tenu du fait que toutes les singularités de la forme $\overline{\partial}(\mathcal{Q}\omega_{deg(Q),\lambda})$ sont localisées sur l'hyperplan à l'infini, on peut écrire, pour $\Re(\lambda)$ suffisamment grand,

$$\begin{aligned}\int_{\delta} \overline{\partial}(\mathcal{Q}\omega_{deg(Q),\lambda}) &= \int_{\delta} \phi\overline{\partial}(\mathcal{Q}\omega_{deg(Q),\lambda}) + \int_{\delta} (1-\phi)\overline{\partial}(\mathcal{Q}\omega_{deg(Q),\lambda}) = \\ &= \int_{\delta} \phi\overline{\partial}(\mathcal{Q}\omega_{deg(Q),\lambda}) + E(\lambda),\end{aligned}$$

où E est une fonction entière (d'après le théorème d'holomorphie des intégrales dépendant d'un paramètre) s'annulant à l'origine. D'autre part, si l'on explicite localement la forme $\phi\overline{\partial}(\mathcal{Q}\omega_{deg(Q),\lambda})$ dans une carte, on voit que l'expression

$$\int_{\delta} \phi\overline{\partial}(\mathcal{Q}\omega_{deg(Q),\lambda})$$

s'écrit comme une somme d'expressions du type

$$\int_U \varphi T_f(\lambda)$$

ou

$$\int_U S_f(\lambda) \wedge \psi,$$

où U est un ouvert de $\mathbf{C}^n$ (un ouvert de l'ouvert de carte dans lequel on s'est placé), les applications T_f et S_f étant attachées comme dans l'énoncé du lemme 4.10 (avec $p = n$) à l'application $(\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_n)$ lue dans la carte en question. Les formes φ et ψ sont des formes de type respectifs $(0,0)$ et $(1,0)$, à coefficients $\mathcal{C}^\infty$. Ces formes contiennent en facteur la fonction $X_0^{nD-n-1-deg(Q)}\mathcal{Q}$ (lue dans la carte) et l'on a donc, grâce au lemme 1.10 * et à l'hypothèse (4.26),

$$\left(\int_{\delta} \mathcal{Q}\phi\overline{\partial}(\omega_{deg(Q),\lambda})\right)_{\lambda=0} = 0,$$

ce qui prouve bien

$$\left(\int_{\partial\delta} \mathcal{Q}\omega_{deg(Q),\lambda}\right)_{\lambda=0},$$

* De fait, pas exactement, car nous avons aussi à tenir compte de la singularité anti-holomorphe $\overline{X}_0^{-1}$, mais sa présence n'entache pas le résultat.

et achève donc la preuve de la proposition. $\diamondsuit$

Application. Considérons une application polynomiale propre $(P_1, \dots, P_n)$ de $\mathbf{C}^n$ dans $\mathbf{C}^n$ avec un exposant de Lojasiewicz δ tel que

$$1 - \frac{\delta}{D} < \frac{1}{n}, \tag{4.27}$$

où D désigne le maximum des degrés des polynômes P_j. Soient $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n$, n polynômes homogènes de degré D tels que $\mathcal{P}_j(1, X_1, \dots, X_n) = P_j(X)$, $j = 1, \dots, n$. L'hypothèse

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |P_j(\zeta)|^2 \right)^{1/2} \geq c\|\zeta\|^\delta$$

(pour $\|\zeta\|$ suffisamment grand) implique, si on l'exprime en coordonnées homogènes, qu'il existe une constante C telle que, dans un voisinage $\mathcal{V}$ de l'hyperplan $X_0 = 0$ sur la sphère unité de $\mathbf{C}^{n+1}$, on ait

$$|X_0|^{D-\delta} \leq C \left(\sum_{j=1}^{n} |\mathcal{P}_j(X)|^2 \right)^{1/2}. \tag{4.28}$$

Soit Q un polynôme en n variables et $m \in \mathbf{N}^n$ tel que

$$(m_1 + \cdots + m_n)D - deg(Q) - n - 1 \geq n(m_1 + \cdots + m_n)(D - \delta) \tag{4.29}$$

(la condition (4.27) implique qu'il existe de tels multiindices m). Pour un tel multiindice m (de longueur $|m|$), on a, dans le voisinage $\mathcal{V}$, grâce à (4.28),

$$|X_0|^{|m|(D-\delta)} \leq C_m \left(\sum_{j=1}^{n} |\mathcal{P}_j^{m_j}(X)|^2 \right)^{1/2}, \tag{4.30}$$

où C_m est une constante positive liée à m, au voisinage $\mathcal{V}$ et aux $\mathcal{P}_j$. Si l'on désigne par $\mathcal{Q}_1^{[m]}, \dots \mathcal{Q}_{r_m}^{[m]}$ les composantes primaires de $(\mathcal{P}_1^{m_1}, \dots \mathcal{P}_n^{m_n})$ contenant une puissance de X_0 et par $\mathcal{I}_m$ la clôture intégrale de leur intersection, on voit d'après (4.28) et le critère valuatif 4.9, que $X_0^{|m|(D-\delta)}$ est dans $\mathcal{I}_m$. Ceci implique

$$X_0^{n|m|(D-\delta)} \in \mathcal{I}_m^n,$$

d'où, compte tenu de l'hypothèse (4.29),

$$X_0^{|m|D-n-1-deg(Q)} \in \mathcal{I}_m^n.$$

Si l'on applique la proposition 4.11 avec les polynômes $\mathcal{P}_1^{m_1}, \dots, \mathcal{P}_n^{m_n}$, on trouve donc que si m satisfait (4.29), alors

$$< \overline{\partial}(1/P^m(X)), Q(X)dX >= 0$$

$(P^m := (P_1^{m_1}, \dots, P_n^{m_n}))$. Nous avons ainsi éclairé d'un jour un peu différent (et en un sens plus géométrique) la preuve de l'implication $(i) \Longrightarrow (ii)$ dans la proposition 3.11.

Preuve du lemme 4.10.

