Université de Bordeaux
Licence de Sciences et Technologies
2015-2016

Algèbre 1

Devoir surveillé n° 1

9 mars 2016, Durée 1h30

Documents non autorisés

Exercice 1. Déterminez l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}^4$ du système linéaire suivant :

$$\begin{cases} y - 2z + t = 1 \\ x + 3z = -1 \\ 2x + 3y + 3t = 1 \\ x + y + z + t = 0 \end{cases}$$

Exercice 2. Pour chacune des familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^3$, on demande de déterminer si elles sont libres et de déterminer la dimension du sous-espace vectoriel qu'elles engendrent.

1. $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ avec $\vec{u}_1 = (1, 0, 1)$ et $\vec{u}_2 = (1, 2, 2)$.

2. $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ avec $\vec{u}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{u}_2 = (1, 1, 0)$ et $\vec{u}_3 = (1, 1, 1)$.

3. $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ avec $\vec{u}_1 = (1, 2, 1)$, $\vec{u}_2 = (2, 1, -1)$ et $\vec{u}_3 = (1, -1, -2)$.

4. $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4)$ avec $\vec{u}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{u}_2 = (1, 1, 0)$, $\vec{u}_3 = (1, 1, 1)$ et $\vec{u}_4 = (1, 2, 3)$.

Exercice 3. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $\vec{u} = (1, 1, 1)$ et $\vec{v} = (1, -1, a)$ où $a \in \mathbb{R}$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que le vecteur $\vec{w} = (3, 1, 3)$ appartienne à $\mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$. Montrer que lorsque cette condition est satisfaite, les sous-espaces $\mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$, $\mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{w})$ et $\mathrm{Vect}(\vec{v}, \vec{w})$ sont égaux.

2. À quelle condition, portant sur a, la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$? Justifiez votre réponse.

Exercice 4. On considère pour $n \geq 2$ les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$:

$$E = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \cdots + x_n = 0\}$$

et

$$F = \mathrm{Vect}((1, \ldots, 1)).$$

1. Donnez une base et la dimension de F.

2. Montrez que $\{(1, -1, 0, \ldots, 0), (1, 0, -1, \ldots, 0), \ldots (1, 0, \ldots, 0, -1)\}$ est une base de E, et déterminez la dimension de E.

3. Montrez que $E \cap F = \{\mathbf{0}\}$.

4. Montrez que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique couple $(u, v) \in E \times F$ tels que $x = u + v$. (indication : on pourra écrire $v = \lambda(1, \ldots, 1)$ et calculer λ en fonction des coordonnées de x).