

UE MAP403 , Devoir Surveillé, Lundi 16 Avril 2007

Durée : 1 heure 20 mn, Notes de cours autorisées

Texte (*en italiques*) et corrigé (en roman)

Exercice 1.

a. On considère les 6 nombres $x_k = k$, $k = 0, \dots, 5$; écrire explicitement l'expression du polynôme d'interpolation de Lagrange P assignant au point x_k le nombre $\frac{1}{k+1}$ pour $k = 0, \dots, 5$ (on donnera la valeur des coefficients de ce polynôme).

Pour trouver ce polynôme (de degré 5), on l'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} P(X) = & a_0 + a_1X + a_2X(X-1) + a_3X(X-1)(X-2) \\ & + a_4X(X-1)(X-2)(X-3) \\ & + a_5X(X-1)(X-2)(X-3)(X-4) \end{aligned}$$

et l'on écrit la liste des 6 conditions :

$$\begin{aligned} P(0) &= a_0 = 1 \\ P(1) &= a_0 + a_1 = 1/2 \\ P(2) &= a_0 + 2a_1 + 2a_2 = 1/3 \\ P(3) &= a_0 + 3a_1 + 6a_2 + 6a_3 = 1/4 \\ P(4) &= a_0 + 4a_1 + 12a_2 + 24a_3 + 24a_4 = 1/5 \\ P(5) &= a_0 + 5a_1 + 20a_2 + 60a_3 + 120a_4 + 120a_5 = 1/6. \end{aligned}$$

Ce système triangulaire se résout à partir du haut de proche en proche et on trouve

$$a_0 = 1, a_1 = -1/2, a_2 = 1/6, a_3 = -1/24, a_4 = 1/120, a_5 = -1/720.$$

Le polynôme P s'écrit donc

$$\begin{aligned} P(X) = & 1 - \frac{X}{2} + \frac{X(X-1)}{6} - \frac{X(X-1)(X-2)}{24} \\ & + \frac{X(X-1)(X-2)(X-3)}{120} \\ & - \frac{X(X-1)(X-2)(X-3)(X-4)}{720}. \end{aligned}$$

On a les coefficients en développant mais la base choisie pour exprimer ce polynôme est ici la plus judicieuse pour faire les calculs le plus rapidement possible (le procédé utilisé ici est celui dit des *différences divisées*).

b. Pourquoi a-t-on l'inégalité

$$\forall x \in [0, 5], \left| \frac{1}{1+x} - P(x) \right| \leq |x(x-1)\cdots(x-5)| ?$$

Soit $f : x \in [0, +\infty[\mapsto \frac{1}{1+x}$. Le polynôme P étant le polynôme de degré 5 interpolant exactement les valeurs de la fonction f aux points $0, 1, \dots, 5$ et cette fonction f étant de classe C^∞ au voisinage de $[0, 5]$, le résultat vu en cours (proposition 3.1) nous assure que

$$|f(x) - P(x)| \leq |x(x-1)\cdots(x-5)| \times \frac{\sup_{t \in [0,5]} |f^{(6)}(t)|}{6!}.$$

Or

$$f^{(6)}(t) = \frac{6!}{(1+t)^7}$$

sur $]0, +\infty[$, ce qui implique $\sup_{t \in [0,5]} |f^{(6)}(t)| = 6!$. On a ainsi l'inégalité voulue.

c.¹ Trouver l'équation $y = \alpha x + \beta$ de la droite de régression du « nuage » de points

$$\left(k, \frac{1}{1+k}\right), \quad k = 0, \dots, 5.$$

Pour faire cela, il y a deux solutions, soit appliquer les formules du cours (page 39), soit considérer la fonction

$$F : (\alpha, \beta) \mapsto \sum_{k=0}^5 \left(\frac{1}{1+k} - \alpha k - \beta \right)^2$$

et calculer l'unique point où ses deux dérivées partielles s'annulent. On choisira ici la seconde méthode, sans doute ici un peu plus rapide. On a

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial \alpha} &= \sum_{k=0}^5 k \left(\frac{1}{1+k} - \alpha k - \beta \right) \\ &= -55\alpha - 15\beta + \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \cdots + \frac{5}{6} \right) \\ -\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial \beta} &= \sum_{k=0}^5 \left(\frac{1}{1+k} - \alpha k - \beta \right) \\ &= -15\alpha - 6\beta + \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{6} \right). \end{aligned}$$

¹Cette question avait été supprimée et considérée hors barème ; nous en donnons tout de même le corrigé.

