

L'analyse des signaux ou des images en temps,  
échelles, fréquences, et son application à  
l'électrocardiographie ou à l'imagerie médicale,  
exposé à l'INSERM, UR 523, Hôpital de la  
Salpêtrière, Mars 2001

Alain Yger

## 1 Analyse fréquentielle d'un signal ; stationnarité, non-stationnarité

L'un des concepts mathématiques les plus importants inhérents à la notion de signal digital est celui de *stationnarité* ; nous allons ici préciser les deux aspects de ce concept, l'aspect déterministe et l'aspect probabiliste.

Rappelons tout d'abord qu'un *signal déterministe* est la donnée (quantifiée dans un système d'unités de mesure) d'une information temporelle. Certains signaux déterministes correspondent à la donnée de la suite des valeurs enregistrées (et affichées) aux instants  $n\tau$ , où  $\tau$  désigne un pas temporel, d'un phénomène physique (le tracé d'un *électrocardiogramme* en est un bon exemple) ; d'autres modèles de signaux déterministes sont ceux que l'on déduit de tels enregistrements via une construction basée sur un processus algorithmique adapté à l'information que l'on souhaite extraire du signal préalablement enregistré (et soumis à l'étude). Ainsi par exemple, peut-on extraire du tracé d'un électrocardiogramme un signal digital  $s$  dit *tachogramme*, où, pour chaque unité temporelle  $n$ ,  $s(n)$  désigne la distance entre le  $n^{\text{ème}}$  pic du tracé de l'électrocardiogramme en question et le suivant ; l'analyse d'un tel signal digital (en un sens, construit artificiellement sur la base de la donnée d'un signal déterministe préalablement enregistré) est l'un des fondements de l'étude de la *variabilité du rythme cardiaque* ("Heart Rate Variability", ou encore **HRV**), et elle nous servira à illustrer cet exposé.

Un signal déterministe est stationnaire (sur la plage temporelle ou il est mesuré ou représenté, disons entre  $t = 0$  et  $t = N\tau$  s'il s'agit d'un signal échantillonné, puis mesuré, ou entre les points numérotés de 1 à  $N$  s'il s'agit d'un signal digital du second type évoqué ci-dessus) si ce signal se présente (tout au long du champ d'étude) comme l'*empilement* d'un nombre *fini* de signaux périodiques élémentaires, affectés éventuellement de faibles modulations d'amplitude et de phase, c'est à dire de signaux du type

$$n\tau \mapsto s_\omega(n\tau) = a_\omega(n\tau) \sin(\omega n\tau + \varphi_\omega(n\tau)), \quad n = 0, \dots, N, \quad (1)$$

dans le premier cas, ou

$$n \mapsto s_\omega(n) = a_\omega(n) \sin(\omega n + \varphi_\omega(n)) \quad (2)$$

dans le second cas ; un signal du type (1) ou (2) est dit signal élémentaire (ou encore *onde élémentaire*) de *pulsation* (ou fréquence  $\omega$ ), d'*amplitude* (resp. de *phase*) modérément modulées les fonctions  $n\tau \mapsto a_\omega(n\tau)$  ou  $n \mapsto a_\omega(n)$  (resp.  $n\tau \mapsto \varphi_\omega(n\tau)$  ou  $n \mapsto \varphi_\omega(n)$ ). Même si l'on tolère de faibles modulations d'amplitude et de phase, exiger la stationnarité d'un signal digital sur une plage temporelle demeure une contrainte drastique ; par exemple, la plupart des signaux générés à partir de la mesure de phénomènes de nature physiologique y échappent. Le modèle le plus fréquent que l'on puisse proposer est celui de signaux pour lesquels on puisse faire l'hypothèse de stationnarité déterministe sur des plages temporelles consécutives  $I_1, \dots, I_k$ , ces plages se trouvant séparées entre elles par des périodes transitoires, où se produisent soit des évolutions linéaires de fréquence, soit des décrochages brutaux suivies de sauts d'un ensemble de fréquences à un autre, de nouvelles fréquences pouvant apparaître (d'un coup ou progressivement) au seuil de chaque nouvelle plage temporelle  $I_k$  pour s'y imposer de manière sensiblement constante avant de disparaître au seuil de la plage suivante  $I_{k+1}$ . Même un tel modèle implique trop de rigidité en ce qui concerne les signaux de nature physiologique : bien souvent, les fréquences fluctuent dans chaque zone  $I_k$  dans un intervalle compris entre deux valeurs  $\omega_{k,-}$  et  $\omega_{k,+}$  ; tel est par exemple le cas pour les signaux digitaux supportant l'étude de la **HRT**, où, on le verra, trois plages de fréquences (très basses fréquences, autour de .00 – .05 Hertz, basses fréquences, sensiblement autour de .05 – .13 Hertz et hautes fréquences, localisées autour de .20 – .27 Hertz, voir par exemple les résultats expérimentaux rappelés dans [5] ainsi que la riche bibliographie de cet article) se trouvent en général mises en évidence. Les signaux de parole, par contre, se plient de manière plus convenable à ce modèle inspiré du découpage temporel en plages successives où serait valide une hypothèse de stationnarité au sens déterministe ; cependant les outils mathématiques intéressants du point de vue de la segmentation intelligente et de l'analyse-synthèse de la parole semblent malheureusement hautement non adaptés à l'étude de signaux du type de ceux intervenant dans l'étude de la **HRV** ou de la **SAP** ("systolic arterial pressure") ou dans celles, dont on suppose qu'elles lui sont corrélées, de la **SND** ("sympathetic neural discharge") ou **VND** ("vagal neural discharge"), ou des signaux provenant des enregistrements de la réponse du potentiel électrique de la peau (**SPR**), ce qui confirme bien qu'un modèle aussi simpliste n'est pas adéquat pour l'étude de tels phénomènes ; en revanche, au contraire des signaux totalement chaotiques (à spectre essentiellement constant, tels les signaux correspondant au bruit), il semble que les signaux physiologiques que nous venons d'évoquer (tout au moins en ce qui concerne les signaux de **HRV** et de la **HRV**) obéissent à des règles de cohérence au niveau de l'analyse fréquentielle, ou plutôt au niveau de ce que l'on appelle communément l'analyse **TEMPS-FRÉQUENCES** (suivi du contenu fréquentiel du signal au cours du temps, sur le modèle de la partition musicale par exemple).

À côté du point de vue déterministe, l'étude des signaux de nature physiologique, tout comme les fondements mathématiques de l'imagerie médicale, nous obligent fréquemment à penser une information de manière stochastique, et ce pour deux raisons.

-La première est que l'on souhaite, s'agissant de l'analyse des signaux ou des images de nature physiologique, obtenir une description "en moyenne" du contenu fréquentiel d'un signal ou de l'image lorsque celui-ci (ou celle-ci) est analysée pendant une longue période temporelle (ou sur un champ spatial suffisamment large) ; on peut aussi en-

visager un test statistique portant sur la même information enregistrée sur divers patients. L'information recueillie au niveau de l'analyse fréquentielle s'apparente alors à une analyse statistique. Le signal digital est pensé comme un *processus discret*, ce qui signifie que sa valeur à l'instant  $n\tau$  (ou  $n$ ) n'est plus pensée comme une valeur déterministe, mais comme une valeur aléatoire; le processus se trouve régi suivant l'état des lois conjointes qui lient entre eux ces divers aléa, et ce sont ces règles que l'analyse mathématique permet d'explorer. Le processus est qualifié de *stationnaire au sens stochastique* si la loi conjointe d'un paquet de tels aléa ne dépend pas de l'instant où l'on translate ce paquet dans le temps; cette hypothèse est celle que l'on se doit de faire en tout état de cause; elle reflète l'hypothèse naturelle qui est que les phénomènes physiologiques obéissent, tout au moins du point de vue statistique, à une cohérence au niveau de leur contenu fréquentiel, ce qui équivaut à dire que, statistiquement du moins, ils sont régis par des "boîtes noires", c'est à dire des systèmes agissant de manière linéaire, continue, et sans que les paramètres du système ne subissent (en moyenne tout au moins) de détérioration significative au cours du temps. Un tel processus a alors une *densité spectrale de puissance (PSD)* dont les pics reflètent la position des fréquences statistiquement présentes dans le signal et le poids "statistique" de ces fréquences dans le contenu du signal (c'est à dire les amplitudes moyennes dont les phénomènes périodiques ayant ces pulsations sont affectés). Il est capital de souligner qu'il s'agit là uniquement de l'analyse statistique du contenu fréquentiel d'un signal sur des plages temporelles assez longues, et non de l'analyse du contenu fréquentiel du signal au cours de son évolution temporelle, information autrement plus riche, mais évidemment autrement *a priori* moins cohérente. Pour illustrer la différence fondamentale entre ces deux points de vue, voici, sur la figure 1, le tracé de deux tachogrammes, correspondant tous deux à deux séquences de 1025 battements; ces deux tachogrammes se présentent *de visu* de manière différente, comme on le voit sur la figure.

