Corrigé DST Algèbre 1 - 17 mai 2016

**Exercice 1.** Soit
$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
Soit $f$ l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est égale à $M$.

On considère les vecteurs $\vec{u}_1 = (1,1,1)$, $\vec{u}_2 = (1,-1,0)$ et $\vec{u}_3 = (1,0,1)$ dans $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   La famille considérée étant constituée de 3 vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 3, il suffit, pour montrer que c'est une base, de montrer, au choix, qu'elle est libre *ou* qu'elle est génératrice. Avec la première méthode, on résout l'équation
   $$x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 + z\vec{u}_3 = \vec{0}$$
   c'est-à-dire
   $$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$
   dont on constate que l'unique solution est bien le triplet $(0,0,0)$. Avec la seconde méthode, il s'agit de montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 3, ce que l'on peut réaliser en l'échelonnant selon les colonnes :
   $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

2. Calculer les images par $f$ de $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, et $\vec{u}_3$ et en déduire la matrice $N$ de $f$ dans cette base.
   Il suffit de faire le produit de la matrice $M$ par les vecteurs *colonnes* $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On trouve $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans le premier cas, $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans le second et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans le troisième. Autrement dit
   $$f(\vec{u}_1) = (1,1,1) = \vec{u}_1 \text{ , } f(\vec{u}_2) = (2,-2,0) = 2\vec{u}_2 \text{ et } f(\vec{u}_3) = (0,0,0) = \vec{0}$$
   ce que l'on peut reformuler en disant que la matrice de $f$ dans la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est
   $$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Déterminer une base de $\ker f$ et de $\operatorname{Im} f$.
   En travaillant dans la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$, on voit que l'image du vecteur $\vec{u} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + x_3\vec{u}_3$ est égale à $x_1\vec{u}_1 + 2x_2\vec{u}_2$, d'où l'on déduit que :
   — $\ker f = \operatorname{Vect}\{\vec{u}_3\}$,
   — $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$.
4. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
   Justifie que $P$ est inversible et calculer son inverse.
   Quelle relation y a-t-il entre $N$, $P$, $P^{-1}$ et $M$ ?
   $P$ est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base $\mathcal{B}$ et est donc inversible en tant que telle. De plus, d'après un résultat du cours, on a la relation

$$N = P^{-1}MP.$$

   Pour calculer l'inverse de $P$, on peut appliquer l'algorithme vu en cours, c'est-à-dire concaténer $P$ à la matrice $I_3$, réaliser sur les lignes de la matrice obtenue les opérations destinées à transformer $P$ en $I_3$ et récupérer $P^{-1}$ comme résultat de la transformation du bloc de droite :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \leftrightarrow L_3]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{L_3 \leftarrow -L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_2 + L_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right).$$

   On peut donc conclure que

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 2.** Soient $\alpha$ et $\beta$ deux nombres réels, fixés pour toute la suite de l'exercice. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $A^2$ et $A^3$.
   $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2\alpha & \alpha\beta \\ 0 & 1 & 2\beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3\alpha & 3\alpha\beta \\ 0 & 1 & 3\beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n\alpha & \frac{n(n-1)}{2}\alpha\beta \\ 0 & 1 & n\beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

C'est une simple récurrence :

— Initialisation ($n = 0$) : $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0\alpha & \frac{0(0-1)}{2}\alpha\beta \\ 0 & 1 & 0\beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

— Hérédité : si la propriété est vraie pour un entier naturel $n$, c'est-à-dire si

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n\alpha & \frac{n(n-1)}{2}\alpha\beta \\ 0 & 1 & n\beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

alors elle se transmet au rang $n+1$ car

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= AA^n \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n\alpha & \frac{n(n-1)}{2}\alpha\beta \\ 0 & 1 & n\beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & (n+1)\alpha & n\alpha\beta + \frac{n(n-1)}{2}\alpha\beta \\ 0 & 1 & (n+1)\beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & (n+1)\alpha & \frac{(n+1)n}{2}\alpha\beta \\ 0 & 1 & (n+1)\beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Exercice 3.** Soit $E$ un $K$-espace vectoriel et soit $f : E \to E$ une application linéaire. Soit $U = \{x \in E \mid f(x) = x\}$ et soit $V = \{x \in E \mid f(x) = -x\}$.

