N1MA4M11 Algèbre 3

DS n° 1.

9 Mars 2012, durée 1h20

Documents interdits

$\boxed{1}$ Soit G un groupe noté multiplicativement, de neutre e. On définit sur G la relation suivante :

$$x\mathcal{R}\,y \iff \text{ il existe } z \in G \text{ tel que } y = zxz^{-1}.$$

1. Montrez que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur G. Décrivez ses classes d'équivalence.
2. Montrez que $\mathrm{cl}(e) = \{e\}$ et que G est commutatif si et seulement si $\mathrm{cl}(x) = \{x\}$ pour tout $x \in G$.
3. (a) Montrez que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, et tout $x, y, z \in G$, $(zxz^{-1})^k = zx^kz^{-1}$.
   (b) En déduire que, si $x\mathcal{R}\,y$, alors x et y ont le même ordre dans G.
4. Soit H un groupe commutatif et $f : G \to H$ un homomorphisme de groupes.
   (a) Montrez que
   $$x\mathcal{R}\,y \Longrightarrow f(x) = f(y).$$
   (b) En déduire l'existence d'une application $\tilde{f} : G/\mathcal{R} \to H$ telle que $\tilde{f}(\mathrm{cl}(x)) = f(x)$.

$\boxed{2}$ On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le but de l'exercice est de montrer que le sous groupe $G = \langle A, B \rangle$ de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ engendré par A et B est un groupe d'ordre 16.

1. Montrez que A et B sont d'ordre 2.
2. Soit $R = BA$. Montrez que $G = \langle A, R \rangle$.
3. Montrez que R est d'ordre 8. (On pourra remarquer que R est la matrice d'une rotation du plan).
4. Montrez que $A \notin \langle R \rangle$ (On pourra considérer les déterminants de A et R).
5. En déduire que les 16 éléments de G : $R^i, AR^j, 0 \leq i, j \leq 7$ sont deux à deux distincts.
6. Montrez que $RA = AR^{-1} = AR^7$.
7. Déduire de tout ce qui précède que G est d'ordre 16 (On pourra montrer que $\{R^i, AR^j, 0 \leq i, j \leq 7\}$ est un sous-groupe de G).