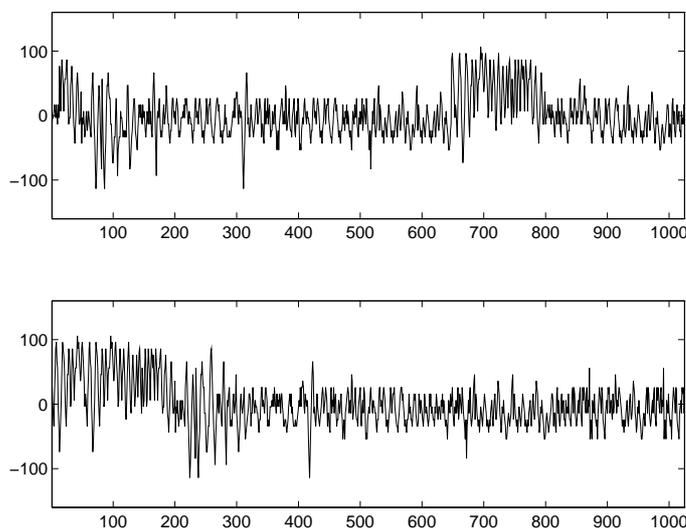


FIG. 1 – tachogrammes  $a7$  (en haut) et  $a10$  (en bas)

Les deux analyses statistiques fréquentielles (c'est à dire les deux calculs de densité spectrale de puissance) pour ces signaux respectifs  $a7$  et  $a10$  sont représentées sur la figure 2, et l'on voit qu'ils se superposent de manière raisonnable, tout au moins en ce qui concerne les successions de pics entre 5 et 15 (soit ici .05 Hertz et .15 Hertz),

puis entre 20 et 30 (soit entre .2 et .3 Hertz) ; sur l'échelle ici, l'unité 50 en abscisse représente .50 Hertz, le pas "temporel" étant normalisé à 1.

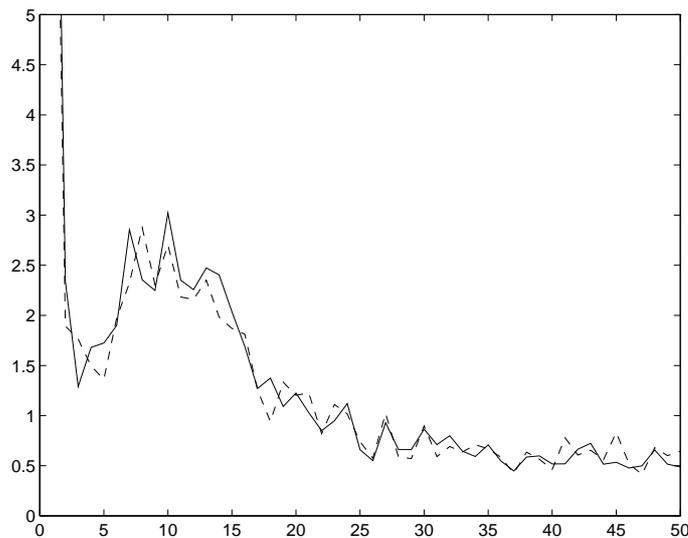


FIG. 2 – PSD des tachogrammes *a7* (en plein) et *a10* (en pointillé)

En revanche, une modification sensible du contenu statistique fréquentiel est difficilement visible sur les signaux eux-mêmes ; voici par exemple, sur la figure 3, les deux tachogrammes *a7* et *a8*, où l'on remarque (figure 4) qu'il y a translation du contenu fréquentiel vers les basses fréquences (lorsque l'on passe du tachogramme *a7* au tachogramme *a8*) ; nous reviendrons sur ces exemples et mettrons mieux en lumière l'évolution fréquentielle (au cours du temps cette fois, et non seulement du point de vue statistique) qui marque le tachogramme correspondant à la séquence de battements cardiaques d'où *a8* a été déduit.

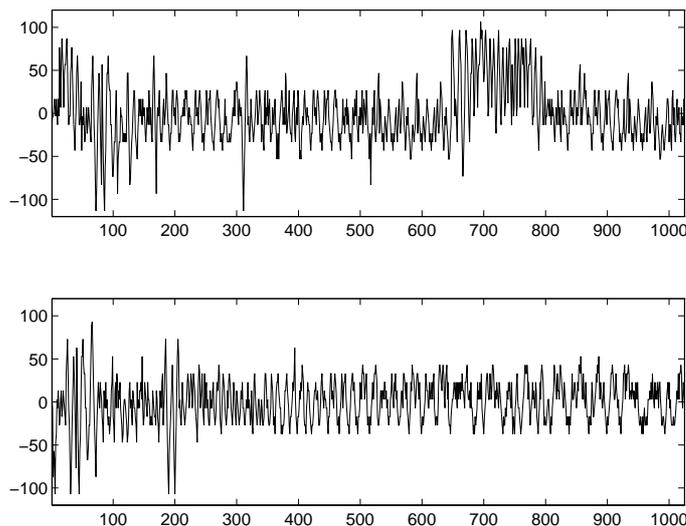


FIG. 3 – tachogrammes *a7* (en haut) et *a8* (en bas)

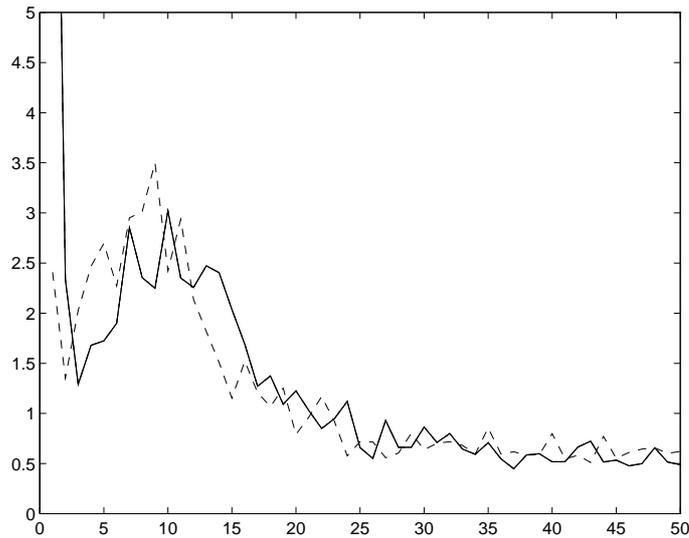


FIG. 4 – PSD des tachogrammes  $a7$  (en plein) et  $a8$  (en pointillé)