Le lemme 4.10 est un énoncé local. D'autre part, on voit immédiatement que, pour $\Re(\lambda)$ suffisamment grand, on a

$$\overline{\partial}_\zeta(S_f(\lambda)[\zeta] = T_f(\lambda)[\zeta],$$

les applications $\lambda \mapsto S_f(\lambda)$ et $\lambda \mapsto T_f(\lambda)$ étant considérées, comme cela est licite pour $\Re(\lambda)$ suffisamment grand, comme des applications à valeurs dans l'espace des formes différentielles sur U. Il suffit donc de prouver le résultat pour l'application $\lambda \mapsto S_f(\lambda)$, qu'il s'agit de prolonger, en tant qu'application holomorphe de $\{\Re(\lambda) > M\}$ dans l'espace des $(0, p-1)$ formes, en une application méromorphe de $\mathbf{C}$ dans l'espace des $(0,p)$ courants. Pour cela, nous nous donnons une $(n, n-p+1)$ forme à coefficients $\mathcal{C}^\infty$ dans U, ϕ, et nous envisageons le prolongement de l'application

$$\lambda \mapsto \int_{\mathbf{U}} S_f(\lambda) \wedge \phi$$

en une application méromorphe à valeurs complexes. Nous allons utiliser un théorème marteau pilon, le théorème de résolution des singularités d'Hironaka. Si ζ_0 est un point de U appartenant à $\{f_1 \cdots f_p = 0\}$, il existe un voisinage $V(\zeta_0)$ de ζ_0 dans U, une variété analytique complexe $\mathcal{X}$ de dimension n, une application propre π de $\mathcal{X}$ dans $V(\zeta_0)$, telle que π réalise une application biholomorphe entre $\mathcal{X} \setminus \pi^*(V(\zeta_0) \setminus \{f_1 \cdots f_p = 0\})$ et $V(\zeta_0) \setminus \{f_1 \cdots f_p = 0\}$, et que, pour tout $x_0 \in \mathcal{X}$, on puisse écrire, dans une carte locale autour de x_0 où l'on a choisi un système de coordonnées w centré en x_0, on peut écrire

$$\pi^*(f_1 \cdots f_p)(w) = u(w) w_1^{\alpha_1} \cdots w_n^{\alpha_n}, \tag{4.31}$$

où u est une fonction ne s'annulant pas dans la carte et α est un élément de $\mathbf{N}^n$. Pour une référence au théorème de résolution des singularités, on se reportera, outre au travail original d'Hironaka [Hir], aux preuves plus récentes de Bierstone-Milman [BiMi] ou de O. Villamayor [Vil]. Un rappel de l'énoncé tel que nous l'utilisons figure aussi dans [Ati]. On est donc ramené, par pullback des formes et utilisation d'une partition de l'unité relative à un recouvrement de $Supp(\pi^*(\phi))$ par des ouverts de carte, au cas où les f_j sont des fonctions de la forme

$$f_j(w) = u_j(w) w_1^{\alpha_{j,1}} \cdots w_n^{\alpha_{j,n}}.$$

Soit Δ le polyèdre de $(\mathbf{R}^+)^n$ défini comme l'enveloppe convexe de l'ensemble $\bigcup_{j=1}^p (\alpha_j + \mathbf{N}^n)$ dans $(\mathbf{R}^+)^n$. On désigne par $\mathcal{Y}$ une variété torique subordonnée au polyèdre Δ (avec la projection $\tilde{\pi}$ correspondante). Pour la définition de cette notion, on consultera l'appendice à ces notes de cours rédigé par H. Zhang. Dans une carte de cette nouvelle variété (en fait, une copie de $\mathbf{C}^n$), l'application $\tilde{\pi}$ est une transformation monoidale; de plus, la construction de $\mathcal{Y}$ est réalisée de telle manière (voir théorème A. 1.8 de l'appendice) que dans le système de coordonnées de la carte, on ait

$$f_j \circ \tilde{\pi}(t) = v_j(t) f_{j_0} \circ \tilde{\pi}(t) \qquad (4.32),$$

où $j_0 \in \{1, \ldots, p\}$, v_j est une fonction holomorphe (en fait un monôme multiplié par une fonction holomorphe ne s'annulant pas sur le support de $\tilde{\pi}^*(Supp(\phi))$). En fait, cette opération nous permet de nous ramener au cas où $f_1 = m$, avec m monôme et $f_j = mu_j$ sur $\tilde{\pi}^*(Supp(\phi))$. Dès lors, les choses deviennent simples: la forme

$$\lambda \in \mathbf{C} \mapsto \lambda \frac{(-1)^{p(p-1)/2}(p-1)!}{(2i\pi)^p} \|f\|^{2\lambda} \left(\frac{\sum_{k=1}^p (-1)^{k-1} \overline{f}_k d\overline{f}_{[k]}}{\|f\|^{2p}} \right)$$

s'écrit sous la forme

$$\lambda |u|^{2\lambda} \frac{|m|^{2\lambda}}{m^p} \left(\omega_1 + \omega_2 \wedge \frac{\overline{\partial m}}{\overline{m}} \right), \tag{4.33}$$

où u est une fonction holomorphe ne s'annulant pas sur $\tilde{\pi}^*(Supp(\phi))$ et ω_1, ω_2 sont deux formes de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur le même ensemble $\tilde{\pi}^*(Supp(\phi))$.

Il est maintenant facile d'observer, si l'on remonte à $\mathcal{Y}$ via les deux projections successives π et $\tilde{\pi}$, que si h est une fonction holomorphe au voisinage de ζ_0 telle que

$$|h(\zeta)| \leq C_{\zeta_0} \left(\sum |f_j(\zeta)|^2 \right)^{1/2}$$

dans ce voisinage et si ϕ est une $(n, n-p)$ forme à coefficients $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans ce voisinage, alors, on a, dans $\tilde{\pi}^* \circ \pi(supp(\phi))$ et dans une carte de $\mathcal{Y}$

$$\tilde{\pi}^* \circ \pi(h) = m\tilde{h}.$$

Soit Λ l'ensemble des k tels que t_k figure dans m. On a

$$\frac{\overline{\partial m}}{\overline{m}} = \sum_{k \in \Lambda} \gamma_k \frac{d\overline{t}_k}{\overline{t}_k},$$

où les γ_k sont des entiers positifs. Il est facile de voir (en utilisant des intégrations par parties pour chasser les singularités) que pour $k \in \Lambda$, une fonction de la forme