En écrivant que ces deux dérivées partielles sont nulles, on est amené à résoudre un système de Cramer. La solution est $\alpha \simeq -.1471$, $\beta \simeq .7762$. La droite de régression est donc la droite d'équation cartésienne

$$y = -0.1471x + 0.7762$$

(on a donné ici des valeurs approchées conduits avec une calculette mais les deux coefficients sont ici rationnels).

Exercice 2. On considère l'équation différentielle du premier ordre

$$y' = \sin(x^2y - x).$$

a. Est t'on assuré de l'existence d'une unique solution $y : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie $y(0) = 1$?

Pour pouvoir appliquer le théorème 2.2 du cours (dit théorème de Cauchy-Lipschitz), il faut vérifier qu'il existe une constante K telle que, pour tout $x \in [0, 1]$, pour tout $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, on a

$$|\sin(x^2y_1 - x) - \sin(x^2y_2 - x)| \leq K|y_1 - y_2|$$

(c'est la contrainte (2.4) mentionnée dans les notes de cours). On peut pour cela appliquer l'inégalité des accroissements finis (x étant fixé dans $[0, 1]$) à la fonction

$$y \longmapsto \sin(x^2y - x)$$

dont la dérivée est

$$y \longmapsto x^2 \cos(x^2y - x).$$

On a, en utilisant précisément cette inégalité des accroissements finis (vue dans le cours de MAT202 par exemple)

$$\begin{aligned} |\sin(x^2y_1 - x) - \sin(x^2y_2 - x)| &\leq \sup_{y \in [y_1, y_2]} |x^2 \cos(x^2y - x)| |y_1 - y_2| \\ &\leq x^2 |y_1 - y_2| \leq |y_1 - y_2|. \end{aligned} \quad (1)$$

L'hypothèse (2.4) du cours est donc remplie et par conséquent le théorème 2.2 s'applique (ici $[a, b] = [0, 1]$ et $y_0 = 1$). On est ainsi assuré de l'existence et de l'unicité de la solution y .

b. Si l'on fixe un pas $\tau = 10^{-p}$, $p \in \mathbb{N}^*$, quelle est la suite récurrente $(y_{p,k})_k$ que la méthode d'Euler nous invite à construire pour approcher (et comment) le graphe sur $[0, 1]$ de cette fonction y ? Ecrire explicitement la procédure finalisant le calcul de cette suite récurrente $y_{p,k}$, $k = 0, \dots, 10^p$. Donner la majoration de l'erreur

$$\max_{0 \leq k \leq 10^p} |y(k/10^p) - y_{p,k}|.$$

La suite récurrente que la méthode d'Euler invite à construire est la suite définie par la condition initiale

$$y_{p,0} = 1$$

et par la relation inductive

$$\frac{y_{p,k+1} - y_{p,k}}{\tau_p} = \sin \left(k^2 \tau_p^2 y_{p,k} - k \tau_p \right), \quad k = 0, \dots, 10^p - 1,$$

soit ici

$$y_{p,k+1} = y_{p,k} + \frac{1}{10^p} \sin \left(\frac{k^2}{10^{2p}} y_{p,k} - \frac{k}{10^p} \right), \quad k = 0, \dots, 10^p - 1.$$

La procédure s'écrit donc (on a utilisé ici la syntaxe MATLAB, mais vous pouviez tout aussi bien utiliser la syntaxe MAPLE) :

```

y=1;
yy=1;
for k=1:10^p-1
    yy = yy + 10^(-p)* sin(k.^2/10^(2p) * yy - k*10^(-p));
    y = [y yy];
end