– La seconde raison majeure pour laquelle il est souvent capital (dans l’analyse ou le traitement des signaux de nature physiologique) de raisonner en termes de données de nature statistique et non plus déterministe est que les données que l’on tente de capter en imagerie médicale (par exemple en tomographie classique, où en gammagraphie par ouverture de codage, sur le principe des techniques introduites par J. Fontroget, L. Garnero, J. Brunol, N. de Beaucoudray, voir les références [1], [7], [8]) correspondent en général à un *bruit poissonnien d’émission* : la quantité de photons émise par exemple par l’organe chargé en un point  $P$  et appelée à traverser le code  $C$  pour être captée sur l’écran récepteur au point  $M$  (voir la figure 23) ou par l’un des collimateurs ( $c$ ) de la caméra suit un processus de Poisson dont le paramètre dépend à la fois de la densité de rayonnement de l’organe chargé et de la position du point émetteur  $M$  par rapport au code ou au système de collimateurs de la caméra. Analyser l’image et l’inverser via les transformations mathématiques adéquates (inversion de la transformation de Radon, déconvolution, matching-pursuit suivant un dictionnaire adapté à la pathologie à détecter, nous en reparlerons) permet précisément de calculer ce paramètre et d’en déduire la position du point émetteur, par là même de reconstituer en trois dimensions l’organe émetteur ou les pathologies éventuelles de cet organe ; pour donner un exemple inspiré de la scintigraphie cardiaque, la détermination de nécroses sur la paroi du ventricule illustre bien ces diverses méthodes où certains algorithmes mathématiques peuvent s’avérer d’un certain secours, pourvu qu’ils soient utilisés de manière inter-active.

## 2 Un exemple d’analyse temps-fréquences ; tachogrammes déduits de séquences de battements cardiaques

Activité respiratoire et activité vasomotrice sont responsables tant des fluctuations du rythme cardiaque que de celles de la pression artérielle ; le couplage (hypothétique) entre l’inter-réciprocité de ces deux actions et l’inter-réciprocité des deux

actions au niveau neuronal cette fois que synthétise la *balance sympathico-vagale* (modulée, elle, par les interactions du système nerveux autonome et des mécanismes d'excitation ou d'inhibition périphériques, matérialisés par la mesure de signaux du type  $\mathbf{SPR}^-$  ou  $\mathbf{SPR}^+$ ) est la raison majeure de l'étude de signaux du type tachogramme ( $\mathbf{RR}$ ) ou pression artérielle ( $\mathbf{SAP}$ ), signaux en relation avec la  $\mathbf{HRV}$ , ce –si tant est que cela est possible– en parallèle avec celle des indicateurs de la balance sympathico-vagale, c'est à dire l'analyse des signaux correspondant à la mesure des décharges sympathiques ( $\mathbf{SND}$ ) ou vagues ( $\mathbf{VND}$ ), ou à celle des signaux dont on sait que leur interaction contribue à la modulation de cette balance, comme par exemple les signaux d'inhibition ou d'excitation périphériques quantifiés par la mesure du potentiel électrique de la peau ( $\mathbf{SNP}^-$  ou  $\mathbf{SNP}^+$ ). La conclusion ultime serait que l'activité vagale serait en phase avec le “marqueur” HF (hautes-fréquences) que représente l'activité respiratoire dans l'analyse de la  $\mathbf{HRV}$ , tandis que l'activité sympathique serait elle en phase avec le “marqueur” LF (basses-fréquences) correspondant au rythme des ondes vasomotrices dans cette même analyse de la  $\mathbf{HRV}$ .

Il est évident qu'une analyse fréquentielle de nature statistique de ce type de signaux n'est pas en mesure de rendre compte (en particulier dans l'analyse de séquences relativement courtes où le patient est soumis à divers stimuli) du parallélisme entre les deux phénomènes que sont le rythme cardiaque d'un côté, la balance sympathico-vagale de l'autre. Il est donc indispensable de faire appel ici à l'analyse temps-fréquences et d'examiner ce que fournit la lecture en ce sens de l'une des familles des signaux dont l'évolution serait à comparer ; nous prendrons ici la famille des tachogrammes, car elle nous paraît (dans un premier temps), celle pour laquelle la fiabilité de la mesure semble la meilleure. Le premier test est donc de voir comment les mathématiques réagissent à cette exigence d'analyse ; l'une des seules choses que nous souhaiterions mettre en évidence ici est que l'analyse mathématique de tachogrammes peut rendre compte, effectivement, de certaines évolutions en temps et en fréquences. Même si la lecture des tachogrammes s'avère, comme l'est la lecture de la majeure partie des signaux de nature physiologique, au premier abord excessivement confuse, divers outils à la disposition du mathématicien peuvent permettre d'en améliorer la clarté. Nous mettrons ensuite au paragraphe suivant ces outils en complémentarité avec ceux que propose non plus l'analyse **TEMPS-FRÉQUENCES**, mais cette fois l'analyse **TEMPS-ÉCHELLES** (analyse qui, elle, nous semblerait mieux adaptée à l'étude des signaux de la seconde catégorie, c'est à dire ceux relevant de l'activité commandée par le système neuronal et les stimuli qui l'affectent).

Il est intéressant de souligner que les divers outils mathématiques mis en oeuvre pour rendre compte de l'évolution des tachogrammes en temps et en fréquence (c'est à dire, de manière imagée, pour visualiser la “partition” correspondant à un tachogramme donné) sont les mêmes que ceux que l'on tente d'exploiter pour analyser les signaux de vitesse ou de pression dans les écoulements turbulents, régis, eux, par le système d'équations dit de Navier-Stokes, systèmes dont on ne sait que très peu de chose de la décomposition des solutions en composants élémentaires (si ce n'est au niveau de la simple lecture expérimentale).

Voici pour commencer l'exemple d'un tachogramme ( $a1$ ) à peu près stationnaire (même au sens déterministe) ; nous avons représenté sur la figure 5 le signal (en haut), puis sa densité spectrale de puissance (que nous avons volontairement confronté

à celle de  $a7$ ); un pic évident est présent dans l'analyse fréquentielle statistique, matérialisant la présence (en moyenne) d'une composante fréquentielle (plutôt ici LF, comme on le verra à la lumière des exemples suivants), présence qui se trouve confirmée à la lecture de l'image temps-fréquences (temps en abscisses, fréquences en ordonnées, des basses fréquences en haut aux hautes fréquences en bas) que propose la figure 6.

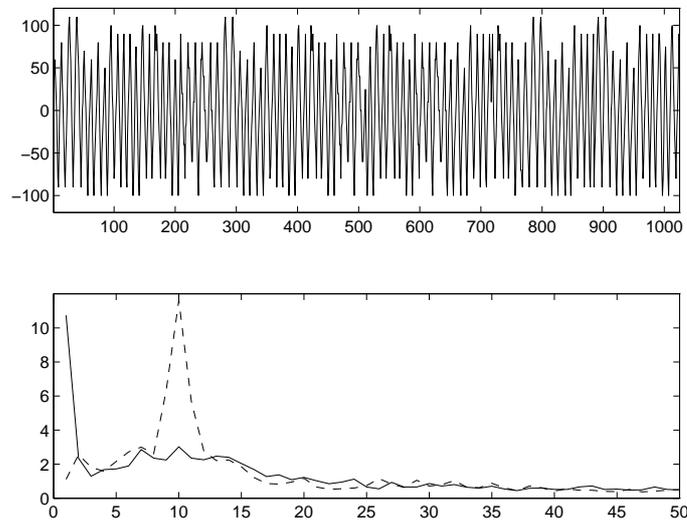


FIG. 5 – tachogramme  $a1$  (en haut) et sa PSD (en pointillé en bas, contre celle de  $a7$ )