$$\lambda \mapsto \lambda \int |u|^{2\lambda} \frac{|m|^{2\lambda}}{m^p} \left(\omega_1 + \omega_2 \wedge \frac{\overline{\partial t_k}}{\overline{t}_k} \right) \wedge \psi,$$

où ψ est une forme $\mathcal{C}^\infty$ à support compact, ω_1, ω_2 des formes régulières au voisinage de $Supp(\psi)$, et u une fonction holomorphe ne s'annulant pas dans ce voisinage, se prolonge en une fonction méromorphe dans $\mathbf{C}$. De plus, pour $k \in \Lambda$,

$$\lambda \mapsto \lambda \int \lambda |u|^{2\lambda} |m|^{2\lambda} \left(\omega_1 + \omega_2 \wedge \frac{\overline{\partial t_k}}{\overline{t}_k} \right) \wedge \psi$$

se prolonge en une fonction holomorphe au voisinage de $\Re(\lambda) \geq 0$, nulle en 0. Ceci achève bien la preuve du lemme 4.10. $\diamondsuit$

Nous achèverons cette section en revenant sur le lemme 4.10 dans le cas $p = n$, qui correspond au cas que nous avons étudié en priorité tout au long de ce cours. Supposons que $f_1, \ldots, f_n$ soient n fonctions holomorphes au voisinage V de l'origine dans $\mathbf{C}^n$ et définissant l'origine comme zéro isolé. D'après le théorème de Sard (théorème 2.7), l'ensemble des valeurs critiques de l'application

$$\zeta \in \mathbf{C}^n \mapsto (|f_1(\zeta)|^2, \ldots, |f_n(\zeta)|^2)$$

est de mesure nulle dans $\mathbf{R}^n$. En effet, puisque le Jacobien de f n'est pas identiquement nul, cette application est de rang maximal n au voisinage de l'origine. Pour presque tout $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in (\mathbf{R}^+)^n$ (hors d'un ensemble de mesure nulle E), on a

$$|f_j(\zeta)|^2 = \epsilon_j,\ j = 1, \ldots, n \Longrightarrow d(|f_1|^2) \wedge \cdots \wedge d(|f_n|^2)[\zeta] \neq 0.$$

Le sous ensemble G_ϵ des points de V où $|f_j(\zeta)|^2 = \epsilon_j,\ j = 1, \ldots, n,$ est donc une sous variété de dimension réelle n. Supposons que $\rho > 0$ soit tel que $\overline{B(0,\rho)}$ soit inclus dans V et que l'origine soit le seul zéro commun des f_j au voisinage de $\overline{B(0,\rho)}$. Si $\|\epsilon\|$ est suffisamment petit ($\|\epsilon\| \leq r$), alors G_ϵ ne rencontre pas la frontière de la boule de rayon ρ. Si l'on impose de plus $\epsilon \notin E$,

$$\Gamma_\epsilon := G_\epsilon \cap B(0, \rho)$$

est une sous variété compacte de dimension réelle n contenue à l'intérieur de $B(0, \rho)$. On peut définir, pour $\|\epsilon\| \leq r$ et $\epsilon \notin E$, pour h holomorphe au voisinage de $\overline{B(0,\rho)}$,

$$I_f(h; \epsilon) := \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{h(\zeta) d\zeta}{f_1(\zeta) \cdots f_n(\zeta)}. \tag{4.34}$$

Il faut convenir d'une orientation pour le cycle Γ_ϵ; on décide de choisir celle qui a déja été proposée dans la preuve du théorème 4.7. On peut aussi voir le choix de cette orientation différemment: la forme

$$(-i)^n \frac{df_1 \wedge \cdots \wedge df_n}{f_1 \cdots f_n}$$

s'écrit aussi localement sur Γ_ϵ

$$d(Arg(f_1)) \wedge \cdots \wedge d(Arg(f_n))$$

et est donc réelle. On prend l'orientation qui fait de cette forme une forme positive sur Γ_ϵ. Nous avons la proposition importante suivante, déjà mentionnée dans le cas où l'origine est un zéro commun simple des f_j, dans la section 4.3, sous la forme

$$Res_{f,0}(h) = \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_\gamma \frac{h(\zeta) d\zeta}{f_1(\zeta) \cdots f_n(\zeta)},$$

où γ est un n cycle de $B(0, \rho)$ appartenant à la classe d'homologie de $\delta^n \circ \cdots \circ \delta^1[\{0\}]$, avec $\delta^n \circ \cdots \circ \delta^1$ représentant le morphisme itéré de Leray.

Proposition 4.12. *Si h est une fonction holomorphe au voisinage de $\overline{B(0,\rho)}$, la fonction*

$$\epsilon \mapsto I_f(h;\epsilon)$$

est une fonction constante sur $\{\epsilon \notin E; \|\epsilon\| \leq r\}$, identiquement égale sur cet ensemble à $Res_{f,0}(h)$.

Preuve. On peut supposer que $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ et $\epsilon' = (\epsilon'_1, \ldots, \epsilon'_n)$ sont tels que que pour toute sous famille $(\delta_1, \ldots, \delta_n)$ composée d'éléments choisis parmi les ϵ_j et les ϵ'_j, pour tout $j \in \{1 \ldots, n\}$, l'ensemble

$$\Sigma_{\delta,j} := \{|f_k(\zeta)|^2 = \delta_k;\ k \neq j\} \cap B(0,\rho)$$

est une sous variété de dimension réelle $n+1$ de $B(0,\rho)$. Ceci est possible dès que ϵ et ϵ' sont choisis hors d'un ensemble de mesure nulle E' de $(\mathbf{R}^{+*})^n$ (ceci résulte encore du théorème de Sard). Comme deux éléments distincts de $(\mathbf{R}^{+*})^n$ s'approchent par des éléments de $(\mathbf{R}^{+*})^n \setminus (E' \cup E)$, il suffit de montrer que si $\epsilon = \epsilon'$ sont deux éléments de $(\mathbf{R}^{+*})^n \setminus (E' \cup E)$, on a

$$I_f(h;\epsilon) = I_f(h;\epsilon') \tag{4.35}$$

pour conclure au fait que $\epsilon \mapsto I_f(h;\epsilon)$ est constante sur $\{\epsilon \notin E; \|\epsilon\| \leq r\}$ (on raisonne ensuite par perturbation et application du théorème de convergence dominée). On peut raisonner de proche en proche et se contenter de prouver que si $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n)$ et $\epsilon' = (\epsilon'_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n)$, (4.35) est vérifiée. Il suffit pour cela d'appliquer la formule de Stokes sur la variété de dimension $n+1$

$$\widetilde{\Gamma}_\epsilon := \{|f_k(\zeta)|^2 = \epsilon_k;\ k = 2, \ldots, n\} \cap B(0,\rho).$$

