Université de Bordeaux
Licence de Sciences et Technologies
2015-2016

Algèbre 1

Devoir surveillé n° 1

9 mars 2016, Durée 1h30

Documents non autorisés

Exercice 1. Déterminez l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}^4$ du système linéaire suivant :

$$\begin{cases} y - 2z + t = 1 \\ x + 3z = -1 \\ 2x + 3y + 3t = 1 \\ x + y + z + t = 0 \end{cases}$$

On résoud par la méthode du pivot de Gauss en indiquant les opérations effectuées sur les lignes L_i :

$$\begin{cases} y - 2z + t = 1 \\ x + 3z = -1 \\ 2x + 3y + 3t = 1 \\ x + y + z + t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 3z = -1 & \quad L_1 \leftrightarrow L_2 \\ y - 2z + t = 1 \\ 2x + 3y + 3t = 1 \\ x + y + z + t = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + 3z = -1 \\ y - 2z + t = 1 \\ 3y - 6z + 3t = 3 & \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ y - 2z + t = 1 & \quad L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + 3z = -1 \\ y - 2z + t = 1 \\ 0 = 0 & \quad L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \\ 0 = 0 & \quad L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -1 - 3z \\ y = 1 + 2z - t \end{cases}$$

Donc l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions est :

$$\mathcal{S} = \{(-1 - 3z, 1 + 2z - t, z, t) \mid (z, t) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Exercice 2. Pour chacune des familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^3$, on demande de déterminer si elles sont libres et de déterminer la dimension du sous-espace vectoriel qu'elles engendrent.

1. $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ avec $\vec{u}_1 = (1, 0, 1)$ et $\vec{u}_2 = (1, 2, 2)$.
2. $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ avec $\vec{u}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{u}_2 = (1, 1, 0)$ et $\vec{u}_3 = (1, 1, 1)$.
3. $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ avec $\vec{u}_1 = (1, 2, 1)$, $\vec{u}_2 = (2, 1, -1)$ et $\vec{u}_3 = (1, -1, -2)$.
4. $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4)$ avec $\vec{u}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{u}_2 = (1, 1, 0)$, $\vec{u}_3 = (1, 1, 1)$ et $\vec{u}_4 = (1, 2, 3)$.

Exercice 3. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $\vec{u} = (1, 1, 1)$ et $\vec{v} = (1, -1, a)$ où $a \in \mathbb{R}$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que le vecteur $\vec{w} = (3, 1, 3)$ appartienne à $\mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$. Montrer que lorsque cette condition est satisfaite, les sous-espaces $\mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$, $\mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{w})$ et $\mathrm{Vect}(\vec{v}, \vec{w})$ sont égaux.
2. À quelle condition, portant sur a, la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$? Justifiez votre réponse.

Exercice 4. On considère pour $n \geq 2$ les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$:

$$E = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \cdots + x_n = 0\}$$

et

$$F = \mathrm{Vect}((1, \ldots, 1)).$$

1. Donnez une base et la dimension de F.
2. Montrez que $\{(1, -1, 0, \ldots, 0), (1, 0, -1, \ldots, 0), \ldots (1, 0, \ldots, 0, -1)\}$ est une base de E, et déterminez la dimension de E.
3. Montrez que $E \cap F = \{\mathbf{0}\}$.
4. Montrez que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique couple $(u, v) \in E \times F$ tels que $x = u + v$. (indication : on pourra écrire $v = \lambda(1, \ldots, 1)$ et calculer λ en fonction des coordonnées de x).

1. Une base de F est $\{(1, \ldots, 1)\}$ et sa dimension est 1.
2. Soit $e_1 = (1, -1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (1, 0, -1, \ldots, 0), \ldots, e_{n-1} = (1, 0, \ldots, 0, -1)$. Montrons que $\{e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}\}$ est libre : soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ tels que $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_{n-1} e_{n-1} = \mathbf{0}$. On a donc :

   $$(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{n-1}, -\lambda_1, -\lambda_2, \ldots, -\lambda_{n-1}) = (0, 0, \ldots, 0)$$

   ce qui entraine :

   $$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0, \ldots,\ \lambda_{n-1} = 0.$$

   Soit $G = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots e_{n-1})$. Comme la famille $\{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ est libre, G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n - 1$. Comme chacun des vecteurs e_i appartient à E (car la somme de ses coordonnées vaut 0), on a $G \subset E$. donc $\dim(G) \leq \dim(E)$. D'autre part, $E \neq \mathbb{R}^n$ car par exemple $(1, 0, \ldots, 0) \notin E$, donc $\dim(E) < n$. On a donc $\dim(E) < n$ et $\dim(E) \geq (n - 1)$ donc la seule possibilité est que $\dim(E) = n - 1$ et donc que $\{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ soit une base de E.

3. Soit $v = \lambda(1, 1, \ldots, 1) \in F$, la somme de ses coordonnées est λn donc celle-ci ne peut valoir 0 que si $\lambda = 0$ soit si $v = \mathbf{0}$.

4. Supposons qu'une telle décomposition existe pour $x \in \mathbb{R}^n$, soit $x = u + \lambda(1, \ldots, 1)$ avec $u \in E$. On a alors

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} u_i + \lambda n = \lambda n$$

donc $\lambda = (\sum_{i=1}^{n} x_i)/n$.
Soit maintenant $x \in \mathbb{R}^n$ quelconque. On pose $\lambda = (\sum_{i=1}^{n} x_i)/n$ et $u = x - \lambda(1, \ldots, 1)$. On vérifie que $u \in E$: en effet,

$$\sum_{i=1}^{n} u_i = \sum_{i=1}^{n} x_i - \lambda n = 0.$$

On a bien $x = u + v$ avec $v = \lambda(1, \ldots, 1) \in F$ et $u \in E$.