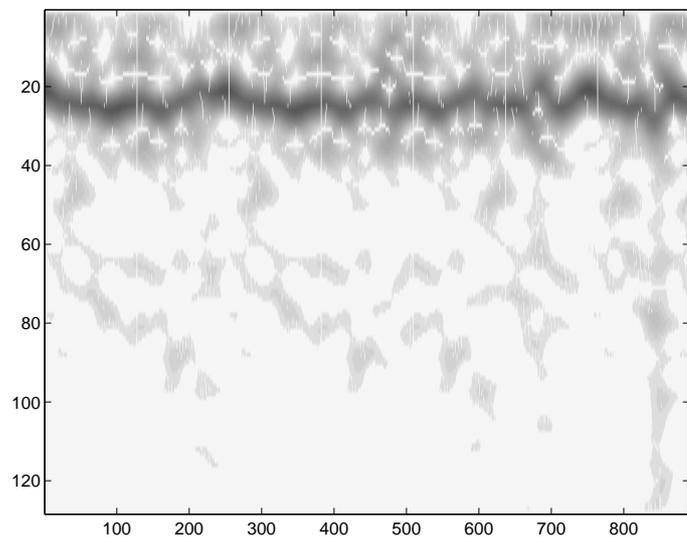


FIG. 6 – image temps-fréquences de  $a1$

Il est maintenant intéressant de confronter les images temps-fréquences des tachogrammes  $a7$  et  $a10$ , dont les densités spectrales de puissance présentaient une analogie évidente (figure 2); ces deux images temps-fréquences apparaissent respectivement sur les figures 7 et 8 ci-dessous :

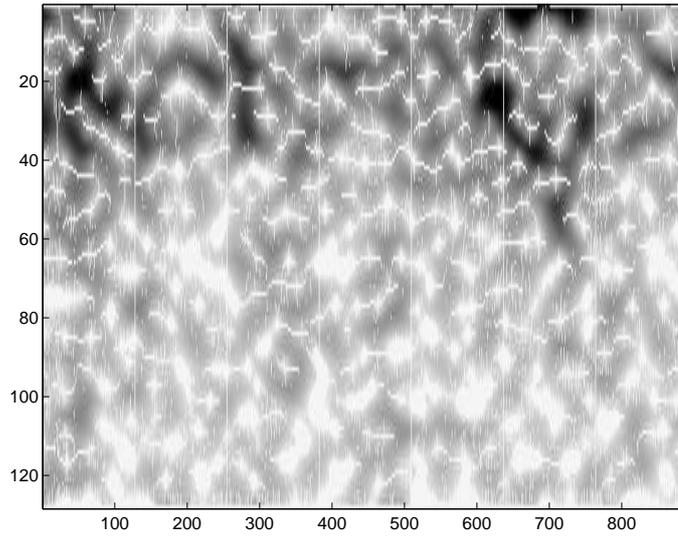


FIG. 7 – image temps-fréquences de  $a7$

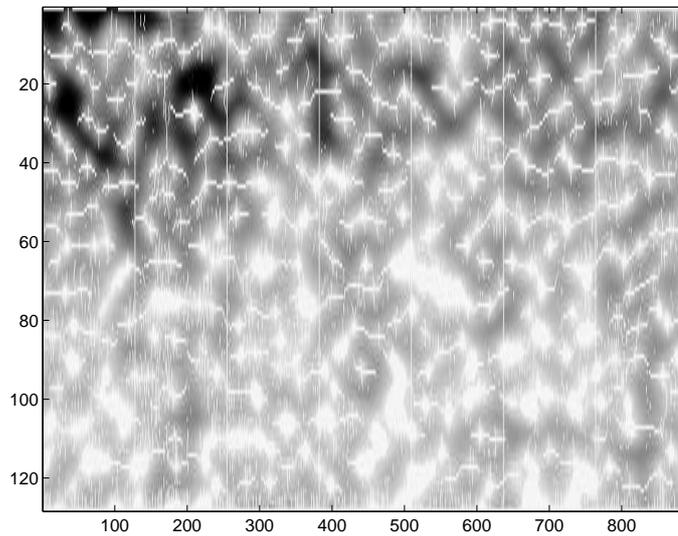


FIG. 8 – image temps-fréquences de  $a10$

Ces deux images sont certes beaucoup plus confuses, mais on y voit la même trame ; un décrochage de fréquences vers les hautes fréquences, précédé (dans le premier cas) ou suivi (dans le second) d'une évolution confuse plutôt vers les basses fréquences. Pareille évolution linéaire vers les basses fréquences apparaît précisément (voir la figure 9) sur l'image temps-fréquences du tachogramme  $a8$  des figures 3 et 4 (tachogramme dont la densité spectrale de puissance semblait précisément décalée vers les basses fréquences par rapport à celles de  $a7$  ou  $a10$ ).

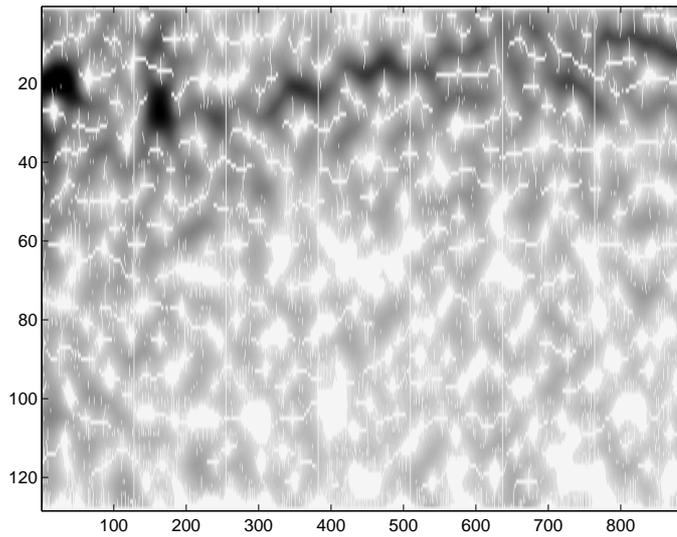


FIG. 9 – image temps-fréquences de  $a8$

La séquence correspondant au tachogramme  $a6$  (voir la figure 10) présente, elle, du point de vue de l'analyse fréquentielle statistique, une évolution vers les hautes fréquences (voir le graphe de la densité spectrale de puissance de  $a6$ , confronté à celui de la densité spectrale de puissance correspondant au tachogramme  $a7$  sur la partie inférieure de la figure 10).

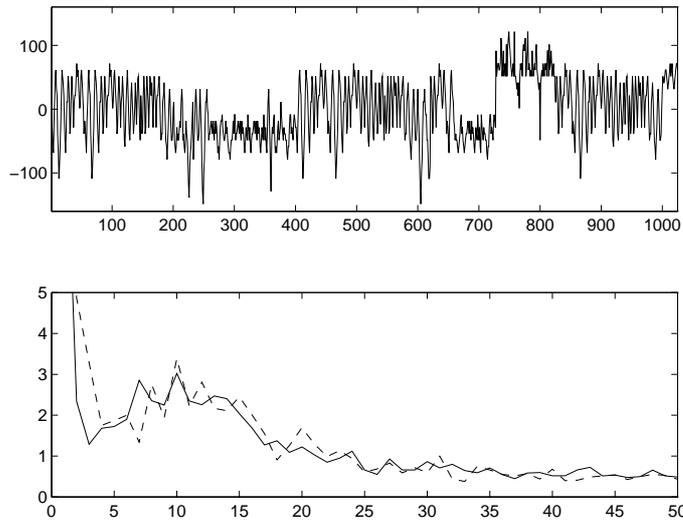


FIG. 10 – tachogramme  $a6$  (en haut) et sa PSD (en pointillé en bas, contre celle de  $a7$ )