1. Montrer que $U$ et $V$ sont des sous-espaces vectoriels de $E$.
   Pour montrer que $U$ est un sous-espace vectoriel de $E$, il suffit de vérifier que $U$ est non vide et que $U$ est stable par combinaison linéaire. Puisque $f$ est linéaire, $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, donc $\mathbf{0} \in U$. Soit $(x, y) \in U^2$ et $(\lambda, \mu) \in K^2$. On a $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) = \lambda x + \mu y$, en appliquant pour la première égalité la propriété de linéarité de $f$ et pour la deuxième égalité les hypothèses $x \in U$ et $y \in U$ (donc $f(x) = x$ et $f(y) = y$). Puisque $f(\lambda x + \mu y) = \lambda x + \mu y$, on a bien montré que $\lambda x + \mu y \in U$. On montre que $V$ est un sous-espaces vectoriel de $E$ de la même façon.

2. Montrer que $U \cap V = \{\mathbf{0}\}$.
Soit $x \in U \cap V$. Puisque $x \in U$, on a $f(x) = x$ et, puisque $x \in V$, on a $f(x) = -x$. On peut donc conclure que $x = -x$ soit $2x = \mathbf{0}$ et donc $x = \mathbf{0}$.

3. Dans cette question, $E = \mathbb{R}^4$ et $f$ est l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
Déterminez $U$ et $V$ et donnez leur dimension, puis montrez (sans calculs supplémentaires) que $E = U \oplus V$.

Soit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$. La condition $f(x) = x$ équivaut à : $M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$

ce qui conduit au système linéaire :
$$\begin{cases} x_2 & = x_1 \\ x_1 & = x_2 \\ x_4 & = x_3 \\ x_3 & = x_4 \end{cases}$$
dont l'ensemble des solutions est
$$U = \{(x_1, x_1, x_3, x_3) \mid x_1 \in \mathbb{R}, x_3 \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1,1,0,0),(0,0,1,1)).$$
Une base de $U$ est $\{(1,1,0,0),(0,0,1,1)\}$ donc $U$ est de dimension 2.
On procède de la même façon pour $V$, et on trouve $V = \mathrm{Vect}((1,-1,0,0),(0,0,1,-1))$ qui est également de dimension 2.
On a : $U \cap V = \{\mathbf{0}\}$ d'après la question 2. et $\dim(U) + \dim(V) = 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$ d'après ce qui précède donc (d'après un résultat du cours) $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$.

**Exercice 4.** On pose $\alpha = e^{i\pi/3} \in \mathbb{C}$ et on note $\overline{\alpha}$ son conjugué.
On considère le polynôme $A = X^3 + 1 \in \mathbb{C}[X]$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, la notation $\mathbb{C}[X]_n$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$ constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à $n$.

1. Déterminer les racines de $A$ dans $\mathbb{C}$.
On remarque que $-1$, $\alpha$ et $\overline{\alpha} = e^{-i\pi/3}$ sont racines de $X^3+1$ (en effet, $\alpha^3 = (e^{i\pi/3})^3 = e^{i\pi} = -1$). Comme un polynôme de degré 3 ne peut pas avoir plus de trois racines distinctes, on les a toutes.

2. Soit $E = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid A \text{ divise } P\}$. Montrer que $E$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$.
Le polynôme nul est divisible par $A$ donc appartient à $E$. Montrons que $E$ est stable par combinaisons linéaires. Cela revient à montrer que, si $A$ divise $P$ et si $A$ divise $Q$, alors $A$ divise $\lambda P + \mu Q$. En effet, si $P = AP_1$ et $Q = AQ_1$ alors $\lambda P + \mu Q = A(\lambda P_1 + \mu Q_1)$.