On a

$$|I_f(h;\epsilon) - I_f(h;\epsilon')| = \left| \int_{\substack{\widetilde{\Gamma}_\epsilon \\ \{\epsilon_1 \leq |f_1|^2 \leq \epsilon_1'^2\}}} d\left(h \frac{d\zeta}{f_1 \cdots f_n}\right) \right| = 0.$$

Ceci nous montre bien que la fonction $I_f(h;\cdot)$ est constante sur $\{\epsilon \notin E; \|\epsilon\| \leq r\}$.

Il faut maintenant prouver qu'elle vaut $Res_{f,0}(h)$. Pour cela, on considère la fonction d'une variable complexe λ,

$$\lambda \mapsto J_j(\lambda;h;\epsilon) := \lambda \int_{[0,\epsilon_1]} \cdots \int_{[0,\epsilon_n]} (u_1 + \cdots + u_n)^{\lambda - n} I_f(h;u) du_1 \cdots du_n. \tag{4.36}$$

Cette fonction est définie et holomorphe pour $\Re(\lambda) > n-1$ (on rappelle que $I_f(h;\cdot)$ est presque partout une constante $I_f(h)$ qui pourrait, si on le désirait, sortir de l'intégrale (4.36)). On peut écrire, pour $0 < \xi < min(\epsilon_j)$, $J_f(\lambda;h;\epsilon)$ sous la forme

$$\lambda \int_{\substack{u_1,\ldots,u_n \geq 0 \\ u_1 + \cdots + u_n \leq \xi}} (u_1 + \cdots + u_n)^{\lambda - n} I_f(u;h) du_1 \cdots du_n + F_{\epsilon,\xi}(\lambda),$$

où

$$F_{\epsilon,\xi}(\lambda) : \lambda \mapsto \lambda \int_{\substack{u_1 \leq \epsilon_1, \dots, u_n \leq \epsilon_n \\ u_1 + \cdots + u_n \geq \xi}} (u_1 + \cdots + u_n)^{\lambda - n} I_f(u; h) du_1 \cdots du_n$$

est la restriction à $\Re(\lambda) > n - 1$ d'une fonction entière nulle à l'origine (on applique le théorème d'holomorphie des intégrales dépendant d'un paramère). Le changement de variables $u_1 = s_1, u_2 = s_2 - s_1, \dots, u_n = s_n - s_{n-1}$ donne

$$J_f(\lambda; h; \epsilon) - F_{\epsilon,\xi}(\lambda) = \lambda I_f(h) \int_{s_1 \leq \dots \leq s_n \leq \xi} s_n^{\lambda - n} ds_1 \cdots ds_n. \tag{4.37}$$

On transforme cette dernière intégrale grâce au changement de variables $s_n = t_n, s_{n-1} = t_{n-1}s_n, \dots, s_1 = t_1 s_2$, ce qui donne

$$\begin{aligned} J_f(\lambda; h; \epsilon) - F_{\epsilon,\xi}(\lambda) &= \lambda I_f(h) \int_0^1 \cdots \int_0^1 \int_0^\xi t_n^{\lambda-1} t_{n-1}^{n-2} \cdots t_2 dt_1 \cdots dt_n \\ &= \frac{\lambda I_f(h)}{(n-1)!} \int_0^\xi t^{\lambda - 1} dt \\ &= \frac{\lambda I_f(h)}{(n-1)!} |\xi|^\lambda. \end{aligned}$$

On voit ainsi que la fonction $\lambda \mapsto J_f(\lambda; h; \epsilon)$ se prolonge en une fonction entière et que l'on a

$$I_f(h) = J_f(0; h; \epsilon)(n-1)!. \tag{4.38}$$

Nous allons calculer $J_f(\lambda; h; \epsilon)$ différemment pour $\Re(\lambda) > n - 1$. Pour ce faire, posons, pour $\eta \in (\mathbf{R}^{+*})^n$, tel que $\eta - j \leq \epsilon_j$, $j = 1, \dots, n$,

$$\Delta_{\eta,\epsilon} := \{\zeta; \|\zeta\| \leq \rho, \eta_j \leq |f_j(\zeta)|^2 \leq \epsilon_j, j = 1, \dots, n\}.$$

Pour tout $u \in [\eta_1, \epsilon_1] \times \cdots \times [\eta_n, \epsilon_n]$, on a, $(\chi_\nu)_\nu$ désignant (comme dans la preuve du théorème 4.7) une approximation de la fonction caractéristique de $[1, \infty[$,

$$I_f(h, u) = \frac{(-1)^{(n(n-1)/2}}{(2i\pi)^n} \lim_{\nu \to \infty} \int_{\mathbf{C}^n} h \bigwedge_{j=1}^n \overline{\partial}[\chi_\nu(|f_j|^2/u_j)] \frac{d\zeta}{f_1 \cdots f_n}. \tag{4.39}$$

En reportant (4.39) dans l'intégrant figurant à gauche de la formule ci dessous, puis en utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on voit que, si Φ est une fonction de n variables continue au voisinage de $[\eta_1, \epsilon_1] \times \cdots \times [\eta_n, \epsilon_n]$, on a

$$\int_{[\eta_1, \epsilon_1]} \cdots \int_{[\eta_n, \epsilon_n]} \Phi(u) I_f(h; u) du = \lim_{\nu \to \infty} \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{(2i\pi)^n} \int_{\Delta_{\eta,\epsilon}} h \Phi(|f_1|^2, \dots, |f_n|^2) \bigwedge \overline{\partial f_j} \wedge d\zeta. \tag{4.40}$$