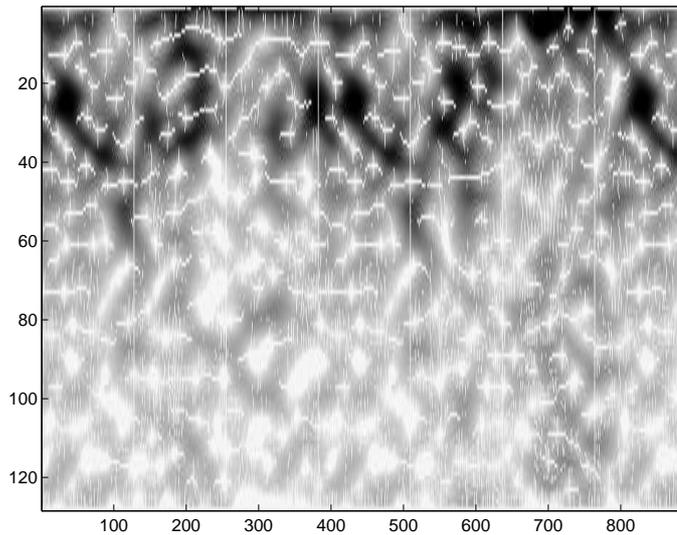


FIG. 11 – image temps-fréquences de  $a_6$

L'image temps-fréquences de la séquence  $a_6$  (figure 11) reflète, comme on peut s'en douter, cet état de fait ; de fait, il y a, au long de cette séquence, deux (voire trois) décrochages (et non plus un seul) vers les hautes fréquences ; la majeure partie des séquences étudiées peuvent être comparées à l'un des exemples étudiés ci-dessus ; il faut y ajouter les séquences marquées par des “accidents”, séquences dont nous reparlerons en évoquant dans le paragraphe suivant l'analyse temps-échelles. En voici, avec l'exemple du tachogramme 5, séquence où l'activité hautes-fréquences semble plus constamment soutenue (figures 12 et 13) un exemple ; la figure 13 nous permet de localiser un accident haute-fréquence (autour du seuil temporel 200) dans le tachogramme ; cet accident est probablement responsable des quelques pics vraiment très haute-fréquence (0.4 Hertz) apparaissant sur le graphe de la densité spectrale de puissance, pics qui ne relèvent pas tant d'une analyse temps-fréquences que d'une analyse temps-échelles (que nous conduirons dans la section suivante).

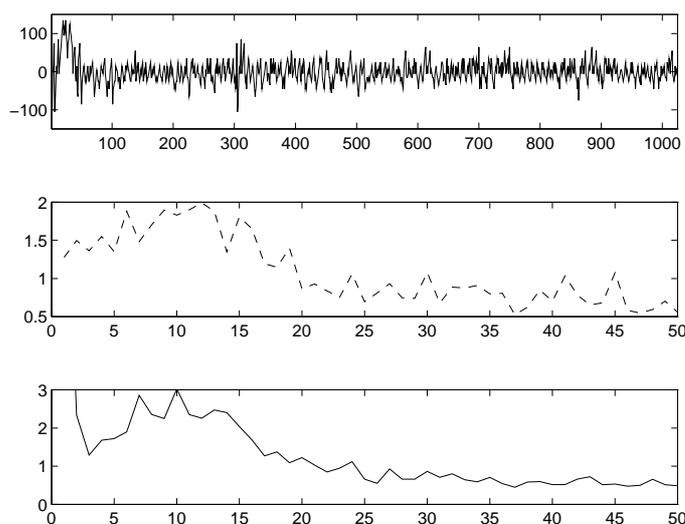


FIG. 12 – tachogramme  $a_5$  (en haut) et sa PSD (en pointillé au milieu, contre celle de  $a_7$  en bas)

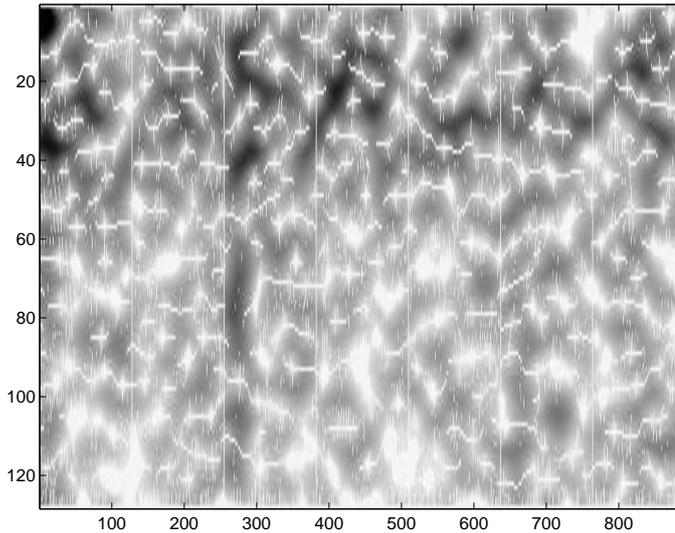


FIG. 13 – image temps-fréquences de  $a_5$

### 3 L’analyse temps-échelles ; (encore !) les tachogrammes

Parallèlement à l’analyse temps-fréquences, on peut envisager une lecture des signaux (ou des images) en temps-échelles ; l’idée est simple et inspirée du mécanisme classique de la vision rétinienne ; toute information captée par la pupille de l’oeil l’est en fait suivant un processus de moyennisation ; il s’opère à l’instant de la perception de l’information une moyennisation locale de celle-ci (la valeur enregistrée correspondant à  $s(n\tau)$  ou à l’image en un pixel donné est calculée comme la moyenne des informations voisines) ; dans un second temps, un mécanisme neuronal “redistribue” les valeurs ainsi moyennisées, permettant ainsi l’obtention d’une version “brouillée” de l’information ; la différence entre le signal digital original et sa version brouillée constitue l’ensemble des “détails” de l’information que le mécanisme de la vision a gommé, par le fait même qu’il a réalisé dans un premier temps une “compression” des données (indispensable du fait de l’imperfection du mécanisme de vision) avant de redistribuer la version comprimée pour en rendre possible la lecture dans l’échelle initiale où se trouvait proposée l’information. Pareil algorithme s’itère (les niveaux de détails successifs sont  $d_1, d_2, \dots, d_N$ , le “résumé” final est  $r_N$ ) et l’on peut même, en choisissant intelligemment le processus de moyennisation, faire de  $d_1, \dots, d_N, r_N$  les composants d’une décomposition orthogonale (c’est à dire concrètement non redondante) de l’information initiale  $s$  ; en particulier  $r_N$  s’interprète comme une “ligne de base” du signal  $s$ . Chaque signal  $d_j$  indique la composante du signal vivant à l’échelle  $j$ , le découpage des échelles étant dyadique. On peut assouplir d’ailleurs cette contrainte de hiérarchie dyadique des échelles et profiter de la comparaison des décompositions basées sur des rapports d’échelle distincts et premiers entre eux, tels 2, 3, 5, ..., pour identifier les éventuelles structures cohérentes présentes dans l’information et les différencier des artefacts de nature arithmétique liés au processus de décomposition. Voici par exemple les décompositions obtenues suivant pareil procédé pour quelques uns des séquences temporelles correspondant aux tachogrammes étudiés dans la section précédente.

