université de BORDEAUX	**Année universitaire 2014-2015** S1 DE PRINTEMPS **Parcours :** Mathématiques/Informatique **Code UE :M1MI2012** **Épreuve : Algèbre 1** 12 juin 2015 : 14h (durée : 3h) *Documents interdits* Responsables de l'épreuves : C. Bachoc et R. Coulangeon	**Collège Sciences et Technologies**

Exercice 1. Soit a un réel. On considère les deux matrices suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer A^n pour tout entier naturel n.
2. Montrer que $B = I + A + A^2 + A^3$, où I désigne la matrice identité en dimension 4.
3. Calculer le produit $B(I - A)$. En déduire que B est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 2. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même dont la matrice M dans la base canonique $\mathcal{B}_0$ de $\mathbb{R}^3$ est donnée par

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Soient $u_1 = (1,1,0)$, $u_2 = (0,1,1)$ et $u_3 = (1,0,1)$.
   (a) Montrer que l'ensemble $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Calculer $f(u_1)$, $f(u_2)$ et $f(u_3)$.
   (c) Déterminer la matrice N de f dans la base $\mathcal{B}$.
2. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Justifier que P est inversible et calculer son inverse.
3. Montrer, *sans calcul*, que $N = P^{-1}MP$.
4. Calculer N^n pour tout entier naturel n.
5. En utilisant la relation établie à la question 3, en déduire la valeur de M^n pour tout entier naturel n.

Suite au dos de la feuille $\rightarrow$

Exercice 3.

1. Montrer que les racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme $X^2 + X + 1$, que l'on calculera, sont aussi racines du polynôme $X^3 - 1$.
2. Pour tout entier naturel n, on note R_n le reste de la division euclidienne de $X^n - 1$ par $X^2 + X + 1$.
   (a) Montrer qu'il existe des constantes a_n et b_n telles que $R_n = a_n + b_n X$.
   (b) Calculer R_n quand n vaut 0, 1 ou 2.
   (c) Pour un entier naturel quelconque n, montrer, en évaluant le polynôme $X^n - 1$ en les racines du polynôme $X^2 + X + 1$, que a_n et b_n sont solutions d'un système de deux équations linéaires à deux inconnues que l'on explicitera.
   (d) Montrer finalement que R_n ne dépend que du reste de la division euclidienne de n par 3 et le calculer.

Exercice 4. Dans cet exercice, $\mathbb{K}$ désigne indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On rappelle qu'un *endomorphisme* d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est une application linéaire de E dans lui-même.

Si f est un endomorphisme et k un entier naturel, on pose

$$f^k = \underbrace{f \circ f \ldots \circ f}_{k \text{ fois}}.$$

Un endomorphisme f est dit *nilpotent* s'il existe un entier naturel m tel que $f^m = 0$.

1. Soit f l'application de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^n$ qui a tout n-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) \in \mathbb{K}^n$ associe le n-uplet $(0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ ("*décalage vers la droite*").
   (a) Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$. Déterminer son noyau et son image .
   (b) Montrer que f est nilpotent.
2. Soit $\mathbb{K}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Pour tout entier naturel n, on note $\mathbb{K}[X]_n$ l'ensemble des polynômes de degré au plus n. On rappelle qu'il s'agit d'un sous espace vectoriel de dimension $n + 1$de $\mathbb{K}[X]$, dont une base est donnée par la famille $(1, X, \ldots, X^n)$. Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$ on définit
$$\Delta(P) = P(X + 1) - P(X).$$
   (a) Quelle relation y-a-t-il entre le degré de P et celui de $\Delta(P)$?
   (b) Montrer que la restriction de Δ à $\mathbb{K}[X]_n$ définit un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]_n$, que l'on note Δ_n.
   (c) Déterminer le noyau de Δ_n puis son image.
   (d) Montrer que Δ_n est nilpotent.
3. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme nilpotent. Soit m le plus petit entier strictement positif tel que $f^m = 0$.
   (a) Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $f^{m-1}(x) \neq 0$.
   (b) Montrer que les vecteurs $x, f(x), \ldots, f^{m-1}(x)$ forment une famille libre.
   (c) En déduire que $m \leq \dim E$.