3. Montrer que l'application $f$ :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C}[X] &\to \mathbb{C}^3 \\ P &\mapsto (P(-1), P(\alpha), P(\overline{\alpha})) \end{aligned}$$

est une application linéaire.

Pour montrer que $f$ est une application linéaire, on doit montrer que, pour tout $(P, Q) \in \mathbb{C}[X]^2$ et pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$, $f(\lambda P + \mu Q) = \lambda f(P) + \mu f(Q)$. En effet :

$$\begin{aligned} f(\lambda P + \mu Q) &= ((\lambda P + \mu Q)(-1), (\lambda P + \mu Q)(\alpha), (\lambda P + \mu Q)(\overline{\alpha})) \\ &= \lambda(P(-1), P(\alpha), P(\overline{\alpha})) + \mu(Q(-1), Q(\alpha), Q(\overline{\alpha})) \\ &= \lambda f(P) + \mu f(Q). \end{aligned}$$

4. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f)$.

Par définition du noyau d'une application linéaire, $\mathrm{Ker}(f) = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid f(P) = (0, 0, 0)\}$. On a : $f(P) = (0, 0, 0)$ si et seulement si $P(-1) = 0$, $P(\alpha) = 0$ et $P(\overline{\alpha}) = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $-1$, $\alpha$ et $\overline{\alpha}$ sont racines de $P$. On sait d'après le cours que $z \in \mathbb{C}$ est racine de $P$ si et seulement s'il existe $Q$ tel que $P = (X - z)Q$. Donc $-1$, $\alpha$ et $\overline{\alpha}$ sont racines de $P$ si et seulement s'il existe un polynôme $Q$ tel que $P = (X + 1)(X - \alpha)(X - \overline{\alpha})Q$. D'après la question 1., $X^3 + 1 = (X + 1)(X - \alpha)(X - \overline{\alpha})$ donc finalement, $P$ appartient au noyau de $f$ si et seulement si $A = X^3 + 1$ divise $P$, soit $P \in E$.

5. Soit $g : \mathbb{C}[X]_2 \to \mathbb{C}^3$ l'application linéaire $f$ restreinte à $\mathbb{C}[X]_2$. Déduire des questions précédentes que $g$ est injective.

On a $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Ker}(f) \cap \mathbb{C}[X]_2 = E \cap \mathbb{C}[X]_2$. Mais un multiple de $A = X^3 + 1$ non nul est de degré au moins égal à 3 donc ne peut pas appartenir à $\mathbb{C}[X]_2$. Donc $\mathrm{Ker}(g) = \{\mathbf{0}\}$ et $g$ est injective.

6. Montrer que $g$ est surjective (on pourra appliquer le théorème du rang).

D'après le théorème du rang, $\dim(\mathbb{C}[X]_2) = \dim(\mathrm{Ker}(g)) + \dim(\mathrm{Im}(g))$. On sait que $\dim(\mathbb{C}[X]_2) = 3$ (car $\{1, X, X^2\}$ est une base de $\mathbb{C}[X]_2$) et que $\dim(\mathrm{Ker}(g)) = 0$ par la question précédente donc on en déduit que $\dim(\mathrm{Im}(g)) = 3$. Comme $\dim(\mathrm{Im}(g)) = \dim(\mathbb{C}^3)$, on peut conclure que $\mathrm{Im}(g) = \mathbb{C}^3$ c'est-à-dire que $g$ est surjective.

7. Écrire la matrice de $g$ lorsque $\mathbb{C}[X]_2$ est muni de la base $\{1, X, X^2\}$ et $\mathbb{C}^3$ est muni de la base canonique. Justifiez sans calculs que cette matrice est inversible.

On a $f(1) = (1, 1, 1)$, $f(X) = (-1, \alpha, \overline{\alpha})$ et $f(X^2) = (1, \alpha^2, \overline{\alpha}^2)$ donc la matrice de $f$ dans les bases indiquées est :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \overline{\alpha} & \overline{\alpha}^2 \end{pmatrix}$$

Puisque $g$ est bijective, cette matrice est nécessairement inversible.