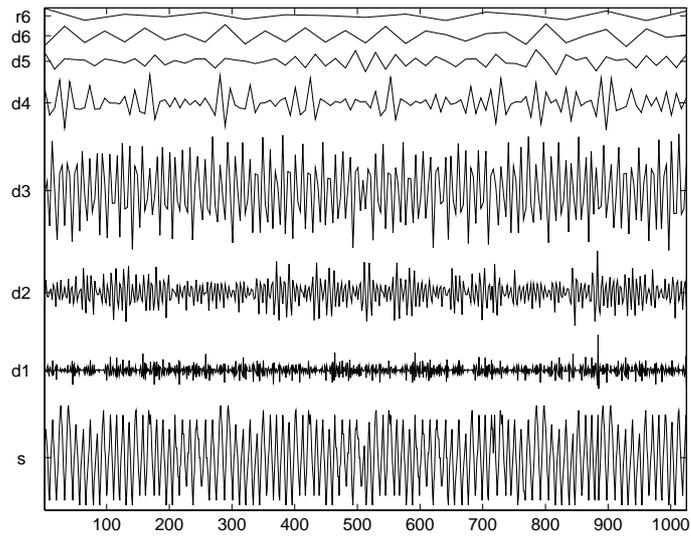


FIG. 14 – décomposition de  $a1$

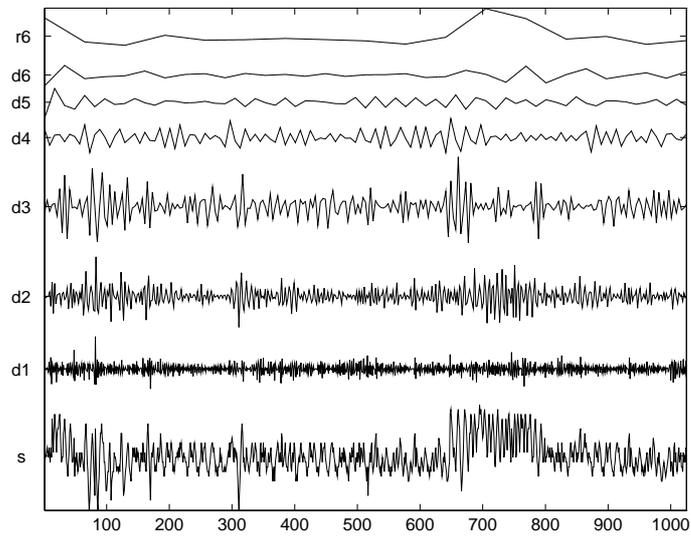


FIG. 15 – décomposition de  $a7$

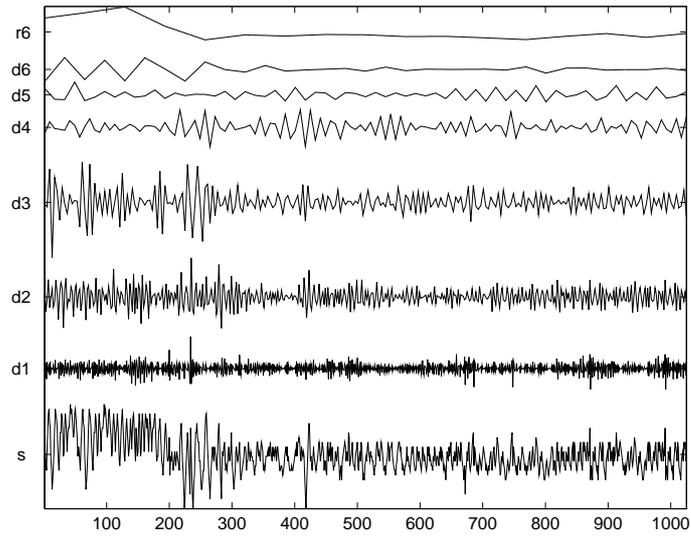


FIG. 16 – décomposition de  $a_{10}$

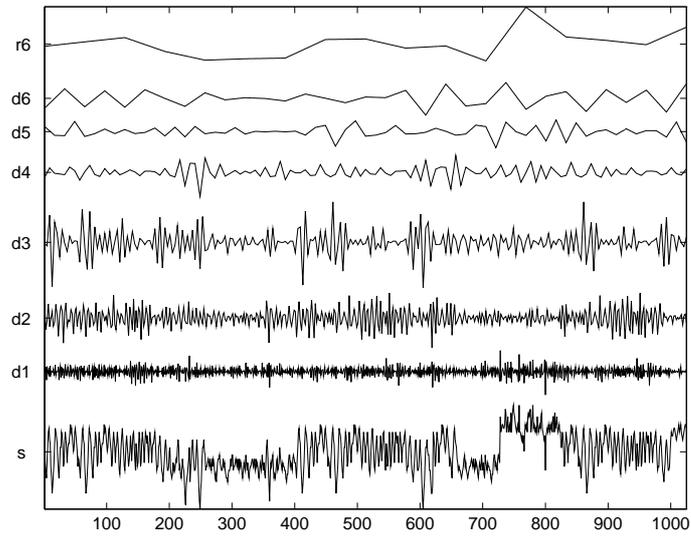


FIG. 17 – décomposition de  $a_6$

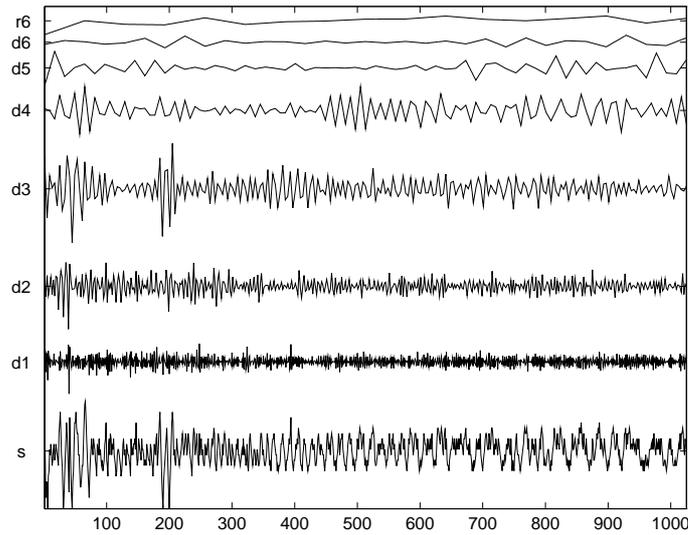


FIG. 18 – décomposition de  $a_8$

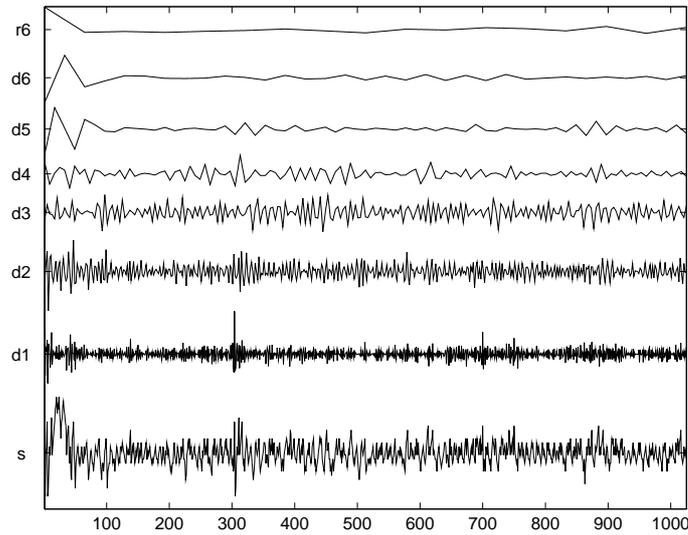


FIG. 19 – décomposition de  $a_5$

Ce sont les niveaux de détails  $d_3$  et  $d_4$  qui semblent les plus significatifs des composants de la décomposition ; on remarquera une correspondance entre le renforcement de  $d_3$  et la prépondérance de la composante HF, celui de  $d_4$  et la prépondérance de la composante LF, même si les deux types de décomposition que sont les décompositions du type **TEMPS-FRÉQUENCES** et **TEMPS-ÉCHELLES** sont des types de décomposition d'obédience diverse. Le premier intérêt de la décomposition temps-échelles est la possibilité d'identifier, à un niveau d'échelle donné (manifestement l'un des deux niveaux significatifs, à savoir les niveaux 3 ou 4) des structures cohérentes et éventuellement répétitives. Rien n'exclut que de telles structures puissent échapper à une analyse en fréquences, car l'on sait que l'une des failles majeures de l'analyse en fréquence d'une information via l'outil mathématique qu'est la transformation de Fourier est que cette transformation (qui optiquement correspond à l'opération de diffraction) ne respecte pas la localisation des phénomènes : un accident du signal

est un phénomène hautes fréquences, les évolutions marquant la ligne de base correspondent à des phénomènes de fréquence beaucoup trop basse pour qu’une analyse temps-fréquences (utilisant une fenêtre assez petite pour que l’on puisse y supposer le signal stationnaire) puisse les détecter.