Ceci peut être appliqué à la fonction

$$\Phi : u \mapsto \lambda(u_1 + \cdots + u_n)^{\lambda - n}$$

avec $\Re(\lambda) > n$. On trouve ainsi, après avoir fait tendre η vers 0 et appliqué le théorème de convergence dominée

$$J_f(\lambda; h; \epsilon) = \frac{(-1)^{n(n-1)/2}\lambda}{(2i\pi)^n} \int_{\Delta_{0,\epsilon}} h(|f_1|^2, \ldots, |f_n|^2)^{\lambda-n} \bigwedge \overline{\partial f_j} \wedge d\zeta. \tag{4.41}$$

Une application immédiate de la formule de Stokes et du fait que

$$d\left(\|f\|^{2(\lambda-n)} h \left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \overline{f}_k d\overline{f_{[k]}}\right) \wedge d\zeta\right) = \lambda \|f\|^{2(\lambda-n)} \bigwedge_{j=1}^{n} \overline{\partial f_j} \wedge d\zeta$$

donne ainsi

$$J_f(\lambda; h; \epsilon) = \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{(2i\pi)^n} \int_{\partial\Delta_{0,\epsilon}} h\|f\|^{2(\lambda-n)} \left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \overline{f}_k d\overline{f_{[k]}}\right) \wedge d\zeta.$$

On a donc, en tenant compte de (4.38),

$$I_f(h) = \frac{(-1)^{n(n-1)/2}(n-1)!}{(2i\pi)^n} \int_{\partial\Delta_{0,\epsilon}} h \left(\frac{\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \overline{f}_k d\overline{f_{[k]}} \wedge d\zeta}{\|f\|^n}\right). \tag{4.42}$$

Mais la forme intervenant dans l'intégrale (4.42) est fermée dans $B(0, \rho)$ (hors de l'origine). On applique à nouveau Stokes et l'on a

$$I_f(h) = \frac{(-1)^{n(n-1)/2}(n-1)!}{(2i\pi)^n} \int_{\|\zeta\|=\rho} h \left(\frac{\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \overline{f}_k d\overline{f_{[k]}} \wedge d\zeta}{\|f\|^n}\right) \tag{4.43}.$$

On retrouve bien ici la définition de $Res_{f,0}(h)$. $\diamond$

Nous achèverons cette section en démontrant dans un cas particulier le théorème de Briançon-Skoda.

Théorème 4.13. *Soit $(f_1, \ldots, f_n)$ n germes (à l'origine) de fonctions holomorphes de n variables définissant l'origine comme zéro isolé. Soit I l'idéal engendré par $(f_1, \ldots, f_n)$ dans $\mathcal{O}_n$. Alors $\overline{I}^n \subset I$.*

Preuve. On reprendra dans cette preuve tous les éléments introduits après la preuve du lemme 4.10 ci dessus. Pour montrer le résultat, on va montrer que pour tout élément h de $\overline{I}$, pour tout $\phi \in \mathcal{O}_n$, on a $Res_{f,0}(\phi h^n) = 0$. Rappelons que h satisfait une relation

$$h^N + \sum_{k=1}^{N} \alpha_k h^{N-k} \equiv 0, \tag{4.44}$$

avec, pour chaque $k \in \{1, \ldots, N\}$, $\alpha_k \in \mathbf{I}^k$. On a donc une constante C_k telle que, dans un voisinage de 0,

$$|\alpha_k| \leq C_k \|f\|^k. \tag{4.45}$$

Si l'on injecte les inégalités (4.45) dans (4.44), on trouve, au voisinage de 0,

$$|h|^N \leq \sum_{k=1}^{N} C_k |h|^{N-k} \|f\|^k \leq C_0(|h| + \|f\|)^{N-1},$$

soit,

$$|h| \leq C\|f\|$$

pour une certaine constante positive C. Pour prouver le théorème, nous admettrons qu'il existe une suite $(\epsilon_1(p), \ldots, \epsilon_n(p))$, $p \in \mathbf{N}$ tendant vers 0 dans $(\mathbf{R}^{+*}) \setminus E$ (E est l'ensemble exceptionnel de la proposition 4.12), telle que la mesure $\mu_n(\Gamma_{\epsilon(p)})$ de $\Gamma_{\epsilon(p)}$ tende vers 0 lorsque p tend vers l'infini et que, pour tout $j \in \{1 \ldots, n\}$, on ait

$$\epsilon_j(p) \sim \delta_p, \ p \to \infty,$$

$(\delta_p)_p$ désignant une suite arbitraire de nombres strictement positifs tendant vers 0 lorsque p tend vers l'infini. La raison pour cela est une conséquence du théorème de Fubini, la formule des coaires ([Fed], théorème 3.2.11, p 248), qui assure que, pour toute fonction continue à support compact dans $B(0, r)$, on a

$$\left| \int_{\|\epsilon\| \leq r} \mu_n(\Gamma_\epsilon \cap Supp(\phi)) d\epsilon \right| \leq C(n) \left(Max \left[\|\nabla(f_j)(\zeta)\|; \, j = 1, \ldots, n; \, \zeta \in Supp(\phi) \right] \right)^n r^{2n},$$

avec $C(n)$ constante absolue. On peut majorer

$$\left| \int_{\Gamma_{\epsilon(p)}} \frac{h^n \phi d\zeta}{f_1 \cdots f_n} \right| \leq C \mu_n(\Gamma_{\epsilon(p)}) \frac{\left(\sum_{j=1}^{n} \epsilon_j \right)^{1/2}}{\sqrt{\epsilon_1(p) \cdots \epsilon_n(p)}},$$

et l'on conclut en faisant tendre p vers 0 puisque le second membre de (4.46) est équivalent à

$$C \gamma_n \mu_n(\Gamma_{\epsilon(p)}),$$

quantité tendant vers 0 quand p tend vers l'infini. Ceci pouvant être fait avec toute suite $(\delta_p)_p$ tendant vers 0, on en déduit que la fonction presque partout constante $I_f(h^n \phi; \cdot)$ est la fonction nulle, ce qui achève la preuve du théorème 4.13. $\diamondsuit$

Exercices.

1. On considère les polynômes de trois variables

$$P_1(X) := X_2^2,\ P_2(X) := X_3^2,\ P_3(X) = X_2 - X_1X_3.$$

Ces trois polynômes constituent-ils une suite régulière?