```

La majoration de l'erreur est explicitement donnée dans le cours (voir page 28 du cours, lorsque l'on a explicitement prouvé que la méthode d'Euler était bien d'ordre 1) par

$$M \frac{e^K - 1}{K} \times 10^{-p},$$

où $M = \sup_{[0,1]} |y''|$ et K est la constante de Lipschitz intervenant dans (2.4). On a vu au **a** que dans notre cas, on pouvait prendre $K = 1$ (cf. l'inégalité (1) ci dessus). Le calcul de y'' donne (par la règle de Leibniz)

$$y'' = \frac{d}{dt} [\sin(x^2 y - x)] = (2xy - 1 + x^2 y') \cos(x^2 y - 1); \quad (2)$$

or

$$|y(x) - y(0)| \leq |x| \max_{[0,1]} |y'| \leq 1$$

ce qui implique $|y| \leq 2$ sur $[0, 1]$ puisque $y(0) = 1$. On a donc en combinant ceci avec (2) et le fait que $|y'| \leq 1$ sur $[0, 1]$, la majoration suivante de y'' :

$$\forall x \in [0, 1], \quad |y''(x)| \leq 4x + 1 + x^2 \leq 6.$$

On a donc la majoration suivante de l'erreur :

$$\max_{0 \leq k \leq 10^p} |y(k/10^p) - y_{p,k}| \leq 6(e-1)10^{-p}.$$

Exercice 3.

a. Des trois méthodes (sécante, dichotomie, méthode de Newton), quelle est celle qui est d'ordre le plus élevé ?

C'est la méthode de Newton qui est d'ordre 2; en effet, la méthode de la sécante est d'ordre le nombre d'or $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1.6$, tandis que la méthode de dichotomie est une méthode itérative d'ordre 1.

b. On considère la fonction $x \mapsto x^3 - 2$ sur $[1, 2]$ et on initie la méthode de Newton à partir de $x_0 = 1$. Montrer que tous les nombres $(x_n)_{n \geq 0}$ calculés via l'algorithme présidant à cette méthode sont des nombres rationnels. Combien d'étapes de l'algorithme sont elles nécessaires pour trouver une approximation à 10^{-10} près de $2^{1/3}$?

L'algorithme de Newton génère (par exemple à partir de $x_0 = 1$) la suite gouvernée par l'équation récurrente

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 2}{3x_n^2}$$

puisque $f(x) = x^3 - 2$ et $f'(x) = 3x^2$ ne s'annule pas sur $[1, 2]$. Si x_n est rationnel, x_{n+1} l'est aussi du fait de cette formule; comme $x_0 = 1$, tous les x_n sont bien rationnels si l'on s'appuie sur un raisonnement par récurrence. Sur l'intervalle $[1, 2]$, on a $|f'| \geq 3$ et $|f''(x)| = |6x| \leq 12$, on a donc

$$\sup_{\xi \in [1, 2]} \frac{|f''(\xi)|}{2|f'(\xi)|} \leq \frac{12}{2 \times 3} = 2.$$

Compte-tenu des estimations d'erreur établies dans le cours (page 29, en fin de section 2.2), on trouve

$$|x_n - 2^{1/3}| \leq 2^n |2^{1/3} - x_0|^{2^n} = 2^n |2^{1/3} - 1|^{2^n}.$$

En calculant $(1.5)^3 > 2$, on constate que $1 < 2^{1/3} < 1.5$, ce qui nous autorise à majorer $|2^{1/3} - 1|$ par $1/2$. On a donc $|x_n - 2^{1/3}| \leq 2^{n-2^n}$; pour trouver l'approximation voulue, il suffit donc que

$$2^{n-2^n} < 10^{-10},$$

ou encore

$$2^n - n > 10 \frac{\log 10}{\log 2} \simeq 33.21.$$

On constate que $n \geq 6$ convient; en six itérations de l'algorithme, on a le résultat voulu.