Pareille analyse temps-échelles peut aussi être conduite sans le souci de non-redondance (privilégier la redondance n’est pas toujours la panacée face à l’étude de signaux de cette nature, l’information s’avérant parfois plus perceptible si elle empiète sur plusieurs niveaux de la décomposition) ; l’idée repose sur l’analyse en ondelettes continue, initiée à partir d’un “atome” (ou ondelette)  $\psi$  localisé au mieux en temps et en fréquence et duquel on exige le spectre suffisamment “plat” en 0 (de manière à ce que la moyennisation glissante des signaux contre cet atome corresponde à l’action d’un filtre passe-bande) ; l’image visualisée (rendant compte de la structure temps-échelles d’un signal  $s$  donné) décrit l’intensité de la fonction de deux variables ( $a$  représentant l’échelle, utilisée comme ordonnée,  $b$  représentant le temps, utilisé comme abscisse)

$$(a, b) \mapsto \frac{1}{a} \left\langle s(t), \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \right\rangle.$$

L’exploration des images de haut en bas correspond à une analyse de plus en plus fine des détails du signal aux échelles de plus en plus “serrées”. Voici les résultats obtenus concernant trois des tachogrammes étudiés dans la section précédente ; on comparera les informations obtenues avec les informations issues de l’analyse temps-fréquences. L’ondelette utilisée ici est l’ondelette de Morlet, celle nous paraissant la plus adaptée au compromis entre l’exploration temps-échelles d’une information et son exploration temps-fréquences. L’idée de l’utilisation des techniques d’analyse temps-échelles aux fins de l’étude de la **HRV** apparaît par exemple dans un travail de H. Tsuji et H. Mori (1994)[9].

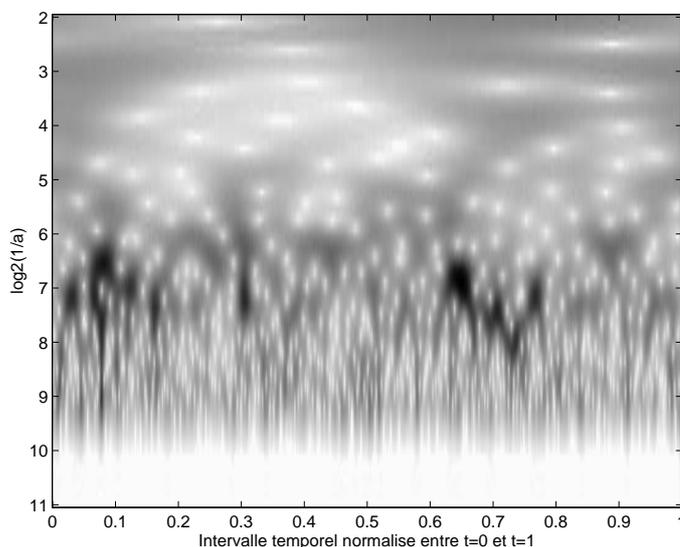


FIG. 20 – image temps-échelles de  $a7$

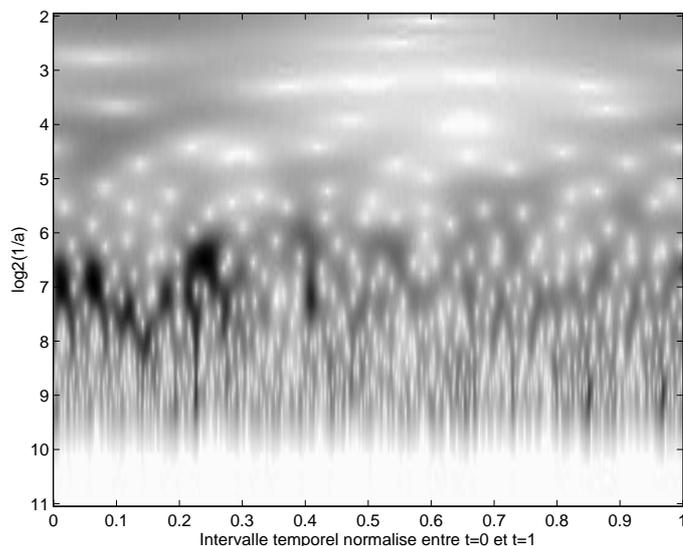


FIG. 21 – image temps-échelles de  $a_{10}$

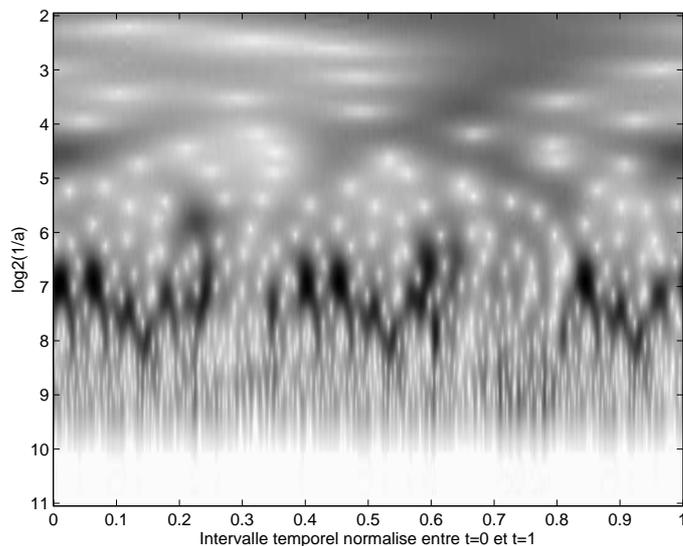


FIG. 22 – image temps-échelles de  $a_6$

Ces images rendent compte d'évolutions temps-échelles en phase avec les évolutions temps-fréquences ; la comparaison d'un grand nombre de tachogrammes montre cependant qu'une analyse temps-fréquences semble plus adaptée à l'étude de tels signaux, ce qui semble confirmer la nature des signaux rendant compte de la **HRV** au niveau de leur (hypothétique) contenu fréquentiel.

#### 4 D'autres outils d'analyse : la "poursuite" contre un dictionnaire

L'algorithme dit de "matching pursuit", très simple conceptuellement, semble être l'un de ceux qui s'impose de manière naturelle lorsqu'il s'agit d'étudier (ou de

classifier) les signaux ou images de nature physiologique.

Le *matching pursuit*, introduit par Stéphane Mallat dans les années 1990 (voir [4]), repose sur une idée simple : étant donné un “dictionnaire”  $\mathcal{D}$  de signaux de référence (ou d’images de référence)  $d_1, \dots, d_N$  et un signal  $s$ , on teste  $s$  contre tous les signaux  $d_i$  du dictionnaire en calculant les corrélations  $\langle s, d_1 \rangle, \dots, \langle s, d_N \rangle$  ; on isole l’indice  $i_1$  tel que cette corrélation soit en module maximale, puis l’on teste à nouveau contre le dictionnaire le signal

$$s - \langle s, d_{i_1} \rangle d_{i_1},$$

autorisant la détection d’un second atome  $d_{i_2}$ , etc... Cet algorithme peut être amélioré si l’on parvient (en le modifiant légèrement, ce qui s’avère possible) à faire en sorte que le reste au cran  $n$  ne soit corrélé avec aucun des atomes  $d_{i_1}, \dots, d_{i_{n-1}}$ , auquel cas le processus de la traque du signal contre le dictionnaire peut s’effectuer “sans remise”. (voir par exemple une présentation de ces algorithmes dans [10], chapitre 1). Cet ouvrage introductif présente d’ailleurs les divers algorithmes mathématiques (tous très simples de fait) exploités aux fins d’illustrer cet exposé ; ces algorithmes ont été composés sous l’environnement du logiciel de calcul scientifique **MATLAB** et sont aisément transposables à l’environnement du logiciel **SCILAB** développé par l’INRIA ; on peut les trouver sur le site : <http://www.math.u-bordeaux.fr/yger>

Pour citer un exemple où pareil algorithme semblait utile à mettre en pratique, nous mentionnerons celui des images obtenues via le mécanisme de gammagraphie par codage (voir la figure ci-dessous), le corps chargé (émettant par conséquent un bruit poissonien d’émission capté après passage au travers du masque) étant le ventricule du muscle cardiaque, ventricule sur lequel l’objectif est la détection de nécroses. Les divers processus d’inversion (voir par exemple la toute récente thèse de M. Quartuccio à Orsay pour un panorama actualisé de ces outils mathématiques et de leurs limites face à des problèmes trop fréquemment mal posés car sous-conditionnés) ne permettent en général pas la restitution de l’image 3D à partir de l’information 2D que constitue l’image. Plutôt que les méthodes inspirées du pseudo-filtrage de Wiener visant à identifier les contributions des “coupes” du corps aux tranches  $y_k$ , on pourra confronter l’image suivant un dictionnaire d’images-test obtenues à partir de modèles présentant divers types de pathologies. L’idée d’une telle étude a été proposée par Jean-Francois Crouzet dans sa thèse [3].