2. On considère les trois polynômes

$$P_1(X) := X_2^2,\ P_2(X) = X_3^2,\ P_3(X) = X_1^2 - X_2^6X_3^4.$$

Montrer que (P_1, P_2, P_3) est une application polynomiale propre. Calculer

$$< \overline{\partial}(1/P(X)), Q(X)dX >$$

en fonction des dérivées succesives de Q à l'origine. Calculer la multiplicité d'intersection à l'origine des hypersurfaces définies par ces trois polynômes. Montrer que les polynômes P_0, P_1, P_2, P_3, où

$$P_0(X) = \alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma X_3 + \delta,$$

avec $\delta \neq 0$, n'ont aucun zéro commun. Ecrire explicitement une identité

$$1 = P_0Q_0 + P_1Q_1 + P_2Q_2 + P_3Q_3$$

où les P_j sont des polynômes à coefficients rationnels.

3. On reprend les 3 polynômes de l'exercice 3. On considère la forme différentielle

$$\Omega(\zeta) := \frac{Q(\zeta)d\zeta_1 \wedge d\zeta_2 \wedge d\zeta_3}{P_1(\zeta)P_2(\zeta)P_3(\zeta)}$$

où $Q \in \mathbf{C}[X_1, X_2, X_3]$, et l'on note $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ les hypersurfaces de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ définies comme étant les ensembles de zéros des homogénéisés respectifs de (P_1, P_2, P_3). A quelle condition sur $deg(Q)$ la forme Ω se prolonge t'elle en une forme méromorphe $\tilde{\Omega}$ sur $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, à pôles le long de $\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 \cup \mathcal{D}_3$? Montrer que les $\mathcal{D}_j$ définissent un ensemble de zéros communs fini dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$. Quel est le cardinal de cet ensemble, si l'on intègre les multiplicités? Si Q est de degré au plus 10, montrer que l'on peut interpréter

$$< \overline{\partial}(1/P(X)), Q(X)dX >$$

comme un certain résidu à l'infini.

4. Soient $P_1, \ldots, P_n$ n polynômes de n variables dont les homogénéisés définissent un ensemble fini dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$. On note μ le maximum des multiplicités d'intersection aux zéros communs des homogénéisés $\mathcal{P}_j$ situés à l'infini (c'est à dire dans l'hyperplan $X_0 = 0$). On suppose $\sum(deg(P_j)) - n - 1 - \mu > 0$. Montrer que pour tout polynôme Q tel que $deg(Q) \leq \sum(deg(P_j)) - n - 1 - \mu$, on a

$$< \overline{\partial}(1/P(X)), Q(X)dX >= 0.$$

Retrouver le résultat de Jacobi.

DEA de Mathématiques Pures

Module: courants résidus et applications

Session de Juin 94
Durée 4 heures
Documents autorisés

N.B. La question 7 peut être considérée comme un exercice indépendant si l'on admet la conclusion de la question 6.

1. Soient $f_1, \ldots, f_n$ n fonctions holomorphes de n variables au voisinage de l'origine dans $\mathbf{C}^n$. On admettra que le Jacobien de $(f_1, \ldots, f_n)$ n'est pas identiquement nul au voisinage de l'origine et que l'origine est un zéro commun isolé de $(f_1, \ldots, f_n)$. Montrer qu'il existe $\rho > 0$, $r > 0$ et E, sous ensemble de mesure de Lebesgue nulle dans $(\mathbf{R}^{+*})^n$, tels que l'origine soit le seul zéro commun aux f_j au voisinage de $\overline{B(0,\rho)}$ et que, pour tout $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in (\mathbf{R}^{+*})^n \setminus E$, avec $\|\epsilon\| \leq r$, l'ensemble

$$\{\zeta;\ \|\zeta\| < \rho,\ |f_1(\zeta)|^2 = \epsilon_1, \ldots, |f_n(\zeta)|^2 = \epsilon_n\}$$

soit une variété compacte Γ_ϵ de dimension réelle n contenue à l'intérieur de la boule de centre 0 et de rayon ρ.

On conviendra d'orienter Γ_ϵ de manière à ce que

$$\frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{df_1 \wedge \cdots \wedge df_n}{f_1 \cdots f_n} > 0.$$

2. Soit h une fonction holomorphe au voisinage de la boule fermée de centre l'origine et de rayon ρ. On suppose que $\epsilon := (\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n)$ et $\epsilon' := (\epsilon'_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n)$ sont deux éléments de $(\mathbf{R}^{+*})^n \setminus E$ de norme inférieure à r. On suppose que l'ensemble

$$\{\|\zeta\| < \rho;\ |f_j(\zeta)|^2 = \epsilon_j, j = 2, \ldots, n\}$$

est une sous variété $\widetilde{\Gamma}_\epsilon$ de dimension réelle $n+1$ de $\{\|\zeta\| < \rho\}$. En appliquant la formule de Stokes sur la variété $\widetilde{\Gamma}_\epsilon$, montrer que l'on a

$$\frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{h(\zeta) d\zeta_1 \wedge \cdots d\zeta_n}{f_1 \cdots f_n} = \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{\Gamma_{\epsilon'}} \frac{h(\zeta) d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n}{f_1 \cdots f_n}.$$

3. On prend h comme dans la question précédente. On admettra que la fonction définie sur $\{\epsilon \in (\mathbf{R}^{+*})^n \setminus E,\ \|\epsilon\| \leq r\}$ par

$$\epsilon \mapsto I_f(h; \epsilon) := \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{h(\zeta) d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n}{f_1 \cdots f_n}$$

est constante et que le volume de la variété Γ_ϵ tend vers 0 lorsque $\|\epsilon\|$ tend vers 0. On suppose qu'il existe une constante positive C telle que, au voisinage de 0,

$$|h(\zeta)| \leq C \left(\sum_{j=1}^{n} |f_j(\zeta)|^2 \right)^{1/2} .$$

Montrer qu'alors, pour toute fonction ϕ holomorphe au voisinage de $\overline{B(0,\rho)}$, la fonction

$$\epsilon \mapsto I_f(h^n \phi; \epsilon)$$

est la fonction nulle sur $\{\epsilon \in (\mathbf{R}^{+*})^n \setminus E;\ \|\epsilon\| < r\}$.

4. On reprend maintenant une fonction h quelconque, toujours holomorphe au voisinage de la boule fermée de rayon ρ. On fixe maintenant ϵ dans $\{\epsilon \in (\mathbf{R}^{+*})^n \setminus E;\ \|\epsilon\| < r\}$. On rappelle que la fonction

$$u \mapsto I_f(h; u)$$

est presque partout constante sur $[0, \epsilon_1] \times \cdots \times [0, \epsilon_n]$. On définit, pour $\lambda \in \mathbf{C}$ de partie réelle assez grande, la fonction

$$\lambda \mapsto J_f(\lambda; h; \epsilon) := \lambda \int_{[0,\epsilon_1]} \cdots \int_{[0,\epsilon_n]} (u_1 + \ldots + u_n)^{\lambda - n} I_f(h; u) du_1 \cdots du_n.$$

Montrer que cette fonction est bien définie pour $\Re(\lambda) > n$ et que, pour $\xi > 0$ assez petit et $\Re(\lambda) > n$, on peut écrire

$$J_f(\lambda; h; \epsilon) = \lambda \int_{\substack{u_1,\ldots,u_n \geq 0 \\ u_1+\cdots+u_n \leq \xi}} (u_1 + \ldots + u_n)^{\lambda - n} I_f(u; h) du_1 \cdots du_n + F_{\epsilon,\xi}(\lambda),$$

ou $F_{\epsilon,\xi}$ est une fonction entière. En utilisant le changement de variables $u_1 = s_1, u_2 = s_2 - s_1, \ldots, u_n = s_n - s_{n-1}$, exprimer différemment $J_f(\lambda; h; \epsilon) - F_{\epsilon,\xi}(\lambda)$. En déduire que la fonction $\lambda \mapsto J_f(\lambda; h; \epsilon)$ est une fonction holomorphe dans le demi plan $\Re(\lambda) > 0$ et ayant une limite en 0 (que l'on calculera en fonction de la valeur de la fonction presque partout constante $I_f(\cdot\,; h)$).

5. On prend h comme dans la question précédente. On admettra que pour tout ϵ de norme inférieure ou égale à r, pour tout $\eta \in (\mathbf{R}^{+*})^n$ tel que $\eta_j < \epsilon_j$, $j = 1, \ldots, n$, pour toute fonction ϕ continue au voisinage de $[\eta_1, \epsilon_1] \times \cdots \times [\eta_n, \epsilon_n]$, on a

$$\int_{\eta_1}^{\epsilon_1} \cdots \int_{\eta_n}^{\epsilon_n} \phi(u) I_f(u; h) du_1 \cdots du_n = \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{(2i\pi)^n} \int_{\Delta_{\eta,\epsilon}} h\phi(|f_1|^2, \ldots, |f_n|^2) \bigwedge_{j=1}^{n} \overline{\partial f_j} \wedge d\zeta,$$

où

$$\Delta_{\eta,\epsilon} := \{\zeta; \|\zeta\| < \rho,\, \eta_j \leq |f_j|^2 \leq \epsilon_j,\, j = 1, \ldots, n\}.$$

Déduire de cela que, pour $\Re(\lambda)$ suffisamment grand,

$$J_f(\lambda; h; \epsilon) = \lambda \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{(2i\pi)^n} \int \cdots \int_{\Delta_{0,\epsilon}} h(|f_1|^2 + \cdots + |f_n|^2)^{\lambda - n} \bigwedge_{j=1}^{n} \overline{\partial f_j} \wedge d\zeta.$$

Calculer, pour $\Re(\lambda)$ assez grand $\overline{\partial}_\zeta [h\Omega_{f,\lambda}]$, où

$$\Omega_{f,\lambda} := \left(\sum_{j=1}^{n} |f_j|^2 \right)^{\lambda - n} \left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \overline{f}_k d\overline{f}_{[k]} \right) \wedge d\zeta_1 \wedge \cdots d\zeta_n.$$

Expliquer pourquoi

$$\int_{\partial \Delta_{0,\epsilon}} h\Omega_{f,0} = \int_{\partial B(0,\rho)} h\Omega_{f,0}.$$

En déduire que la valeur de la fonction $I_f(h; \cdot)$ est égale à $Res_{f,0}(h)$.

6. On note $\mathcal{I}$ l'idéal engendré par les germes des f_k, $k = 1, \ldots, n$, dans l'anneau $\mathcal{O}$ des germes de fonctions holomorphes à l'origine. Soit h une fonction holomorphe au voisinage de l'origine et telle qu'il existe une relation

$$h^N(\zeta) - \sum_{p=1}^{N} \alpha_p(\zeta) h^{N-p}(\zeta) \equiv 0,$$

valable au voisinage de l'origine, où les α_p sont des fonctions holomorphes au voisinage de l'origine, avec $\alpha_p \in \mathcal{I}^p$. Montrer qu'alors, il existe une constante C telle que l'on ait, dans un voisinage de l'origine,

$$|h(\zeta)| \leq C \left(\sum_{j=1}^{n} |f_j|^2 \right)^{1/2}.$$

En déduire (en utilisant les questions 4, 5, et une proposition du cours que l'on citera) qu'alors $h^n \in \mathcal{I}$.

7. Soit Q le polynôme de deux variables

$$Q(X_1, X_2) := X_1^4 - X_2^4 - X_1^2 X_2 - X_2^3 X_1.$$

On note P_1 et P_2 les deux dérivées partielles de Q. Montrer, en utilisant le résultat de la question 6, que $Res_{P,0}(Q^2) = 0$. Montrer que l'application (P_1, P_2) est propre. Y a t'il des zéros à l'infini? Quel est le degré du polynôme

$$(u_1, u_2) \mapsto < \overline{\partial} \left(\frac{1}{P(X) - u} \right), Q^2(X) dX >?$$

Calculer enfin

$$< \overline{\partial}(1/P(X)), q(X) dX >$$

si q est un polynôme de degré au plus 3.

Références bibliographiques.

On se reportera aux ouvrages (ou articles de synthèse) suivants pour compléter ces notes de cours.

[Aiz] L. A. Aizenberg & A. P. Yushakov, *Integral representation and residues in multidimensional complex Analysis*, Amer. Math. Soc., Providence, 1983.

[AizT] L. A. Aizenberg, A. K. Tsikh & A. P. Yushakov, *Multidimensional Residues and Applications*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 8, Springer-Verlag 1994.