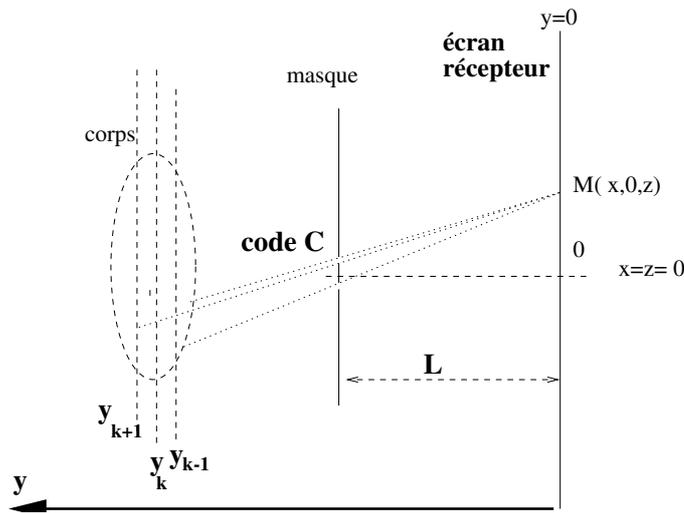


FIG. 23 – gammagraphie par codage

Cet algorithme de matching-pursuit est aussi celui que nous proposons de mettre en oeuvre pour l'étude (et la comparaison) des signaux correspondant à la mesure du potentiel électrique de la peau (signaux du type  $\mathbf{SPR}^+$  ou  $\mathbf{SPR}^-$  déjà mentionnés). Il serait intéressant de classifier de tels signaux suivant des principes de même nature que ceux que l'on a tenté de mettre en oeuvre concernant par exemple la classification par le FBI des empreintes digitales ; ceci serait un test pour tenter de valider la thèse de Lang selon laquelle la "ligne de base" de des réponses pourrait être une caractéristique de chaque individu. Voici par exemple le tracé type de deux séquences correspondant à de tels enregistrements (en plein figure les ondes positives, en pointillé les ondes négatives).

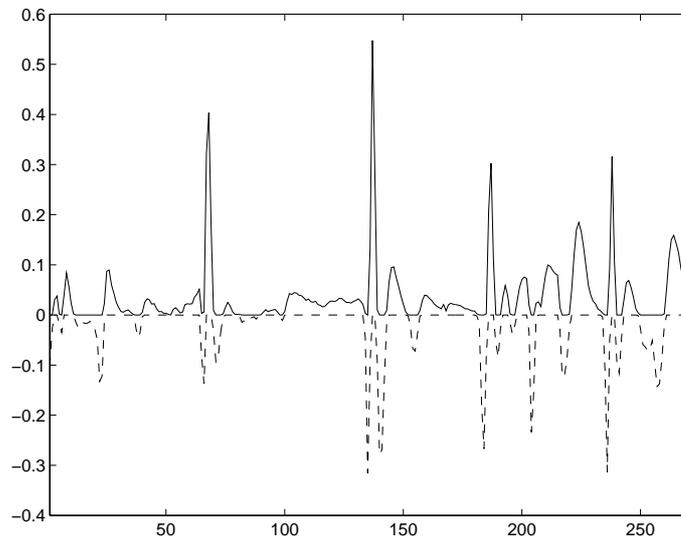


FIG. 24 – exemple de signal de type SPR (spr13)

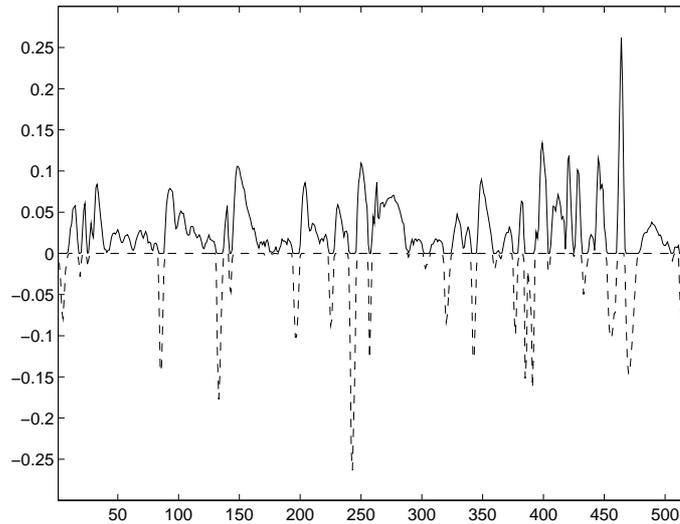


FIG. 25 – exemple de signal de type SPR (spr11)

L'algorithme de recherche d'une base optimale (au sens de la minimisation d'un critère d'entropie adapté aux exigences de l'expérimentateur, voir [10], chapitre 6 pour les références) suivant laquelle des signaux de ce type seraient amenés à se décomposer fournit un moyen de classification de ces signaux ; le même algorithme peut être exploité aux fins de classifier les séquences de tachogrammes. C'est par ces remarques que nous concluerons cet exposé, visant avant tout à présenter (avec leurs limites) l'intérêt que peuvent présenter certains algorithmes d'inspiration récente de traitement numérique du signal ou de l'image face aux questions que pose l'épineux problème de la non-stationnarité (au sens déterministe du moins) de certains signaux de nature physiologique.

## Références

- [1] J. Brunol, N. de Beaucoudray & S. Lowenthal, Déconvolution analogique en imagerie par ouverture codée appliquée à la médecine nucléaire, *Optica Acta*, 25, 2, 113-124 (1978)
- [2] R. Coifman, Y. Meyer, S. Quake and M. V. Wickerhauser, Signal processing and compression with wavelet packets, Yale math department Wavelet Resources, <http://www.math.yale.edu/wavelets>
- [3] J-F. Crouzet, La gammagraphie par ouverture de codage, thèse présentée à l'Université Bordeaux 1 (1996), école doctorale de Mathématiques et Informatique, no ordre 1444.
- [4] S. Mallat & Z. Zhang, Matching pursuit with time frequency dictionaries, *IEEE Transactions on Signal Processing* 12 (1993), 3397-3415
- [5] A. Malliani, M. Pagani, F. Lombardi, S. Cerutti, Cardiovascular Neural Regulation Explored in the Frequency Domain, *Circulation*, 84 (2), 1991, pp. 482-492.
- [6] Y. Meyer, R. Ryan, *Wavelets, Algorithms and applications*, SIAM, 1993, ISBN0-89871-309-9.
- [7] N. Ohyama, T. Honda, J. Tsujiuchi, Tomogram reconstruction using advanced coded aperture imaging, *Optics communications*, 36, 6 (1981), 434-438.

- [8] M. Quartuccio, Caméra à collimation assistée par ordinateur CACA0. Étude à 2 et 3 dimensions et premières expériences, thèse présentée à l'Université Paris 11, Laboratoire de Physique des Solides, Mars 2001.
- [9] H. Tsuji, H. Mori, New analysis of HRV through Wavelet transform, *International Journal of Human-Computer Interaction* 6 (2), 1994, 205-217.
- [10] A. Yger, *Analyse et Traitement du Signal, Cours et initiation pratique via MATLAB et SCILAB*, Collection Universités, Ellipses, 1999.