[AG] B. Angéniol & M. Lejeune-Jalabert, *Calcul différentiel et classes caractéristiques en géométrie algébrique*, Travaux en cours, 38, Hermann, Paris, 1989.

[BGVY] C. A. Berenstein, R. Gay, A. Vidras & A. Yger, *Residue currents and Bezout identities*, Progress in Mathematics 114, Bikhäuser, 1993.

[CoH] N. Coleff & M. Herrera, *Les courants résidus associés à une forme méromorphe*, Lect. Notes in Math. 633, Springer Verlag, New York, 1978.

[CLO] D. Cox, J. Little & D. O'Shea, *Ideals, Varieties and Algorithms*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer Verlag, 1991.

[DeRham] G. De Rham, *Variétés différentiables, Formes, Courants, Formes harmoniques*, Actualités Sci. Indust. 1222, Hermann, Paris, 1955.

[Fult] W. Fulton, *Introduction to Toric varieties*, Annals of Mathematics Studies 131, Princeton University Press, 1993.

[GrH] P. Griffiths & J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley-Interscience, New York, 1978.

[Har] R. Hartshorne, *Residus et dualité*, Lect. Notes in Math. 20, Springer Verlag.

[Ho1] L. Hörmander, *An Introduction toComplex Analysis in Several Complex Variables*, North Holland, Amsterdam, 1973.

[Jouan] J. P. Jouanolou, *Théorèmes de Bertini et applications*, Progress in Mathematics 42, Bikhäuser, 1983.

[KM] G. Kempf, D. Mumford, B. Saint Donnat & F. Knudsen, Toroidal embedding, Lect. Notes in Math. 339, Springer-Verlag, New York, 1973.

[Lip] J. Lipman, *Residues and Traces of Differential Forms via Hochschild Homology*, Contemporary Mathematics, 61, American Mathematical Society, Providence, 1987.

[0] T. Oda, *Lectures on torus embeddings and applications*, Publications of the Tata Institute, Springer-Verlag, 1978.

[Ts] A. Tsikh, *Multidimensional Residues and Their Applications*, Translations of Mathematical Monographs, American Mathematical Society, 1992.

Les articles suivants nous ont également servi de support.

[Ang] B. Angeniol, Résidus et effectivité, preprint ENS 1984.

[Ati] M. F. Atiyah, Resolution of singularities and division of distributions, Commun. Pure Appl. Math. 23 (1970), 145-150.

[Bass] H. Bass, E. Connel, D. Wright, The Jacobian Conjecture; reduction of degree and formal expansion of the inverse, Bull. Amer. Math. Soc. 7 (1982), 287-330.

[BCRS] E. Becker, J. P. Cardinal, M. F. Roy & Z. Szafraniec, Multivariate Bezoutians, Kronecker symbol and Eisenbud-Levin formula, Proceedings of MEGA94.

[Bern] B. Berndtsson, Integral formulas on projective space and the Radon transform of Gindikin-Henkin-Polyakov, Publications Mathematices, 32, 1988.

[Bier] G. Biernat, On the sum of residues for a polynomial mapping, Bulletin de la Société des Sciences et des Lettres de Lodz, 40, 18 (1990), 73-83.

[Bier1] G. Biernat, La représentation paramétrique d'un résidu multidimensionnel, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. , 36 (1991), 207-211.

[BiMi] E. Bierstone & P. Milman, Uniformization of Analytic Spaces, J. Amer. Math. Soc. 2 (1989), 801-836.

[CDS] E. Cattani, A. Dickenstein, B. Sturmfelds, Computing Multidimensional Residues, Proceedings of MEGA94.

[DC] A. Dickenstein & C. Sessa, An effective residual criterion for the Membership problem in $\mathbf{C}[X_1, \ldots, X_n]$, J. Pure and Applied Algebra 74 (1991).

[DF] A. Dickenstein & N. Fitchas, The Membership problem for unmixed ideals is solvable in single exponential time, Discrete Applied Mathematics, 33 (1991).

[Gr1] P. Griffiths, Variations on a Theorem of Abel, Inventiones math. 35, 321 (1976), 321-390.

[Hi] H. Hironaka, Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic 0, I, II, Annals of Math. 79 (1964), 109-326.

[Hop] G. Hopkins, An algebraic approach to Grothendieck's residue symbol, Transactions of the American Mathematical Society, 275, 2 (1983).

[Jel] Z. Jelonek, The set of points at which a polynomial map is not proper, Annales Polonici Mathematici 48, 3 (1993), 259-266.

[Kov1] A. G. Khovanskii, Newton Polyedra and the Euler-Jacobi Formula, Russian Math. Surveys 33, 6 (1978), 237-238.

[Kov2] A. G. Khovanskii, Newton polyedra and toric manifolds, Fonctional Anal. Appl. 11 (1977), 289-296.

[Kov3] A. G. Khovanskii, Newton polyedra and the genus of complete intersections, Functional Anal. Appl. 12 (1978), 38-46.

[KK] M. Kreutzer & E. Kunz, Traces in strict Frobenius algebras and strict complete intersections, J. reine angew. Math. 381 (1987), 181-204.

[Kyt] A. M. Kytmanov, A transformation formula for Grothendieck residues and some of its applications, Siberian Math. Journal, 1989, 495-499.

[LT] J. Lipman & B. Teissier, Pseudo-Rational local rings and a theorem of Briançon-Skoda about integral closures of ideals, Michigan Math. J. 28 (1981), 97-116.

[Ploski] A. Ploski, A note on a formula of Jacobi, preprint, 1993.

[Ploski1] A. Ploski, On the growth of proper polynomial mappings, Ann. Pol. Math. 45 (1985), 297-309.

[Sard] A. Sard, The measure of the critical values of differential maps, Bull. Amer. Math. Soc. 48 (1942), 883-890.

[S] A. Seidenberg, Constructions in Algebra, Trans. Amer. Math. Soc. 197 (1974), 273-313.

[Vil] O. Villamayor, Patching local uniformizations, Annales de l'Ecole Normale Supérieure, 25, 6 (1992), 629-678.

[Yger] A. Yger, Introduction à la géométrie analytique complexe et à ses applications en arthmétique, Cours DEA, Ecole Doctorale de Mathématiques, Bordeaux, 91-92.